сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-87-19

В.В.Корняк, Р.Н.Федорова

REDUCE-ПРОГРАММА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ СИММЕТРИЙ ЛИ-БЕКЛУНДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1987

I. Введение

В работе [I] была предложена програма вычисления симметрий Ли-Беклунда (ЛБ) дифференциальных уравнений, написанная на языке PL/1-FORMAC . Ввиду широкого распространения системы REDUCE представляется целесообразной реализация на языке этой системы алгоритмов вычисления симметрий ЛБ. Мы здесь предлагаем REDUCE-программу, аналогичную описанной в [I]. Основное отличие состоит в том, что в предлагаемой программе не производится упрощение системы определяющих уравнений в отличие от [I] и [2]. В настоящее время разрабатывается программа интегрирования определяющих уравнений, которая в качестве своих элементов будет содержать необходимые алгоритмы упрощения. При необходимости можно воспользоваться подпрограммой, описанной в [2]. Эта подпрограмма написана на языке REDUCE-2 , но требует незначительной модификации для применения ее в описываемой здесь программе.

Группа ЛБ определяется как группа касательных преобразований бесконечного порядка, т.е. координаты инфинитезимальных операторов зависят от неограниченного ряда производных [3]. Вектор алгебры Ли, называемый оператором ЛБ, имеет вид

$$X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\sum_{s\geqslant 1}\eta^\alpha_{i_1\ldots i_s}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1\ldots i_s}}, \qquad (I)$$

где $x^i\,(i=1,\ldots,n)$ – независимые, $u^\alpha\,(\alpha=1,\ldots,m)$ – зависимые переменные, $u^\alpha_{i_1\ldots i_s}$ – координаты расслоения джетов, соответствующие частным производным u^α по $x^{i_1},\ldots,x^{i_s}$. Для краткости мы будем называть эти координаты "производными". Функции ξ, η, $\cdots$, $\eta^\alpha_{i_1\ldots i_s},\cdots$ зависят от переменных $x^i,u^\alpha,\ldots,u^\alpha_{i_1\ldots i_s}$ и связаны между собой формулами продолжения:

$$\eta^\alpha_{i_1\ldots i_{s+1}}=D(\eta^\alpha_{i_1\ldots i_s})-u^\alpha_{ji_1\ldots i_s}D(\xi^j),$$

где $D=(D_1,\ldots,D_n)$ – оператор полного дифференцирования,

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{s \geq 0} u^{\alpha}_{i i_1 \dots i_s} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{i_1 \dots i_s}} \quad , \quad \eta^{\alpha}_{0} = \eta^{\alpha}.$$

Систему уравнений вместе со всеми дифференциальными следствиями называют дифференциальным многообразием:

$$[F] : F = 0, \dots, \underset{\nu}{F} = 0, \dots, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

По определению система уравнений $F=0$ называется инвариантной относительно группы ЛБ, если многообразие $[F]$ инвариантно. Согласно теореме, доказательство которой имеется в /3/, дифференциальное многообразие $[F]$ инвариантно относительно группы преобразований ЛБ, имеющей векторное поле X, тогда и только тогда, когда

$$(XF)_{[F]} = 0 \quad . \tag{2}$$

Т.е. достаточно применить оператор X только к исходным уравнениям, но при переходе на многообразие учесть дифференциальные следствия.

Вычисления упрощаются, если воспользоваться каноническими операторами ЛБ, которые вводятся следующим образом. Операторы ЛБ вида $X_{*} = \xi^{i}_{*} D_i$, где ξ^{i}_{*} – произвольные функции переменных x^i, $u^{\alpha}, \dots, u^{\alpha}_{i_1 \dots i_k}$, образуют идеал в алгебре Ли всех операторов ЛБ. Кроме того, эти операторы оставляют инвариантным произвольное дифференциальное многообразие, и, следовательно, не вносят вклада в условие инвариантности (2). Поэтому, без потери общности, можно рассматривать фактор-алгебру полной алгебры Ли по идеалу, порождаемому операторами X_{*}. Выбирая вместо операторов (I) эквивалентные им в фактор-алгебре операторы с нулевыми ξ^i, получаем канонические операторы ЛБ

$$X = \eta^{\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} + \dots \tag{3}$$

Теперь вместо $n+m$ функций ξ^i, η^{α} достаточно рассматривать только m функций η^{α}. Формулы продолжения принимают простой вид

$$\eta^{\alpha}_{i_1 \dots i_s} = D_{i_1} \dots D_{i_s} (\eta^{\alpha}) \quad .$$

Таким образом, применение канонических операторов дает возможность упростить алгоритмы и существенно сэкономить память ЭВМ и время вычислений. С использованием канонических операторов условие инвариантности (2) (определяющее уравнение) принимает вид

$$\left(\eta^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial u^{\alpha}} + D_i (\eta^{\alpha}) \frac{\partial F}{\partial u^{\alpha}_{i}} + \dots \right)_{[F]} = 0 \, . \tag{4}$$

Решение определяющего уравнения, зависящее от производных порядка не выше k, называется решением k-го порядка. Обычные точечные и контактные симметрии Ли являются частными случаями симметрий ЛБ I-го порядка.

Для того чтобы получить определяющие уравнения симметрий ЛБ k-го порядка, необходимо действовать следующим образом:

I. Вычислить дифференциальные следствия исходных уравнений до необходимого порядка (зависящего от k и от порядков производных в уравнениях).

2. Вычислить результат действия продолженного векторного поля на систему уравнений.

3. Перейти на многообразие, воспользовавшись соотношениями, полученными в пункте I.

4. Разделить определяющие уравнения, выделив в условии инвариантности коэффициенты при независимых функциях производных порядка выше k.

2. Описание программы

Координаты пространства $\mathcal{U}_k = (x, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{k}{u})$ упорядочиваются в лексикографическом порядке, как и в /I/. Здесь $\underset{i}{u}$ – упорядоченные совокупности производных i-го порядка. Для уменьшения сложности формы выражений на выводе в программе принято использование только однобуквенных символов для зависимых и независимых переменных. Покажем на примере соответствие между математическими обозначениями и принятыми в программе. Пусть имеются независимые переменные x и y и зависимая u, тогда канонический оператор ЛБ имеет вид

$$X = \eta \frac{\partial}{\partial u} + D_x(\eta) \frac{\partial}{\partial (u_x)} + D_y(\eta) \frac{\partial}{\partial (u_y)} + \dots$$

Производная $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ будет иметь вид на вводе и выводе UXY. Координата векторного поля η на выводе примет вид U", а ее производная $\frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial u \partial (u_{xx})}$ будет напечатана в виде U"X, U, UXX . Элементы пространства $\mathcal{U}_k$, координаты векторного поля и их производные имеют внутреннее представление, аналогичное использованному в /2/.

Программа последовательно выполняет следующие действия:

I. Чтение и печать входных данных.

2. Замена во входных выражениях переменных и производных их внутренними формами.

3. Вычисление дифференциальных следствий входной системы уравнений.

4. Исключение зависимостей из совокупности дифференциальных следствий.

5. Вычисление результата действия оператора ЛБ на систему уравнений.

6. Переход на многообразие.

7. Разделение определяющих уравнений.

8. Замена внутренних форм переменных и производных выходными.

9. Печать вывода.

Приведем список процедур, используемых в программе, с кратким описанием их функций.

I. RSUBST(A,B,C) – подставляет A в список C вместо B .

2. RCONC(A,B) – выполняет конкатенацию символов A и B .

3. RINTERN(A) – помещает символ A в OBLIST .

Процедуры в алгебраическом режиме:

4. BINC(N,M) – вычисляет биномиальные коэффициенты $\binom{N}{M}$.

5. INDS(J,N,M) – по порядковому номеру производной вычисляет ее индексы. Здесь J – порядковый номер, N – число независимых, M – число зависимых переменных.

6. DER(I,K,N) – вычисляет порядковый номер производной элемента ряда, имеющего порядковый номер I, по k-й независимой переменной. N – число независимых переменных.

7. SYMBZK(J) – по порядковому номеру J переменной или производной строит их внешние символы.

8. SYMBZA(J) – строит внешние символы координат векторного поля и их производных. J – порядковый номер.

9. TOTDF(A,J,K) – вычисляет результат действия на выражение A усеченного до k -го порядка оператора полного дифференцирования по J -й переменной.

I0. EXTENSION(J) – вычисляет J-ю координату продолженного вектора (3).

II. DSEQ( ) – вычисляет дифференциальные следствия и устраняет зависимости между ними.

I2. COEFFS( ) – выделяет определяющие уравнения как коэффициенты при различных степенях "свободных" переменных.

3. Как пользоваться программой. Пример

Необходимо ввести:

N – число независимых переменных;

M – число зависимых переменных;

NE – число уравнений в системе;

KM(1),...,KM(NE) – порядки уравнений,

KMM – максимальный порядок производных в уравнениях;

VR(1),...,VR(N+M) – символы, используемые для обозначения переменных. (Вначале перечисляются независимые переменные);

FF(1),...,FF(NE) – левые части уравнений, записанных в форме F=0.

ORD – требуемый порядок определяющих уравнений.

В качестве примера рассмотрим получение определяющих уравнений I-го порядка для свободного одномерного уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 0 .$$

Вход:

```
N:=2;
M:=1;
NE:=1;
KM(1):=2;
KMM:=2;
VR(1):=X;
VR(2):=T;
VR(3):=F;
FF(1):=I * FT + FXX;
ORD:=1;
```

На выводе будет напечатано:

INPUT SYSTEM

(1) I*FT+FXX=O

DETERMINING EQUATIONS OF THE ORDER 1

(1) -2*I*F"X,FX*FT-2*I*F"F,FX*FT*FX+I*F"T-F"FX,FX*FT^2

+F"X,X+2*F"X,F*FX+FX^2*F"F,F=O

(2) 2*(-I*F"FX,FT*FT+FX*F"F,FT+F"X,FT)=O

(3)F"FT,FT=O

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

DIFFERENTIAL CONSEQUENCES USED

(1) FXX = -I*FT

(2) FXXX = -I*FXT

(3) FXXT = -I*FTT

Литература

1. Fedorova R.N., Kornyak V.V. Determination of Lie-Bäcklund Symmetries of Differential Equations Using FORMAC. //Comput. Phys.Commun. 1985, v. 39, No1, p.93-103.
2. Eliseev V.P., Fedorova R.N., Kornyak V.V. A REDUCE Program for Determining Point and Contact Lie Symmetries of Differential Equations. // Comput. Phys. Commun. 1985, vol. 36, No4, p. 383-389.
3. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983, с.280.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 января 1987 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Корняк В.В., Федорова Р.Н. **Р11-87-19**

REDUCE -программа для вычисления определяющих уравнений симметрий Ли-Беклунда дифференциальных уравнений

Описан алгоритм вычисления симметрий Ли-Беклунда дифференциальных уравнений и его реализация на языке аналитического программирования REDUCE. Приведено описание программы и пример ее использования.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Kornyak V.V., Fedorova R.N. **P11-87-19**

A REDUCE Program to Calculate Determining Equations of Lie-Baecklund Symmetries of Differential Equations

The algorithm to calculate the Lie-Baecklund symmetries of differential equations and its realization in REDUCE language are described. The program is described, and an example of its using is presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987