

8664

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



С172  
ЖС-696

26/6-75

P11 - 8664

Е.П.Жидков, Н.И.Дойников, А.С.Симаков

1819/2-75

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ  
МАГНИТОСТАТИСТИКИ МЕТОДОМ СТАБИЛИЗАЦИИ  
ПО НЕПРЕРЫВНОМУ ПАРАМЕТРУ

**1975**

P11 - 8664

Е.П.Жидков, Н.И.Дойников\*, А.С.Симаков\*

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ  
МАГНИТОСТАТИКИ МЕТОДОМ СТАБИЛИЗАЦИИ  
ПО НЕПРЕРЫВНОМУ ПАРАМЕТРУ

---

\* НИИ ЭФА им. Д.В.Ефремова

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

### Введение

Достоинством метода стабилизации по непрерывному параметру <sup>/1,2/</sup> называемого также непрерывным аналогом метода Ньютона, является сведение достаточно произвольной нелинейной задачи к строгой и сравнительно легко реализуемой на ЭВМ последовательности линейных задач, методы решения которых хорошо разработаны. На ряде физических задач <sup>/3/</sup> приводящих к решению обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений, была практически показана эффективность МНП.

Известно <sup>/4/</sup>, что магнитостатические задачи рассматриваются как краевые для квазилинейного уравнения эллиптического типа. Хотя решение этих задач широко освоено релаксационными методами, все же оно содержит в той или иной мере экспериментальные приемы и рекомендации, удачное использование которых зависит от опыта и интуиции вычислителя (см., например, <sup>/5/</sup>). В этом отношении МНП отличается большей строгостью и от его применения можно ожидать определенных выгод.

В настоящей работе описывается получение алгоритма решения двумерной магнитостатической задачи МНП.

Затем на примере тестовой задачи выясняются особенности применения этого метода и проводится его сопоставление с методом нелиней-

ной верхней релаксации (МНВР).

Наконец, сообщаются результаты численного моделирования полей конкретных электромагнитов. Отмечается высокая эффективность и надежность МНП.

### Постановка задачи и алгоритм решения

I. Осесимметричное магнитостатическое поле <sup>\*</sup> в изотропных средах описывается однокомпонентным векторным потенциалом  $\vec{A}(r, z) = A(r, z)\vec{e}_\varphi$ ,  $r, \varphi, z$  - цилиндрические координаты, согласно уравнению

$$L(r, z) = \frac{\partial}{\partial r} \left[ G \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \frac{4\pi}{c_0} J = 0, \quad (I)$$

где  $G = G(r, z, B^2)$  - величина, обратная магнитной проницаемости,  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  - вектор индукции,  $c_0$  - скорость света,  $\vec{J} = J(r, z)\vec{e}_\varphi$  - вектор плотности тока. Необходимо потребовать также выполнения условия

$$\lim_{\sqrt{r^2+z^2} \rightarrow \infty} A = 0 \quad (2)$$

Согласно МНП, следует предположить  $A = A(r, z, t)$  и составить из (I) уравнение

$$F(r, z, t) = L(r, z, t) + \frac{\partial}{\partial t} L(r, z, t) = 0, \quad (3)$$

предельное решение которого

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(r, z, t) = A^*(r, z)$$

будет искомым решением.

<sup>\*</sup> Постановка пространственной задачи /6/ и построение соответствующего алгоритма аналогичны и не вызывают принципиальных затруднений.

В результате (3) принимает вид

$$F = \frac{\partial}{\partial r} \left[ G \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \frac{4\pi}{c_0} J + \frac{\partial}{\partial r} \left[ G \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial G}{\partial t} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial G}{\partial t} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) = 0, \quad (4)$$

где  $V = \frac{\partial A}{\partial t}$ , (5)

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 2 \frac{\partial G}{\partial (B^2)} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) + \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} \right]. \quad (6)$$

Из (2) и (5) следует

$$\lim_{\sqrt{r^2+z^2} \rightarrow \infty} V = 0 \quad (7)$$

Уравнения (4)-(7) необходимо дополнить начальным условием

$$A(r, z, 0) = A_0(r, z). \quad (8)$$

Система (4)-(8) является полностью определенной. Для момента времени  $t$  уравнение (4) является линейным относительно  $V$ .

2. В общем случае аналитическое решение поставленной задачи не представляется возможным и неизбежен переход к конечным разностям и численному решению. При этом в зависимости от конкретных особенностей задачи необходимо вместо условий (2) и (7) сформулировать условия на конечной границе  $\Gamma$ , охватывающей некоторую область поля и его источники. Практически большинство вариантов охватывается условием /6/

$$\left( \frac{\partial A}{\partial n} + A \right)_\Gamma = F(\tau), \quad (9)$$

$\vec{n}$  и  $\vec{\tau}$ , соответственно, орты нормали и касательной к  $\Gamma$ , которое с учетом (5) дает

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n} + V\right)_\Gamma = 0 \quad (10)$$

Таким образом, граничные условия для  $A$  и  $V$  по типу сходны, а в последнем случае — однородны.

Конечно-разностные уравнения относительно дискретных аналогов  $a$  и  $v$  \*) можно получить непосредственно из (4)–(6), (10), но тогда возникнут значительные трудности в связи с разностной аппроксимацией функции  $g$  и ее производных в окрестности границ раздела разнородных сред. Поэтому целесообразно обратиться к консервативной схеме сквозного счета. Алгоритм решения при этом следует из закона полного тока, примененного в случае прямоугольной сетки (см. рис. I) к элементарному контуру  $\tau_{i,j}$  [7]. Таким образом,

$$\oint_{\tau_{i,j}} g v_\tau d\tau - \tilde{J}_{i,j} K_{i,j} = 0, \quad (11)$$

$$\text{где } \tilde{J}_{i,j} = \frac{\pi \sigma}{c_0} (h_{-0.5}^{(1)} + h_{+0.5}^{(1)}) (h_{-0.5}^{(2)} + h_{+0.5}^{(2)}), \quad (12)$$

$K_{i,j}$  — доля площади внутри  $\tau_{i,j}$ , занятая током; положительные направления тока и обхода контура, а также другие обозначения ясны из рис. I.

Согласно (5), величины  $a_{i,j}$  на соседних временных слоях  $n$ ,  $n+1$  связаны соотношением

$$a_{i,j}^{(n+1)} = a_{i,j}^{(n)} + \Delta v_{i,j}^{(n)} \quad (13)$$

( $\Delta^{(n)} \equiv (\Delta t)_n$  — временной шаг).

\*) В отличие от непрерывных величин их дискретные аналоги обозначаются строчными буквами.

Для упрощения записи индексы  $i, j, n$  будем опускать. Тогда на участке сетки, изображенном на рис. I, функция  $a$  образует матрицу

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{-1,+1} & a_{0,+1} & a_{+1,+1} \\ a_{-1,0} & a & a_{+1,0} \\ a_{-1,-1} & a_{0,-1} & a_{+1,-1} \end{bmatrix},$$

в которой первый индекс соответствует радиальной, а второй — вертикальной координатам.

Аналогично строится матрица функции  $v$ .

С помощью обозначений

$$\xi_\alpha = \text{sign } \alpha \times h_\alpha^{(1)} / 2r, \quad \alpha = \pm 0.5, \quad (14)$$

$$x_\alpha^{(\beta)} = \frac{1 + \beta \cdot 2 \xi_\alpha}{(1 + \xi_\alpha) h_\alpha^{(1)}}, \quad \alpha = \pm 0.5, \beta = -1, 0, +1, \quad (15)$$

$$y_\alpha = 1 / h_\alpha^{(2)}, \quad \alpha = \pm 0.5, \quad (16)$$

компоненты  $\vec{b}$  в средних точках сторон ячеек:  $b_r$  — на вертикалях,

$b_z$  — на горизонталях — запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} b_r(\alpha, \beta) &= \text{sign } \beta \times R_{\alpha, \beta}(\alpha), \\ b_z(\alpha, \beta) &= \text{sign } (-\alpha) \cdot Z_{\alpha, \beta}(\alpha), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где

$$R_{\alpha, \beta}(\alpha) = y_\beta (a_{\alpha, 0} - a_{\alpha, 2\beta}), \quad \alpha = -1, 0, +1, \quad \beta = \pm 0.5 \quad (18)$$

$$Z_{\alpha, \beta}(\alpha) = x_\alpha^{(0)} a_{0, \beta} - x_\alpha^{(2\alpha)} a_{2\alpha, \beta}, \quad \alpha = \pm 0.5, \beta = -1, 0, +1. \quad (19)$$

Квадрат индукции в соседних с узлом  $(i, j)$  ячейках определяется выражением:

$$b_{\alpha,\beta}^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_S^{0,2\alpha} R_{s,\beta}^2 + \sum_S^{0,2\beta} z_{\alpha,s}^2 \right), \quad \alpha = \pm 0.5, \beta = \pm 0.5 \quad (20)$$

В среде с  $G = G(B^2)$  с помощью (20) в каждой ячейке можно вычислить  $b^2$ , а затем  $g$  и  $\rho = \partial G / \partial (B^2) / B^2 = b^2$ .

После несложных вычислений (II) приводится к виду:

$$l(a) = \sum_{\alpha,\beta}^{\pm 0.5} g_{\alpha,\beta}(a) \cdot u_{\alpha,\beta}(a) - 2\tilde{J}K = 0, \quad (21)$$

где  $u_{\alpha,\beta} = h_{\alpha}^{(1)} R_{\alpha,\beta} + h_{\beta}^{(2)} z_{\alpha,0}$ ,  $\alpha = \pm 0.5$ ,  $\beta = \pm 0.5$ . (22)

После дифференцирования (21) по  $t$  определяется дискретный аналог (4):

$$f(a, v) = l(a) + \sum_{\alpha,\beta}^{\pm 0.5} \left\{ g_{\alpha,\beta}(a) u_{\alpha,\beta}(v) + \rho_{\alpha,\beta}(a) u_{\alpha,\beta}(a) \times \right. \\ \left. \times \left[ \sum_S^{0,2\alpha} R_{s,\beta}(a) \cdot R_{s,\beta}(v) + \sum_S^{0,2\beta} z_{\alpha,s}(a) \cdot z_{\alpha,s}(v) \right] \right\} = 0. \quad (23)$$

Уравнение (23) совместно с редукцией к конечным разностям краевого условия (IO) образуют линейную систему алгебраических уравнений относительно  $v_{i,j}^{(n)}$ . Алгоритм решения этой системы методом верхней релаксации будет

$$v^{(m+1)} = v^{(m)} - \omega_m \cdot f^{(m+1,m)} / \frac{\partial f}{\partial v}(a), \quad (24)$$

где  $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \sum_{\alpha,\beta}^{\pm 0.5} \left\{ g_{\alpha,\beta}(a) (h_{\alpha}^{(1)} y_{\beta} + h_{\beta}^{(2)} x_{\alpha}) + \rho_{\alpha,\beta}(a) u_{\alpha,\beta}(a) \times \right. \\ \left. \times [y_{\beta} R_{\alpha,\beta}(a) + x_{\alpha} z_{\alpha,0}(a)] \right\}$ ,

$\omega_m$  - параметр верхней релаксации на  $m$ -том итерационном цикле, подлежащий оптимизации по Янгу и Франкелу /8/.

В рамках рассмотренной схемы могут быть учтены также прямолинейные наклоны границы ферромагнетика (см. рис.1).

## Особенности численного решения

1. Счет можно ускорить, если устранить повторяющиеся вычисления, однако для этого нужна дополнительная память. Для осуществления МНП требуется по крайней мере два массива \* (распределения  $a$  и  $v$ ) против одного -  $a$  в МНВР /9/. Помимо этого, полезно иметь дополнительную оперативную память еще для четырех массивов -  $g(a)$ ,  $\rho(a)$ ,  $l(a)$ ,  $\partial f / \partial v$ , входящих в алгоритм (24) и оставшихся неизменными на каждом временном слое. Таким образом, с учетом "геометрического массива" оптимально организованный по длительности счет нуждается примерно в семикратном увеличении оперативной памяти.

Такой счет вполне осуществим на "БЭСМ-6", если полное число узлов сетки  $M \approx 2000$ . С ростом  $M$ , по-видимому, число вспомогательных массивов придется ограничить. При этом из перечисленных дополнительных массивов предпочтение должно быть отдано  $g(a)$ , как требующему наибольшего счетного времени, особенно в случае анизотропного ферромагнетика.

2. Важной особенностью МНП является также возможность организации оптимального счета по переменной  $t$ . Зная массивы  $a^{(n)}$ ,  $v^{(n)}$  и варьируя  $\Delta^{(n)}$ , с помощью (I3) можно определить  $\Delta_{opt}^{(n)}$ , соответствующее минимуму зависимости

$$L^{(n+1)}(\Delta^{(n)}) \equiv \sum_{i,j} |l_{i,j}^{(n+1)}(a)| \quad (25)$$

и характеризующее оптимальное решение задачи.

Практически оптимизация  $\Delta^{(n)}$  проводилась следующим образом. Величина  $\Delta^{(n)}$  изменялась через одинаковые интервалы (0.05) в направлении уменьшения исследуемой функции (25) до тех пор, пока не наступало ее возрастание. Затем с помощью квадратичной интерполяции \* Кстати, такая же память используется в распространенном т.н. двухступенчатом методе, в котором объединены верхняя (а) и нижняя (д) релаксации /5/.

уточнялось  $\Delta_{opt}^{(n)}$ . Эта процедура может быть проведена на базе любого дополнительного массива.

3. Изложенная ранее методика была применена к решению одной тестовой, с упрощенной зависимостью  $G(B^2)$  задачи, условия которой сформулированы в /I0/. Затем было проведено численное моделирование двух магнитных систем /II/, содержащих ферромагнетик и обладающих вращательной симметрией, на индукции в рабочей области  $B_0 \approx 3 \tau_1(I)$  и  $B_0 \approx 6$  тл (II).

В рассмотренных случаях наблюдалась устойчивая сходимость на всех уровнях невязок, обеспечивая точность решения лучшею, чем  $10^{-4}$ .

МНП представляется надежнее МНВР. В МНВР удается достигнуть оптимизации  $\omega$  в области ферромагнетика лишь после просчета нескольких вариантов данной магнитной системы. Только тогда методы становятся сравнительными по длительности счета.

Уже по решению тестовой задачи на сравнительно крупной сетке (18x17) были видны особенности реализации МНП. Основное время счета составляет решение линейных задач и достаточно малое — нахождение  $\Delta_{opt}^{(n)}$  и продвижение по переменной  $t$ . Однако, как показали численные эксперименты, длительность полного решения задачи можно существенно уменьшить, перейдя к весьма низкой точности

$$T \equiv \frac{1}{\omega_m} \left( \sum_{i,j} |v^{(m+1)} - v^{(m)}|^2 / \sum_{i,j} v^{(m)2} \right)^{1/2} \quad (26)$$

решения линейных задач. Число временных слоев  $n_{max}$  (см. рис.2) остается неизменным, пока  $T < 10^{-2}$ , и редко возрастает при  $T > 10^{-2}$ , становясь сравнительным с полным числом итерационных циклов  $N_{max}$ . Очевидно, что это приводит к росту доли машинного времени, затрачиваемого на временной процесс. Таким образом, оптимальная длитель-

ность решения обеспечивается  $T \approx 10^{-1}$ . Этот вывод убедительно подтвердился также по результатам моделирования электромагнитов.

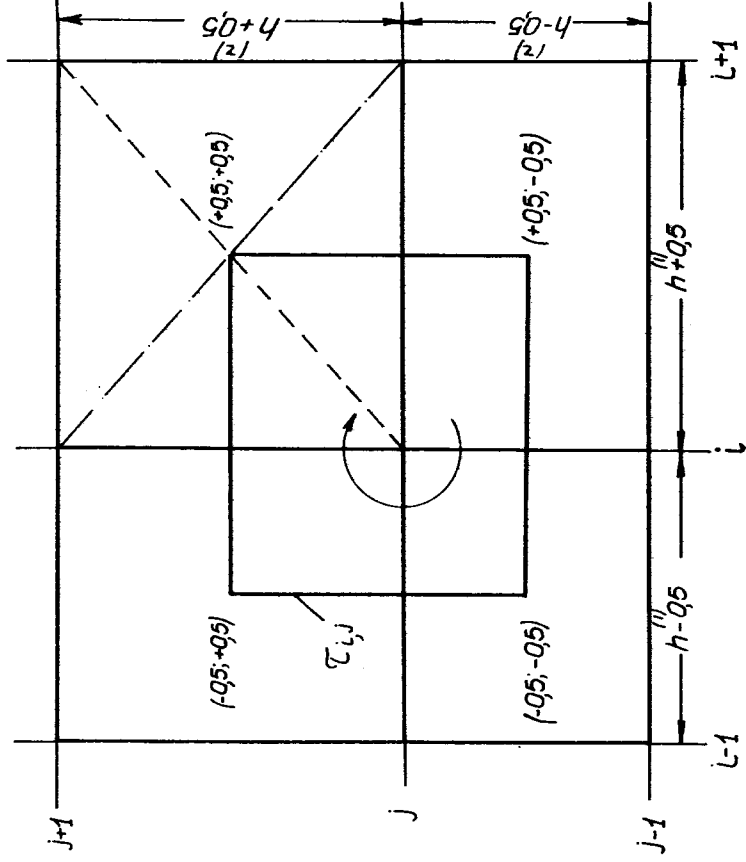
Вместо  $T$  ограничительным параметром в линейных задачах может быть число итераций (5 + 10).

Интересные результаты получены по оптимизации временного процесса. Во всех вариантах тестовой задачи  $\Delta_{opt}^{(n)}$  практически не зависело от  $n$  и оставалось равным  $\Delta_{opt}^{(n)} \approx 1$ .

Иная картина наблюдалась в расчетах реальных магнитных систем I и II:  $\Delta_{opt}^{(n)}$  изменялось в широких пределах (см. рис.3).

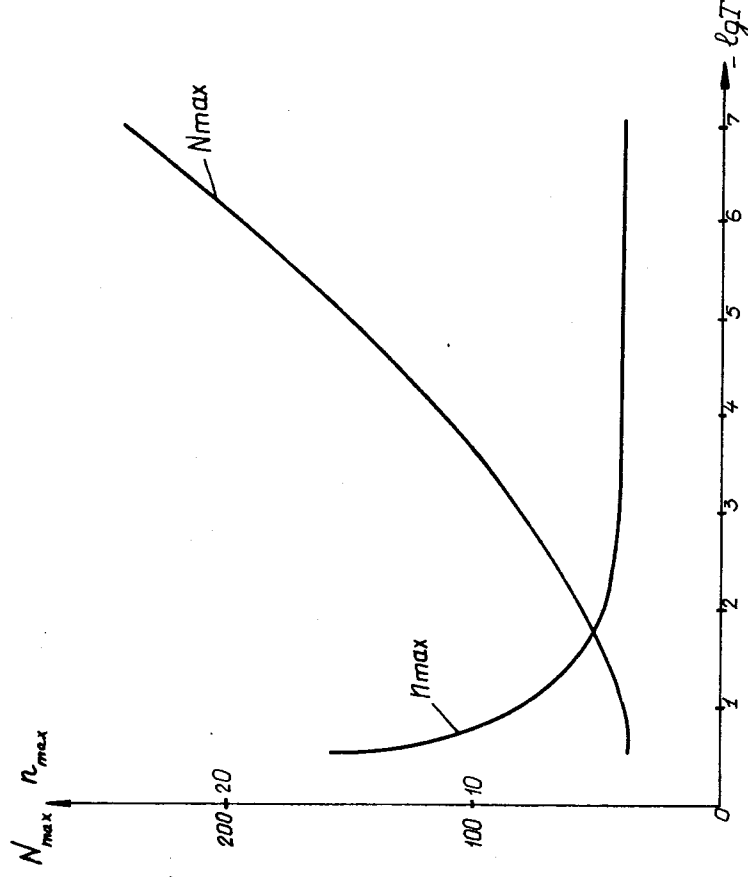
Проводились также эксперименты с  $\Delta^{(n)} = \Delta_c^{(n)} = const$ . Сравнительно различные кривые на рис.4, можно видеть, что при некоторых  $\Delta_c$  счет происходит так же ( $\Delta_c = 0.5$ ) или даже быстрее ( $\Delta_c = 0.75$ ), чем с оптимизацией, что, по видимому, вызвано большим значением  $T$ . Поскольку процесс с  $\Delta_c$  предпочтительнее, то в случае необходимости анализа большого числа вариантов, можно рекомендовать  $\Delta_c = \langle \Delta_{opt}^{(n)} \rangle$ . В частности, в рассмотренном случае  $\langle \Delta_{opt}^{(n)} \rangle = 0.65$ .

В описанных численных экспериментах применение МНП начиналось с некоторого распределения  $\alpha^{(0)}$ . В тестовой задаче им было аналитическое решение при  $G = const$ , а в случае электромагнитов — весьма приближенный результат решения линейной задачи в предположении  $G = const$  в области ферромагнетика. При решении тестовой задачи с нулевыми начальными значениями потенциала во внутренних узлах также не было обнаружено никаких затруднений; счет, однако, продолжался значительно дольше.



12

Рис.1. К выводу разностных уравнений



13

Рис.2. Зависимость полных чисел линейных итераций и временных слоев от точности решения линейных задач.



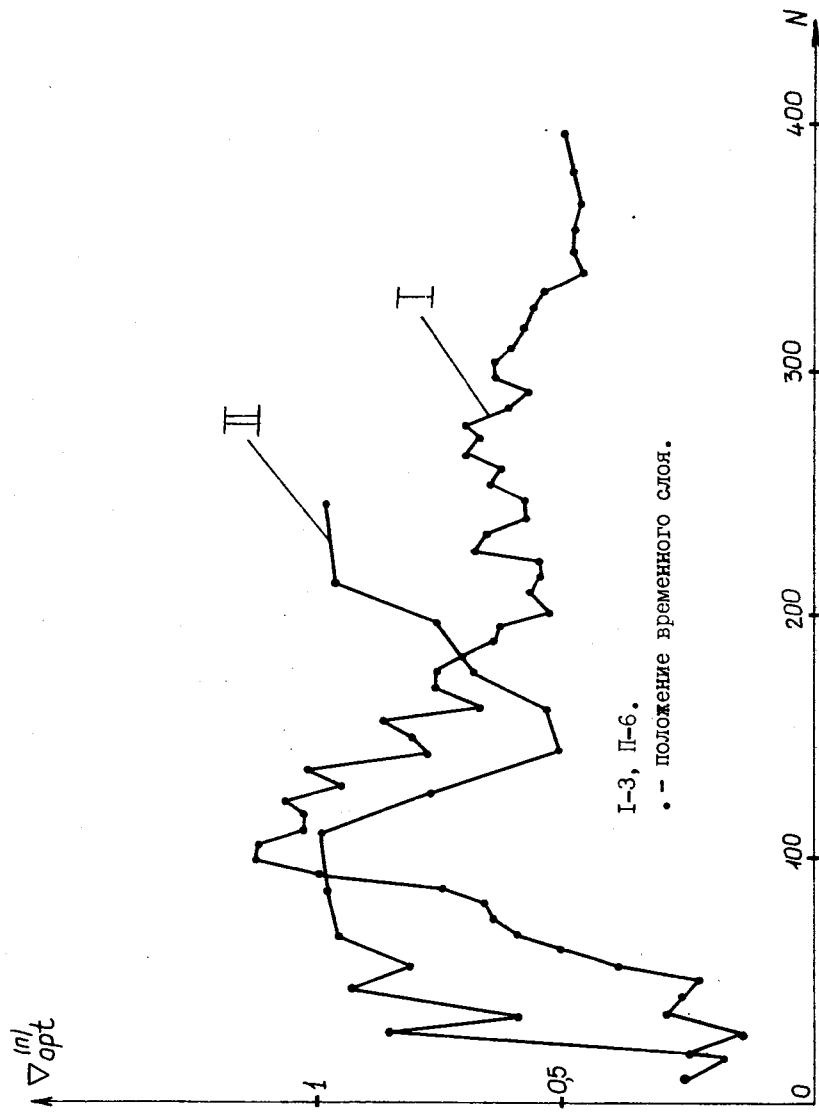


Рис.3. Оптимизация временного процесса для электромагнитов  $Bo$  (тл):

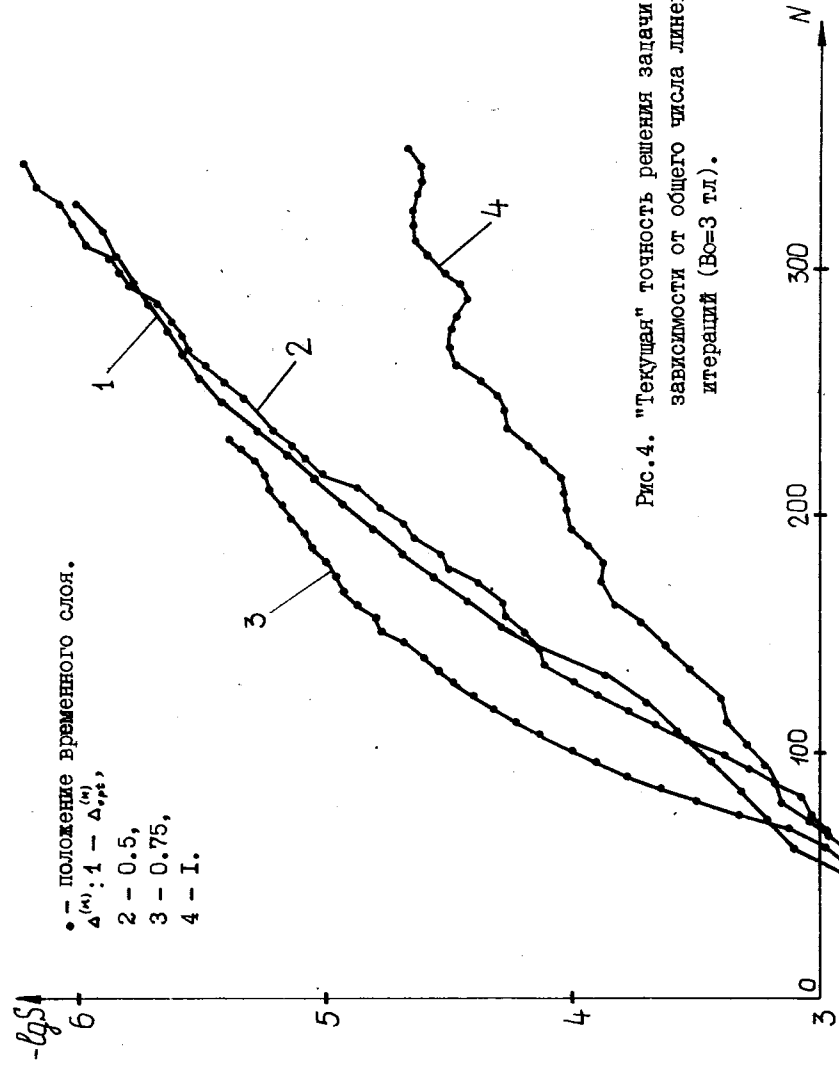


Рис.4. "Текущая" точность решения задачи в зависимости от общего числа линейных итераций ( $Bo=3$  тл).

### ЛИТЕРАТУРА

1. М.К.Гавурин. Изв. ВУЗов. Математика. 5, 18, 1958.
2. Е.П.Жидков, Г.И.Макаренко. ДАН СССР, 187, 723, 1969.
3. Е.П.Жидков, Г.И.Макаренко, И.В.Пузынин. ЭЧАЯ, 4, в.1, 1973.
4. Г.А.Гринберг. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, М-Л, 1948.
5. R. Perin a.S.Van der Meer. CERN 67-7, ISR Div., 1967
6. Н.И.Дойников, А.С.Симаков. ЖВМ и МФ, 13, 999, 1973.
7. Н.И.Дойников, А.С.Симаков. ЖТФ, 39, 1463, 1969.
8. А.М. Winslow. J. Comp. Phys., 1, 149, 1966
9. H. Freundl, K.Reichert, E.A. Erdelyi. Proc. Int.Conf. on Magn. Techn. DESY, Hamburg, 1970, p.210.
- Ю. P. Concus. J. Comp. Phys., 1, 330, 1967.
- II. L. Dreifus. Elektrotech. Maschinenbau, Bd.53, S.20, 1935.

Рукопись поступила в издательский отдел  
6 марта 1975 года.