86-80

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-86-80 e+

Э.А.Айрян*, Е.П.Жидков, Р.В.Полякова,
Б.Н.Хоромский, И.А.Шелаев, И.П.Юдин,
О.И.Юлдашев

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЕТОК ДВУМЕРНЫХ ПОЛЕЙ МАГНИТОВ СИНХРОТРОНА СПИН

* Ереванский физический институт

1986

В работах /1-4/ рассматривались вопросы получения оптимальной по ряду характеристик конфигурации сверхпроводящих (СП) магнитов – СП диполя и СП квадруполя регулярного периода СП синхротрона СПИН /5,6/ на энергию 1,5 ГэВ по протонам, сооружаемого в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ. В данной работе используются численные алгоритмы расчетов на последовательности сеток для исследования с высокой точностью нелинейных эффектов – зависимости распределения поля от тока в СП обмотке с учетом насыщения железного сердечника. Расчеты проводились с помощью комплекса программ GRIDS /7/, реализующего указанные алгоритмы для решения двумерных задач магнитостатики в магнитах прямоугольной конфигурации. Комплекс фортран-программ GRIDS реализован на ЭВМ CDC-6500, БЭСМ-6, ЕС-1060 и ЕС-1061 ОИЯИ. Проведено сравнение с результатами /1-4/, полученными с помощью пакета программ POISSON /8,9/, интенсивно используемого во многих лабораториях мира для проектирования магнитов.

1. Постановка краевой задачи

Известно /10,11/, что распределение однокомпонентного векторного потенциала $\mathcal{U}(x, y)$ стационарного двумерного магнитного поля задается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}\right) = -j(x,y) \quad , \qquad (1)$$

где x, y принадлежат плоскости XOY; j – плотность тока; $\nu = \frac{1}{\mu}$, $\mu = \mu(|grad\ \mathcal{U}|)$ – величина магнитной проницаемости. Уравнение (1) обычно получают из системы уравнений Максвелла $rot\ \bar{H} = \bar{j}$, $div\ \bar{B} = 0$ и $\bar{B} = \mu \cdot \bar{H}$, если ввести векторный потенциал $\bar{A}$ соотношением $\bar{B} = rot\ \bar{A}$ и предположить, что

$$A_z = \mathcal{U}(x,y) \quad , \quad A_x = A_y = 0$$
$$j_z = j(x,y) \quad , \quad j_x = j_y = 0 \; .$$

Здесь $\bar{H}$ – напряженность, а $\bar{B}$ – индукция магнитного поля. Предполагается, что токи замкнуты или (для двумерного случая) сумма токов равна нулю: $\int_{R_2} j \cdot dx \cdot dy = 0$.

Для рассматриваемых ниже синхротронных магнитов прямоугольной конфигурации область решения уравнения (1) разбивается (см. рис. 1) на внешнюю Ω_e и внутреннюю Ω_I, кото-

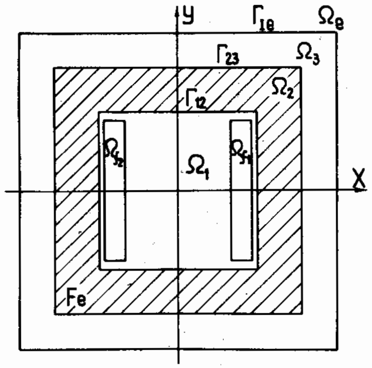

Рис. I. Расчетная область магнитостатической задачи.

рая, в свою очередь, разбивается на Ω_1 – область, ограниченную железным сердечником, внутри которой располагаются области с токами: Ω_{f_1}, Ω_{f_2} и т.д., где $\mu = 1$; Ω_2 – область, занимаемую железным сердечником, $\mu = \mu(B)$; Ω_3 – область вне железного сердечника, $\mu = 1$. Нелинейная функция μ задана в виде /3/ табличной зависимости $\mu = \mu(B)$.

На границе раздела двух областей выполнены условия сопряжения. Например, для Ω_1 и Ω_2 на границе Γ_{12}:

$$U_1(\xi) = U_2(\xi), \quad \frac{\partial U_1(\xi)}{\partial n} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial U_2(\xi)}{\partial n}, \quad \xi \in \Gamma_{12}. \qquad (2)$$

Таким образом, дополняя уравнение (I) условиями сопряжения потенциала на границе разнородных сред и условием

$$U(\infty) = 0, \qquad (3)$$

получим краевую задачу для определения потенциала. Из соотношений $|\bar{B}| = |\mathrm{rot}\,\bar{A}| = |\mathrm{grad}\,U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2}$ и $\frac{1}{\mu}\bar{B} = \bar{H}$ можно рассчитать распределение магнитного поля. Отметим, что при наличии осей симметрии в расчетной области задачу целесообразно решать в соответствующей подобласти, ставя на линиях симметрии соответствующие условия. Так, для рассматриваемых в данной работе дипольного (рис.5) и квадрупольного (типа линзы Пановского)(рис.8) магнитов краевая задача решалась в первой четверти плоскости (см. рис.3 и рис.4). Для диполя условия симметрии требуют на оси Y $U(0,y) = 0$ и $\frac{\partial U(x,0)}{\partial n} = 0$ на оси X. Для квадруполя эти условия: $\frac{\partial U(0,y)}{\partial n} = 0$ на оси Y и $\frac{\partial U(x,0)}{\partial n} = 0$ на оси X.

Обычно /3,4,8,9/ условие (3) заменяется условием на некоторой вспомогательной границе Γ_{Ie}

$$U(\xi) = 0, \quad \xi \in \Gamma_{Ie}. \qquad (4)$$

В настоящей работе представлены результаты расчетов, полученных как с использованием условия типа (4), так и на основе методики, предназначенной для точного учета условия (3) при помощи ГИУ.

2. Метод решения

Пусть область Ω_I содержится в прямоугольнике П, заключенном внутри границы Γ_1. Уравнение (I) заменяется задачей отыскания трех функций V_1, V_2, U_2, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}\,(\nu(|\mathrm{grad}\,U_2|)\cdot \mathrm{grad}\,U_2) = f_2(\xi), && \xi \in \Omega_I\\
&\Delta V_1 = f_1(\xi), && \xi \in \Pi \setminus \Omega_I\\
&V_1(\xi) = U_2(\xi), \quad \nu(|\mathrm{grad}\,U_2|)\cdot\frac{\partial U_2}{\partial n} = \frac{\partial V_1}{\partial n}, && \xi \in \Gamma_{23}\\
&U_1(\xi) = V_2(\xi), \quad \frac{\partial V_1}{\partial n} = \frac{\partial U_2}{\partial n}, && \xi \in \Gamma_1\\
&(E+K)\cdot V_2 - L\cdot\frac{\partial V_2}{\partial n} = \Phi_1(\xi), \quad \xi \in \Gamma_1, && \Gamma_1 \cap \Gamma_{Ie} = \varnothing .
\end{aligned} \qquad (5)$$

Здесь интегральные операторы K и L определены на контуре Γ_I и заданы соотношениями

$$KZ = \int_{\Gamma_1} K(t,s)\cdot Z(s)\,ds, \quad LZ = \int_{\Gamma_1} \mathcal{L}(t,s)\cdot Z(s)\,ds, \quad t \in \Gamma_1,$$

$$\mathcal{L}(t,s) = \frac{1}{\alpha(t)}\ln z^{-1}(t,s), \quad K(t,s) = \frac{1}{\alpha(t)}\cdot\frac{\partial}{\partial n_s}\ln z^{-1}(t,s);$$

$z(t,s)$ – расстояние между точками t и s, $\alpha(t)$ – угол между отрезками границы, выходящими из точки t, $\alpha(\xi) = 2\pi$, $\xi \in \Pi \setminus \Omega_I$.

Если же пересечение $\Gamma_I \cap \Gamma_2 = \Gamma_0$ не пусто, то в системе (5) условие $\frac{\partial V_1}{\partial n} = \frac{\partial V_2}{\partial n}$, $\xi \in \Gamma_1$ заменяется следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}
&\nu(|\mathrm{grad}\,U_2|)\frac{\partial U_2}{\partial n} = \frac{\partial V_2}{\partial n}, && \xi \in \Gamma_0\\
&\frac{\partial V_1}{\partial n} = \frac{\partial V_2}{\partial n}, && \xi \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_0,
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

вытекающими из системы (5). Обозначим

$$U(\xi) = \begin{cases} U_2(\xi), & \xi \in \Omega_I\\ V_1(\xi), & \xi \in \Pi \setminus \Omega_I \end{cases}, \quad f(\xi) = \begin{cases} f_2(\xi), & \xi \in \Omega_I,\\ f_1(\xi), & \xi \in \Pi \setminus \Omega_I. \end{cases}$$

Итерационный процесс, используемый в /7/ для решения (5), имеет вид (задано $U^k(\xi)$, $\xi \in \Gamma_1$, вычисляем $U^{k+1}(\xi)$, $\xi \in \Gamma_1$):

$$GU = f(\xi), \quad \xi \in \Pi, \quad U(\xi) = U^k(\xi), \quad \xi \in \Gamma_1 \qquad (7а)$$

$$V^{k+1} = \frac{\partial U}{\partial n}, \quad \xi \in \Gamma_1 \qquad (7б)$$

$$(E+K)U^{k+1/2} - L(\nu(|\mathrm{grad}\,U|)\cdot V^{k+1}) = \Phi_1(\xi), \quad \xi \in \Gamma_1 \qquad (7в)$$

$$U^{k+1} = (1-\tau)U^k + \tau\cdot U^{k+1/2}, \quad 0 < \tau < 1 \qquad (7г)$$

Здесь дифференциальный оператор G определяется в области П, согласно (5).

Имеется возможность на первом шаге процесса (7) ставить смешанное краевое условие

$$\frac{\partial U}{\partial n} + \alpha\cdot U = \beta, \quad \xi \in \Gamma_1, \qquad (8)$$

аналогично /I2/. В результате необходимо, вообще говоря, многократно решать краевую задачу (7а) и, может быть, граничное интегральное уравнение (ГИУ) (7в). В ряде задач достаточно ограничиться лишь однократным решением задачи (7в). Некоторые вопросы, связанные со сходимостью процесса (7), изложены в работах /7,I3/.

3. Дискретизация задачи (5)

Вопросы дискретизации граничного интегрального уравнения (ГИУ) (7в) изложены, например, в работе /I4/. Для разностной аппроксимации краевой задачи построим в расчетной области неравномерную сетку с прямоугольными ячейками

$$\Omega=\{(x_i,y_i);\ x_{i+1}=x_i+h^x_{i+1},\ y_{j+1}=y_j+h^y_{j+1},\quad i=1,2,\dots,M,\quad j=1,2,\dots,N\}.$$

Предполагается, что границы расчетной области и внутренние границы раздела сред с различными характеристиками являются узловыми линиями. Искомая сеточная функция U_{ij} определена в узлах сетки Ω. На рис.2 изображена ячейка сетки, окружающая внутренний узел со значениями векторного потенциала U_{ij}. Интегрируя равенство (7а) в пределах элементарной ячейки и применяя формулу Грина, получим /I5/, считая в пределах одной ячейки постоянными магнитную проницаемость μ и плотность тока j,

$$\oint_{\ell}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot j-\frac{\partial U}{\partial y}\cdot i\right)\cdot d\vec{\ell}=\iint_S f(x,y)\,dx\,dy, \tag{9}$$

где ℓ – граница, а S – площадь ячейки. Используя для вычисления интегралов формулы прямоугольников и заменяя при этом производные, входящие в (9), их разностными аналогами, получим систему нелинейных уравнений для определения сеточной функции U_{ij}:

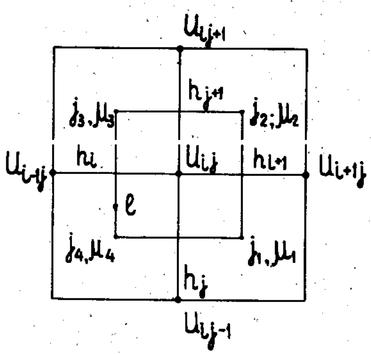

Рис.2. Ячейка (пятиточечная схема) сетки, окружающая внутренний узел со значением векторного потенциала U_{ij}.

$$\left(\frac{h_i}{\mu_4}+\frac{h_{i+1}}{\mu_1}\right)\frac{U_{ij}-U_{ij-1}}{h_j}+\left(\frac{h_i}{\mu_3}+\frac{h_{i+1}}{\mu_2}\right)\frac{U_{ij}-U_{ij+1}}{h_{j+1}}+\left(\frac{h_j}{\mu_4}+\frac{h_{j+1}}{\mu_3}\right)\frac{U_{ij}-U_{i-1j}}{h_i}+$$
$$\left(\frac{h_{j+1}}{\mu_1}+\frac{h_j}{\mu_2}\right)\frac{U_{ij}-U_{i+1j}}{h_{i+1}}-\frac{1}{2}\cdot F_{ij}\equiv\Phi U_{ij}=0, \tag{I0}$$

где $F_{ij}=J_1\cdot h_{i+1}h_j+J_2\cdot h_{i+1}\cdot h_{j+1}+J_3\cdot h_i\cdot h_{j+1}+J_4\cdot h_i\cdot h_j$; $h^x_i\equiv h_i$, $h^y_j\equiv h_j$.

Значение магнитной проницаемости $\mu=\nu^{-1}$ в каждой элементарной ячейке вычисляется через значения векторного потенциала в вершинах ячейки (см. рис. 2). Например, значение μ_1 можно вычислить по формуле

$$\mu_1=\mu(|\mathrm{grad}\,U|)=$$
$$=\mu\left(\left[\left(\frac{U_{i+1j}+U_{i+1j+1}-U_{ij}-U_{ij-1}}{2h_{i+1}}\right)^2+\left(\frac{U_{i+1j}+U_{ij}-U_{i+1j+1}-U_{ij-1}}{2h_j}\right)^2\right]^{1/2}\right).$$

Для решения системы разностных уравнений (I0) применяем двухступенчатый итерационный процесс, когда циклы последовательной верхней релаксации при расчете потенциала чередуются с нижней релаксацией для магнитной проницаемости μ.

$$U^{k+1/2}_{ij}=\left(\alpha_1 U^k_{i+1j}+\alpha_2\cdot U_{ij+1}+\alpha_3\cdot U^{k+1}_{i-1j}+\alpha_4\cdot U^{k+1}_{ij-1}+\frac{1}{2}\cdot F_{ij}\right)\Big/(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$$
$$U^{k+1}_{ij}=(1-\omega_k)\cdot U^k_{ij}+\omega_k\cdot U^{k+1/2}_{ij},\qquad \omega_k\geq 1,$$
$$\nu^{k+1}_j=(1-\eta_k)\cdot\nu^k_j+\eta_k\cdot\nu^{k+1/2}_k;\quad \nu_j=\frac{1}{\mu_j},\ j=1,2,3,4,\ \eta_k\leq 1 \tag{II}$$
$$\alpha_1=\frac{1}{h_{i+1}}\left(\frac{h_{j+1}}{\mu_1}+\frac{h_j}{\mu_2}\right);\quad \alpha_2=\frac{1}{h_{j+1}}\left(\frac{h_i}{\mu_3}+\frac{h_{i+1}}{\mu_2}\right);$$
$$\alpha_3=\frac{1}{h_i}\left(\frac{h_j}{\mu_4}+\frac{h_{j+1}}{\mu_3}\right);\quad \alpha_4=\frac{1}{h_j}\left(\frac{h_i}{\mu_4}+\frac{h_{i+1}}{\mu_1}\right).$$

Оптимальное значение параметра верхней релаксации ω_k выбирается из интервала (0,2) по схеме, рассмотренной, например, в работах /I6,I7/. Как правило, в каждой среде выбирается свой параметр релаксации. Проделав некоторое количество итераций, пересчитываем значения магнитной проницаемости с последующей нижней релаксацией. Значение параметра нижней релаксации выбирается из интервала (0,I) в процессе численных расчетов /I8/. Итерации (II) прекращаются при выполнении условия

$$\sum_{i,j}|U^k_{ij}-U^{k-1}_{ij}|\Big/\sum_{i,j}|U^k_{ij}|<\varepsilon. \tag{I2}$$

4. Решение на последовательности сеток

При ускорении сходимости итерационных процессов численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений и ГИУ, одной из плодотворных идей оказалось применение вспомогательных сеток и рассмотрение на них систем конечно-разностных уравнений, соответствующих различным дискретизациям исходной задачи (см. например /I9/). В настоящей работе использован подход, при котором решение задачи сначала ищется на нескольких вспомогательных сетках, где каждый раз с помощью интерполяции определяется начальное приближение в узлах более мелкой сетки. Итерационный процесс заканчивается на последней сетке, где число итераций типа (II) уже невелико.

Опишем преимущества данного подхода на примере расчета поля дипольного магнита (см. рис. 5). Расчет проводился на двух вспомогательных сеточных областях: сначала на сетке из 2Iх2I узлов, затем на сетке из 4Iх4I узлов. Основная сетка была 8Iх8I узлов. На рис. 3 приведена логическая диаграмма I/4 диполя – расчетная сетка из 2Iх2I узлов. На рис. 4 показана эта же расчетная сетка, но в реальном масштабе. Как видно из рисунка, шаг этой сетки существенно неравномерный. При переходе на следующую более мелкую сетку (4Iх4I) и далее шаг сетки уменьшался в два раза.

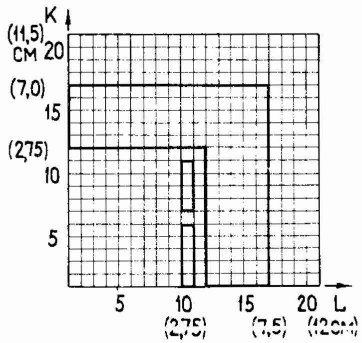

Рис.3. Расчетная сетка (логическая диаграмма) I/4 части магнита.

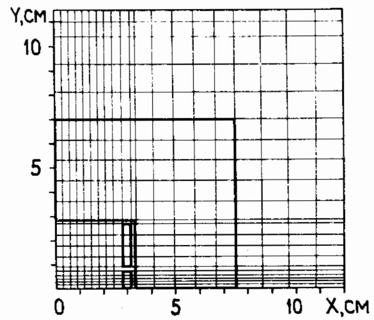

Рис. 4. Расчетная сетка I/4 части магнита в реальном масштабе.

При точности расчета $\varepsilon = 10^{-5}$ на сетке 8Iх8I узлов при обычной организации расчетов в методе верхней релаксации требуется 360 итераций и 768с времени центрального процессора CDC-6500. При многосеточном алгоритме, т.е. расчете по последовательности сеток (2Iх2I) $\rightarrow$ (4Iх4I) $\rightarrow$ (8Iх8I) на последней сетке затрачивается 38 итераций и 360с времени процессора. Эти величины характерны для малых токов в обмотке, т.е. для больших μ в области с железом. Подробнее см. таблицу в работе /7/. Зависимость числа итераций от правой части уравнения (I) (показана зависимость от величины тока в одном витке СП обмотки) при многосеточной организации расчетов приведена в таблице I. Сравнения показывают, что при выполнении расчетов при одинаковых количествах расчетных точек по программе GRIDS /7/ нужно в 5 раз, а для достижения одинаковой точности более чем в I0 раз меньше времени ЭВМ, чем по программе POISSON /9/.

Таблица I. Зависимость числа итераций от правой части уравнения (I) при многосеточной организации расчетов. N – число узлов сетки. I – ток в одном витке СП обмотки диполя

	N \ I,A	I000	II00	I200	I300	I400	I500	I600	I700	I800	I900
$\varepsilon = 10^{-5}$	2Iх2I	237	2I5	207	2II	I67	I82	I78	I69	I62	I56
	4Iх4I	56	50	70	43	4I	46	50	52	45	56
	8Iх8I	2I	40	33	25	35	223	38	39	29	6I
$\varepsilon = 10^{-6}$	2Iх2I		306	257	254	223	2I4	2I9	2II	202	I90
	4Iх4I		209	I99	I30	96	I03	79	I30	87	I29
	8Iх8I		298	I86	II7	I48	427	II9	I23	I26	I44

5. Расчет распределения магнитного поля дипольного СП магнита синхротрона СПИН

В данной работе используем алгоритм расчетов на последовательности сеток для исследования с высокой точностью нелинейных эффектов – зависимости распределения поля от величины тока в СП обмотке магнита с учетом насыщения железного сердечника. На рис. 5 показана конфигурация поперечного сечения сверхпроводящего дипольного магнита регулярного периода сверхпроводящего синхротрона СПИН Лаборатории высоких энергии ОИЯИ. Железный экран магнитов синхротрона СПИН изготовлен из стали Fe + 3,25% Si. Зависимость магнитной проницаемости μ от величины магнитной индукции B приведена на рис. 2 и в табл.I работы /3/.

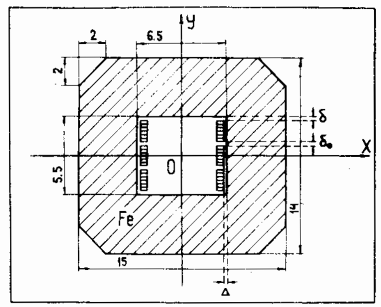

Рис. 5. Конфигурация СП диполя. Размеры даны в (см).

Вследствие симметрии данной конфигурации магнита (с осями симметрии $X = 0$ и $Y = 0$) расчеты проводились на одной четверти исходной конфигурации. На осях $X = 0$ и $Y = 0$ ставятся однородные условия Дирихле ($U = 0$) и Неймана ($\frac{\partial u}{\partial n} = 0$) соответственно. Вычисление потенциала проводилось по последовательности из трех неравномерных сеток ω_1, ω_2, ω_3. На рис. 3 и 4 изображена расчетная сетка ω_1. Сетки ω_2 и ω_3 получаются путем деления пополам всех ячеек ω_1 и ω_2 соответственно. Решаем систему (I0) с помощью (II). Критерием окончания итерационного процесса является выполнение условия (I2), где К- номер итераций. В наших расчетах ε бралось 10^{-6}.

Многосеточная организация расчетов помимо ускорения итерационного процесса (II) позволяет контролировать точность расчетов с помощью анализа величин $(u_1 - u_2)/(u_2 - u_3)$, где u_1, u_2, u_3 – найденные значения потенциала на сетках ω_1, ω_2, ω_3. После нахождения векторного потенциала в узлах сетки ω имеется возможность определения его значений в произвольно заданных точках внутри апертуры. Пересчет в точку (x_0, y_0) производится с помощью формулы Грина

$$u(x_0,y_0)=\int\limits_{\Gamma_2} K(x_0,y_0,x,y)\cdot\hat{u}(x,y)\,dS-\int\limits_{\Gamma_2} L(x_0,y_0,x,y)\frac{\partial\hat{u}}{\partial n}\,dS\;, \qquad (I3)$$

где Γ_2 – прямоугольник, стороны которого проходят через узловые линии сетки ω, K, L – определены выше, а $\hat{u}$ и $\frac{\partial\hat{u}}{\partial n}$ – кусочно линейные восполнения сеточных функций u_{ij} и $\frac{\partial u_{ij}}{\partial n}$ на сторонах сеточного контура Γ_2.

Для исследования компонент магнитного поля используем его фурье-представление, которое для дипольного магнита имеет вид /I,I0/

$$H_y(r,\theta)=H_1\cdot\Big[1+\sum_{n=3,5,7,\ldots} C_n\cdot(r/r_0)^{n-1}\cdot\cos((n-1)\cdot\theta)\Big]\;, \qquad (I4)$$

где r и θ – полярные координаты, $H_1 \equiv B_1$ – величина среднего поля, $C_n = H_n/H_1$. Для вычисления гармоник C_n произведем пересчет значений потенциала с сеточных линий на требуемый радиус r_0 = 2,5 см с помощью формулы (I3) с шагом по переменной θ, равным 9°. Далее H_n вычисляется по формуле $H_n = \frac{n\cdot A_n}{r_0}$, где

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(r,\theta)\cdot\cos n\theta\cdot d\theta\;. \qquad (I5)$$

Отметим, что такой алгоритм пересчета позволяет учесть гармонические свойства решений в большей части апертуры и сохранить необходимые свойства гладкости.

На рис. 6 и рис. 7 приведена полученная зависимость величин среднего поля B_I и относительных гармоник поля C_n от значений тока I в одном витке СП обмотки для интервала I = 500 ÷ 2500 А. Эти кривые показывают, что функция $B_I = B_I(I)$ становится нелинейной и величины $C_n = C_n(I)$ перестают быть константами при значениях величины тока в СП обмотке больше I,5 кА. При токе до I,5 кА поле имеет высокую степень однородности. В таблице 2 приведены результаты расчетов величин амплитуд гармоник СП диполя на трех сетках ω_1, ω_2, ω_3 с размерностями 2Iх2I, 4Iх4I и 8Iх8I соответственно. Анализ данных результатов позволяет сделать вывод о том, как уточняются приближен-

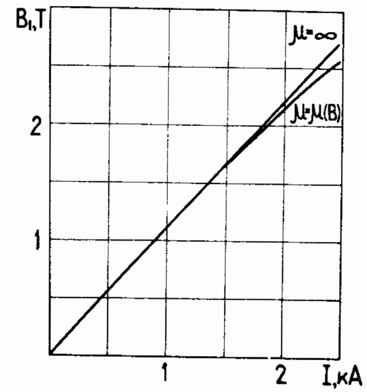

Рис. 6. Зависимость величины дипольной составляющей поля от тока в СП витке обмотки.

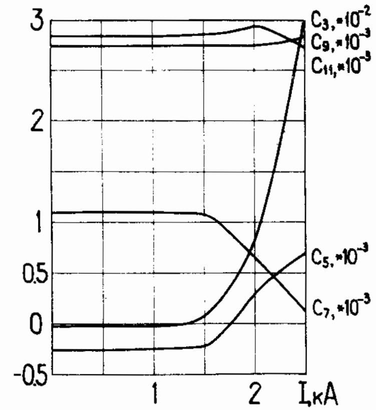

Рис. 7. Величины C_n на радиусе r_0 = 2,5 см в зависимости от тока в витке СП обмотки диполя.

Таблица 2. Величины B_I и C_n на радиусе r_0 = 2,5 см. Сравнение результатов, полученных с помощью GRIDS на различных сетках: I – сетка из 2Iх2I узлов, II – сетка из 4Iх4I узлов, III – сетка из 8Iх8I узлов

I,A	Сетка	B_I,T	C_3,%	C_5,%	C_7,%	C_9,%	C_{11},%	C_{13},%
500	I	0,54826	–0,002	–0,00I	0,I86	0,378	0,357	0,I89
	II	0,54826	–0,005	–0,024	0,II9	0,267	0,298	0,I9I
	III	0,54825	–0,005	–0,026	0,II0	0,27I	0,284	0,I85
I500	I	I,64297	0,067	–0,006	0,I84	0,377	0,356	0,I89
	II	I,64267	0,074	–0,020	0,II5	0,288	0,298	0,I9I
	III	I,64263	0,073	–0,022	0,I06	0,27I	0,284	0,I86
2500	I	2,58777	2,833	0,5I9	–0,007	0,097	0,873	–0,32I
	II	2,59783	2,95559	–0,044	0,II4	0,243	0,328	0,205
	III	2,59456	2,98087	0,07I	0,0I0	0,28I	0,269	0,249

ные решения при переходе к счету на более мелкой сетке при различных токах. В таблице 3 приведены результаты численных экспериментов по исследованию зависимости B_I и C_n от расстояния между сеточными линиями, с которых пересчитывается потенциал на радиус r_0 = 2,5 см, и токовыми обмотками. Заметим, что аналогичное исследование с помощью программы POISSON /9/ дало большой разброс величин B_I и C_n, вычисленных /3/ на разных радиусах r_0, что, возможно, связано с ошибками интерполирования при пересчете значений потенциала. В таблице 4 приведено сравнение результатов расчетов, выполненных с помощью комплекса программ GRIDS, программы MIC 2 /I/ и пакета программ POISSON.

<u>Таблица 3</u>. Величины B_I и C_n на радиусе $r_0 = 2,5$ см, полученные с использованием потенциала с разных сеточных линий, удаленных на n шагов от токовой области

I,A	n	B_I,T	C_3,IO^{-4}	C_5,IO^{-3}	C_7,IO^{-2}	C_9,IO^{-2}	C_{II},IO^{-2}	C_{I3},IO^{-2}
500	I	0,54826	–0,540	–0,256	0,II02	0,27I0	0,2837	0,I854
	2	0,54825	–0,606	–0,257	0,III	0,272	0,285	0,I86
	3	0,54824	–0,625	–0,258	0,III	0,273	0,286	0,I87
	4	0,54824	–0,638	–0,259	0,III	0,273	0,286	0,I87
	5	0,54824	–0,648	–0,259	0,II2	0,274	0,287	0,I87
	6	0,54824	–0,657	–0,259	0,II2	0,275	0,287	0,I87
2500	I	0,25946	298,03	0,7II	0,0I0	0,28I	0,268	0,249
	2	0,25946	297,97	0,7I0	0,0II	0,282	0,270	0,250
	3	0,25946	297,96	0,7I0	0,0II	0,283	0,27I	0,250
	4	0,25946	297,96	0,7I0	0,0I2	0,284	0,27I	0,25I
	5	0,25946	297,96	0,7II	0,0I2	0,285	0,272	0,25I
	6	0,25946	297,96	0,7II	0,0I3	0,286	0,273	0,25I

<u>Таблица 4</u>. Величины B_I и C_n (%) (на радиусе $r_0 = 2,5$ см) в зависимости от тока в одном витке СП обмотки. Сравнение результатов, полученных с помощью программ MIC 2/I/, POISSON и GRIDS (сетка 8Iх8I узлов)

I,A		B_I,T	$\frac{B_1}{I}$, $\frac{T}{A}$	C_3,%	C_5,%	C_7,%	C_9,%	C_{II},%
500	MIC2	0,54797	I0,9594	–0,0I5	–0,026	0,II0	0,273	0,285
	POI	0,548I4	I0,9628	–0,000	–0,0I6	0,I35	0,265	0,079
	GRID	0,54824	I0,9648	–0,007	–0,026	0,II2	0,274	0,287
I000	POI	I,0963	I0,963	–0,003	–0,0I2	0,I34	0,266	0,078
	GRID	I,0965	I0,965	–0,007	–0,024	0,II2	0,275	0,287
I500	POI	I,64I2	I0,94I3	0,I02	0,007	0,I28	0,264	0,08I
	GRID	I,6426	I0,9507	0,072	–0,022	0,I08	0,275	0,288
2000	POI	2,I443	I0,72I5	I,I64	0,099	0,084	0,277	0,056
	GRID	2,I6I9	I0,8095	0,793	0,030	0,064	0,276	0,296
2500	POI	2,5796	I0,3I84	2,768	0,369	–0,0II	0,244	0,I25
	GRID	2,5945	I0,3780	2,9799	0,070	0,0I2	0,285	0,273

Во всех приведенных выше расчетах для нахождения векторного потенциала решалась краевая задача (I) с условием (4), что соответствует первому шагу итерационного процесса (7а) – (7в), т.е. однократному решению задачи (7а).

Для исследования влияния на потенциал и амплитуды гармоник поля точного краевого условия (3) ($U(\infty) = 0$ вместо $U_\Gamma = 0$) были проделаны несколько шагов итерационного процесса (7а) – (7в). В таблице 5 приведены величины B_1^∞ и C_n^∞, полученные с учетом условия (3); в скобках приведены значения разностей $B_I^\infty - B_I$, $C_n^\infty - C_n$, где B_I^∞ и C_n^∞ получены при точном учете условий на "бесконечности". Аппроксимация краевой задачи во внешней области Ω_e проводилась с помощью ГИУ. Сравнение показывает, что для больших значений токов точный учет условия (3) дает заметное улучшение результатов. Отметим, что точный учет краевых условий на бесконечности является еще более существенным при расчете открытых систем.

<u>Таблица 5</u>. Сравнение величин B_I и C_n на радиусе $r_0 = 2,5$ см для двух способов учета краевого условия $U(\infty) = 0$

I,A	B_I,T	C_3,%	C_5,%	C_7,%	C_9,%	C_{II},%
500	0,54826 (0,0000I)	–0,0048 (0,0022)	–0,0235 (0,0025)	0,I200 (0,0080)	0,2872 (0,0I32)	0,2979 (0,0I09)
I000	I,09655 (0,0005)	–0,0058 (0,00I2)	–0,0222 (0,00I8)	0,II96 (0,0076)	0,2874 (0,0I24)	0,2978 (0,0I08)
2000	2,I6336 (0,00I46)	0,7725 (–0,0205)	0,0I05 (–0,0I95)	0,0806 (0,0I66)	0,2900 (0,0I40)	0,305I (0,009I)
3000	3.00I33 (0,0I045)	4,4I44 (0,09I7)	0,3626 (0,0245)	–0,II78 (–0,007I)	0,26I4 (0,0003)	0,3402 (–0,0008)

6. <u>Расчет распределения магнитного поля квадрупольного СП магнита синхротрона СПИН</u>

На рис. 8 показана конфигурация поперечного сечения СП квадруполя типа линзы Пановского. Исследуемый квадруполь является структурным элементом регулярного периода СП синхротрона СПИН. Симметричность квадруполя позволяет вычислять потенциал в одной первой четверти рассматриваемого магнита. На осях $X = 0$ и $Y = 0$ ставились однородные условия Неймана ($\frac{\partial u}{\partial n} = 0$). Расчеты проводились на последовательности сеток ω_1, ω_2, ω_3 с размерностями 2Iх2I, 4Iх4I и 8Iх8I соответственно. Организация вычислений была аналогичной приведенной выше для дипольного магнита.

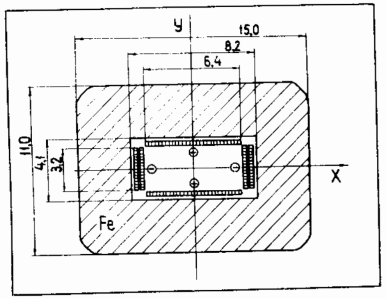

Рис. 8. Конфигурация СП квадруполя. Размеры даны в (см).

Компоненты магнитного поля выражались в полярных координатах с помощью фурье-представления. Например, для компоненты H_y

$$H_y(r,\theta)=H_2\Big[\cos\theta+\sum_{n=4,6,8,\dots} C_n\cdot(r/r_0)^{n-1}\cdot\cos((n-1)\cdot\theta)\Big]. \quad (I6)$$

Здесь $H_2 = r_0 \cdot G$, G – градиент поля, $C_n = H_n/H_2$. Связь амплитуд гармоник магнитного поля H_n с фурье-представлением потенциала осуществлялась с помощью формулы $H_n = \frac{n\cdot A_n}{r_0}$, где A_n вычислялись по (I5).

В таблице 6 приведены величины градиента G, отношения G/I, величины поля H_2 на радиусе r_0 = I,5 см и амплитуды высших гармоник поля C_n на том же радиусе r_0 = I,5 см, полученные с помощью комплекса программ GRIDS и пакета программ POISSON. Эта же зависимость амплитуд высших гармоник поля от величины тока в одном СП витке обмотки при I = 500 ÷ 2500 А показана на рис. 9.

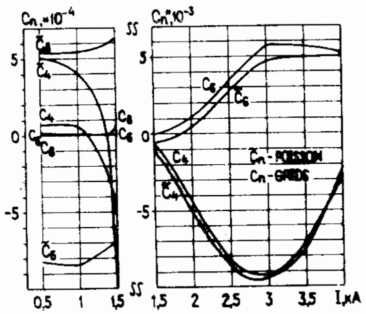

Рис. 9. Величины C_n на радиусе r_0= I,5 см в зависимости от тока в витке СП обмотки квадруполя.

Проведение вычислений потенциала магнитного поля для магнита данной конфигурации усложняется по сравнению с расчетами дипольного магнита. Тем не менее точность вычислений с помощью GRIDS здесь на порядок выше по сравнению с POISSON.

Результаты расчетов, представленные в данной работе, получены в основном на ЭВМ CDC-6500, однако вычисления проводились и на других ЭВМ: БЭСМ-6, ЕС-1060 и ЕС-1061. Полученные результаты позволили установить распределение магнитного поля дипольных и квадрупольных магнитов с повышенной точностью, что безусловно является важной информацией для управления работой ускорителя.

<u>Таблица 6.</u> Величины градиента поля G, отношения G/I, поля H_2 и амплитуд высших гармоник поля C_n на радиусе r_0 = I,5 см. Результаты расчета СП квадруполя типа линзы Пановского получены с помощью I - GRIDS и II - POISSON

I,A		G, Э/см	G/I, Э/(см·А)	H_2, Э	$C_4 \cdot 10^{-4}$	$C_6 \cdot 10^{-4}$	$C_8 \cdot 10^{-4}$	$C_{10} \cdot 10^{-4}$	$C_{12} \cdot 10^{-4}$	$C_{14} \cdot 10^{-4}$
500	I	268I,65	5,3633	4022,47	0,6956	0,0879	-0,0I75	-0,0I04	0,0029	-0,00I2
	II	2686,2	5,3724	4029,3	5,0356	-8,I838	5,3657	-5,70I4	6,8II7	-4,3443
I000	I	5363,33	5,3633	8044,99	0,6407	0,0777	-0,0202	-0,0035	-0,00I4	0,00I3
	II	537I,9	5,37I9	8057,9	4,08I2	-8,4009	5,3357	-5,6423	6,70I2	-4,0469
I500	I	8036,I5	5,3574	I2054,22	-5,II47	0,8283	0,3864	-0,0876	0,0040	-0,0I58
	II	8037,7	5,3580	I2056,0	-I0,I46	-6,9626	6,2340	-5,7563	6,2024	-5,I980
2000	I	I06I8,08	5,3090	I5927,I2	-45,522	9,628	2,470	-0,63I4	-0,006I	-0,0028
	II	I0600,0	5,3000	I5900,0	-52,63I	4,II09	6,90I2	-6,7069	5,6978	-I3,6I7
2500	I	I303I,82	5,2I27	I9547,73	-83,296	34,7I	-0,II92	-2,0I2	0,6806	-0,6648
	II	I2998,7	5,I995	I9498,0	-86,208	27,9II	3,6046	-7,06I3	7,9235	-33,I08

ЛИТЕРАТУРА

I. Шелаев И.А., Юдин И.П. ОИЯИ, Р9-80-333, Дубна, I980.
2. Шелаев И.А., Юдин И.П. ОИЯИ, Р9-80-334, Дубна, I980.
3. Жидков Е.П., Полякова Р.В., Шелаев И.А., Юдин И.П. ОИЯИ, Р9-8I-I2, Дубна, I98I.
4. Жидков Е.П., Полякова Р.В., Шелаев И.А., Юдин И.П. ОИЯИ, Р9-82--384, Дубна, I982.
5. Шелаев И.А., Юдин И.П. ОИЯИ, 9-I2346, Дубна, I979.
6. Shelaev I.A. et al.Proc.12 Intern.Conf.on High-Energy Accelerators, Fermilab Aug. 11-16, 1983, Batavia, Illinois, 1983, p.416.
7. Айрян Э.А. и др. ОИЯИ, II-84-802, Дубна, I984.
8. POISSON Gfoup Programs. User's Guide, CERN, 1975.
9. Ворожцов С.Б. и др. POISSON – система программ по расчету, анализу и оптимизации магнитостатических и электростатических полей. БI-II-I2070, ОИЯИ, Дубна, I978.
I0. Брехна Г. Сверхпроводящие магнитные системы. "Мир", М., I976.
II. Дойников Н.И. Постановка задач численного анализа полей нелинейных магнитных систем (обзор). Препринт НИИЭФА ОБ-8, Ленинград, I976.
I2. Осмоловский В.Г., Ривкинд В.Я. О методе разделения областей для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. ЖВМ и МФ, I98I, т.2I, № I, с.35-39.
I3. Айрян Э.А. и др. ОИЯИ, РII-82-87I, Дубна, I982.
I4. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Юлдашев О.И. ОИЯИ, II-82-659, Дубна, I982.
I5. Самарский А.А., Андреев В,Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.,"Наука", I976.
I6. Дойников Н.И., Симаков А.С. К оптимизации параметра верхней релаксации. Препринт НИИЭФА, Б-0273, Л., I976.
I7. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.,"Наука", I978.
I8. Ворожцов С.Б. и др. ОИЯИ, I9-50I3, Дубна, I970.
I9. Ильин В.П., Свешников В.М. О разностных схемах на последовательности сеток.-"Численные методы механики сплошной среды." Изд. ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, I97I, т.2, № I, с.43-54.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 февраля I986 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Айрян Э.А. и др. Р11-86-80

Численное моделирование на последовательности сеток двумерных полей магнитов синхротрона СПИН

Используются численные алгоритмы расчетов на последовательности сеток для исследований с высокой точностью нелинейных эффектов - зависимости распределения поля от тока в СП обмотке с учетом насыщения железного сердечника - в магнитах синхротрона СПИН. Расчеты проводились с помощью комплекса программ GRIDS, реализующего указанные алгоритмы для решения двумерных задач магнитостатики в магнитах прямоугольной конфигурации. Анализируются вопросы точности проведенных расчетов. Проведено сравнение с результатами, полученными с помощью пакета программ POISSON.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Л.Н.Барабаш.

Ayrjan E.A. et al. P11-86-80

Nunerical Simulation of Two-Dimensional Fields for the Synchrotron SPIN Magnets on a Sequence of Grids

Numerical algorithms of calculation on a sequence of grids are used for an investigation of nonlinear effects with a high accuracy, i.e. the dependence of a field distribution on current in an SC coil of the synchrotron SPIN magnets when an iron yoke is saturated.The calculation has been performed with the help of the GRIDS program which realizes there algorithms for solving two-dimensional magnetostatic problems in magnets of restangular configuration. Questions of the accuracy of calculations are analysed. A comparison is made with the results obtained by the POISSON program.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986