сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-86-718

П.Г.Акишин, Е.П.Жидков, В.Д.Кравцов

ОБ ОДНОМ УСТОЙЧИВОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАГНИТОСТАТИКИ

1986

Пусть $\vec{B}(\vec{x})$ -индукция магнитного поля в точке $\vec{x}$; $\vec{H}(\vec{x})$ - напряженность, $\vec{M}(\vec{x})$ - магнитный момент; $\mu = \mu(|\vec{B}(\vec{x})|)$ - магнитная проницаемость, $\vec{H}^s(\vec{x})$ - поле от токовых элементов, вычисляемое по закону Био-Саварра. Пусть Ω -область, заполненная железом. Интегральная постановка задачи магнитостатики имеет вид /I/:

$$\vec{H}(\bar{a}) = \vec{H}^s(\bar{a}) + \frac{\nabla_{\bar{a}}}{4\pi} \int_{\Omega} \left(\bar{M}(\bar{x}), \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|}\right) d V_{\bar{x}} . \qquad (\mathrm{I})$$

Величины $\bar{H}$, $\bar{M}$ и $\bar{B}$ связаны следующими соотношениями:

$$\bar{H}(\bar{x}) = \frac{\bar{B}(\bar{x})}{\mu_0 \mu(|\bar{B}(\bar{x})|)} , \qquad (2)$$

$$\bar{M}(\bar{x}) = \frac{\bar{B}(\bar{x})}{\mu_0} - \bar{H}(\bar{x}) , \qquad (3)$$

где μ_0 - магнитная проницаемость вакуума.

В двумерном случае (I) редуцируется к следующему уравнению /I/:

$$\bar{H}(\bar{a}) = \bar{H}^S(\bar{a}) - \frac{\nabla_{\bar{a}}}{2\pi} \int_{\Omega} (\bar{M}(\bar{x}), \nabla_{\bar{a}} \ln|\bar{x}-\bar{a}|) \, d S_{\bar{x}} . \qquad (4)$$

Сокращенно уравнения (I),(4) можно записать в виде

$$\bar{H}(\bar{a}) = \bar{H}^S(\bar{a}) + [A]\bar{M} , \qquad (5)$$

где $[A]$ - интегральные операторы, стоящие в правых частях (I) и (4) соответственно.

Учитывая (2),(3), уравнение (5) можно переписать в виде

$$\frac{\bar{B}}{\mu(|\bar{B}|)} = \mu_0 \bar{H}^S + [A]\left(\bar{B}\left(1 - \frac{1}{\mu(|\bar{B}|)}\right)\right) . \qquad (6)$$

Рассмотрим дискретизацию интегральных уравнений (I),(4) из /I/.

Пусть область Ω разбита на подобласти Ω_i :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i ,$$

так что мера пересечения Ω_i и Ω_j равна нулю при $i \neq j$. В каждом Ω_i выберем точку наблюдения $\bar{a}_i$ (в качестве $\bar{a}_i$ берется центр масс Ω_i). Будем считать $\vec{M}(\vec{x})$, $\vec{B}(\vec{x})$, $\vec{H}^s(\vec{x})$ в каждом Ω_i постоянными и равными соответственно $\vec{M}_i$, $\vec{B}_i$, $\vec{H}^s(\vec{a}_i)$.

Магнитный момент $\vec{M}_i$ и индукция $\vec{B}_i$ связаны соотношениями (2),(3). Тогда дискретизованная система уравнений запишется следующим образом:

$$\frac{\vec{B}_i}{\mu(|\vec{B}_i|)} = \mu_0 \vec{H}^s(\vec{a}_i) + \sum_{j=1}^{N} [\hat{A}_{ij}] \vec{B}_j \left(1 - \frac{1}{\mu(|\vec{B}_j|)}\right) , \quad i = 1, 2, \ldots, N, \qquad (7)$$

где $[\hat{A}_{ij}]\vec{B}_j = -\frac{\nabla_{\vec{a}}}{2\pi} \int_{\Omega_j} (\vec{B}_j , \nabla_{\vec{a}} \ln |\vec{x} - \vec{a}|) d S_{\vec{x}} \Big|_{\vec{a} = \vec{a}_i}$

в двумерном случае, и

$$[\hat{A}_{ij}]\vec{B}_j = \frac{\nabla_{\vec{a}}}{4\pi} \int_{\Omega_j} (\vec{B}_j , \nabla_{\vec{a}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|}) d V_{\vec{x}} \Big|_{\vec{a} = \vec{a}_i}$$

в трехмерном случае.

Введем обозначения. Пусть $[\hat{A}]$, $\hat{B}$, $\hat{H}^s$, $\hat{M}(\hat{B})$, есть

$$[\hat{A}] = \begin{pmatrix} [\hat{A}_{11}] & \ldots\ldots\ldots & [\hat{A}_{1N}] \\ [\hat{A}_{N1}] & \ldots\ldots\ldots & [\hat{A}_{NN}] \end{pmatrix} ,$$

$$\hat{B} = (\vec{B}_1, \vec{B}_2, \ldots, \vec{B}_N)^T ,$$

$$\hat{M}(\hat{B}) = (\vec{M}(\vec{B}_1), \vec{M}(\vec{B}_2), \ldots, \vec{M}(\vec{B}_N))^T ,$$

$$\hat{H}^s = (\vec{H}^s(\vec{a}_1) , \vec{H}^s(\vec{a}_2), \ldots, \vec{H}^s(\vec{a}_N))^T .$$

Сокращенно систему (7) можно записать в виде

$$\hat{B} = \mu_0 \hat{H}^s + ([\hat{A}] + [E]) \hat{M}(\hat{B}) , \qquad (7a)$$

где $[E]$ - есть единичная матрица.

В работе рассматриваются вопросы, возникающие при решении дискретизованных систем (7) и (7а) в случае больших значений магнитной проницаемости μ .

§ I. Свойства дискретизованных операторов

Для интегрального оператора $[A]$ из (I) имеет место следующая теорема /2/:

Теорема I

Оператор $[A]$ ограничен с $\|[A]\|_\Omega = 1$.

Оператор $[A]$ самосопряжен.

Для оператора $[A]$ имеет место неравенство

$$([A]\bar{M}, \bar{M})_\Omega \le 0, \qquad (8)$$

причем

$$\sup_{\|\bar{M}\|_\Omega = 1} ([A]\bar{M}, \bar{M})_\Omega = 0 . \qquad (9)$$

Скалярное произведение и норма($(.,.)_\Omega$ и $\|.\|_\Omega$) определяются следующим образом:

$$(\bar{F}, \bar{G})_\Omega = \int_\Omega (\bar{F}(\bar{x}), \bar{G}(\bar{x})) d V_x ,$$

$$\|\bar{F}\|_\Omega = \sqrt{(\bar{F}, \bar{F})_\Omega} .$$

Интегральный оператор $[A]$ из (4) обладает теми же свойствами, поскольку доказательство теоремы I в двумерном случае проводится аналогично.

В данной работе выдвигается предположение, что этими же свойствами, кроме самосопряженности, обладает дискретизованный оператор $[\hat{A}]$ из (7а). Было проведено большое количество численных экспериментов, подтверждающих эту гипотезу.

В рассмотренных случаях все собственные значения дискретизованных операторов были действительными и лежали на отрезке $[-1,0]$.

Рассмотрим вопрос существования нулевых собственных значений дискретизованного оператора в двумерном случае.

Пусть область Ω разбита на треугольники $\{\Omega_i\}$, причем при $i \neq j$ треугольники Ω_i и Ω_j могут иметь либо общую сторону, либо общую вершину, или же не пересекаться совсем. Введем обозначение:

$$[\tilde{A}]\hat{M} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\nabla_{\vec{a}}}{2\pi} \int_{\Omega_i} (\vec{M}_i \cdot \nabla_{\vec{a}} \ln |\vec{x} - \vec{a}|) d S_{\vec{x}} , \qquad (10)$$

где $\vec{a}$ - произвольная точка ($\vec{a} \in \partial\Omega_i$, $i = 1, \ldots, N$).

Пусть $\{\vec{P}_j\}$ - совокупность вершин всех треугольников Ω_i . Обозначим через $\{\tilde{P}_i\}$ - внутренние вершины, а через $\{\tilde{\tilde{P}}_k\}$ - внешние. Определим функцию $\varphi(\vec{x})$, непрерывную на Ω , линейную на каждом треугольнике Ω_i и постоянную на границе Ω . Рассмотрим следующую вектор-функцию $\vec{M}(\vec{x})$:

$$\vec{M}(\vec{x}) = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{e}_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{e}_2 , \qquad (11)$$

где $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ - ортонормированная система векторов, а x и y - соответствующие координаты вектора $\vec{x}$. Очевидно, $\vec{M}(\vec{x})$ постоянна на каждом Ω_K . Аналогично /3/, имеет место теорема.

Теорема 2.

Оператор $[\tilde{A}]$ из (10) тождественно равен нулю на $\vec{M}(\vec{x})$ из (11).

Доказательство.

Пусть $\vec{M}_K$ - значение $\vec{M}(\vec{x})$ на Ω_K. Из (I0) следует:

$$[\tilde{A}]\vec{M} = \frac{1}{2\pi}\sum_{K=1}^{N} \oint\limits_{\partial\Omega_K}\left[(\vec{M}_K, \vec{n}(\vec{x}))\nabla_{\vec{a}} \ln|\vec{x}-\vec{a}|\right] dl_{\vec{x}} , \qquad (I2)$$

где $\vec{n}(\vec{x})$ - внешняя нормаль к Ω_K.

Пусть L_i - внутренняя сторона разбиения области Ω с вершинами $\vec{P}_{j1}$, $\vec{P}_{j2}$, к которой прилегают треугольники $\Omega_{i1}(\vec{P}_{j1}, \vec{P}_{j2}, \vec{P}_{j3})$ и $\Omega_{i2}(\vec{P}_{j2}, \vec{P}_{j1}, \vec{P}_{j4})$ (рис.I)

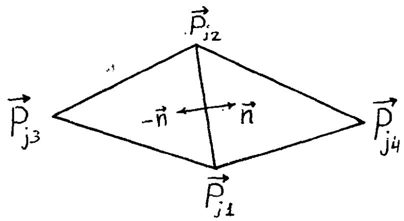

Рис.I

Пусть $\vec{n}$ - внешняя нормаль к L_i в Ω_{i1}, тогда $-\vec{n}$ будет внешней нормалью к L_i в Ω_{i2}. Интеграл по L_i, входящий в (I2), равен

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_i}(\vec{n}, (\vec{M}_{i2}-\vec{M}_{i1}))\nabla_{\vec{x}} \ln|\vec{x}-\vec{a}|\, dl_{\vec{x}} . \qquad (I3)$$

Покажем, что $(\vec{n}, (\vec{M}_{i1} - \vec{M}_{i2}))$ равно нулю. Введем декартову систему координат, связанную со стороной L_i. Пусть ось OX направлена по L_i (допустим, в направлении от $\vec{P}_{j1}$ к $\vec{P}_{j2}$), а ось OY - по $\vec{n}$. Из непрерывности $\varphi(\vec{x})$ на Ω и линейности на каждом Ω_K следует, что в Ω_{i1} $\varphi(x)$ можно представить в виде

$$\varphi(x) = a_0 + x a_x + y a_{y1} . \qquad (I4)$$

Аналогично в Ω_{i2} $\varphi(x)$ представляется в виде

$$\varphi(x) = a_0 + x\cdot a_x + y\cdot a_{y2} . \qquad (I5)$$

Из (I4),(I5) следует:

$$\vec{M}_{i1} - \vec{M}_{i2} = [\vec{e}_3 \times \vec{n}(a_{y1} - a_{y2})] ,$$

где $\vec{e}_3 = [\vec{e}_1 \times \vec{e}_2]$.

И, очевидно, $(\vec{n}, (\vec{M}_{i1} - \vec{M}_{i2})) = 0$.

Из условия постоянства $\varphi(\vec{x})$ на границе Ω для каждой граничной L_K аналогично показывается ортогональность внешней нормали $\vec{n}$ для этой стороны к соответствующей ей $\vec{M}_{i_K}$.

Теорема 2 доказана.

Очевидно, что вектор $\hat{M} = (\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_N)^T$ будет являться собственным вектором оператора $[\hat{A}]$ из (7а) с собственным значением, равным нулю.

Введем систему векторов $\{\hat{e}_K\}$ следующим образом. Пусть $\varphi_K(\vec{x})$ - непрерывная на Ω и линейная на каждом Ω_i функция, удовлетворяющая условиям:

$$\varphi_i(\tilde{P}_j) = \delta_{ij} ,$$
$$\varphi_i(\tilde{\tilde{P}}_K) \equiv 0 . \qquad (I6)$$

Определим $\vec{e}_K^{\,i}$ из (II), подставляя вместо $\varphi(\vec{x})$ $\{\varphi_K(\vec{x})\}$ и считая, что $\vec{x} \in \Omega_i$ $(i = 1, 2, \dots, N)$. Тогда

$$\hat{e}_K = (\vec{e}_K^{\,1}, \vec{e}_K^{\,2}, \dots, \vec{e}_K^{\,N})^T . \qquad (I7)$$

Заметим, что $\{\varphi_K(\vec{x})\}$ удовлетворяют условиям теоремы 2, следовательно, $\{\hat{e}_K\}$ - собственные векторы оператора $[\hat{A}]$ с нулевым собственным значением.

Лемма.

Система векторов $\{\hat{e}_K\}$ линейно независима.

Доказательство:

Пусть существует набор $\{C_K\}$ таких, что

$$\sum_{K=1}^{L} C_K \hat{e}_K = 0 \qquad (I8)$$

(L - количество внутренних вершин разбиения области Ω). Из (I7), (I8) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{K=1}^{L} C_K \varphi_K(\vec{x})\right) = 0$$

и

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{K=1}^{L} C_K \varphi_K(\vec{x})\right) = 0 \qquad (I9)$$

Или

$$\sum_{K=1}^{L} C_K \varphi_K(\vec{x}) = const , \qquad (20)$$

Учитывая, что $\varphi_K(\vec{x})$ на границе Ω равны нулю, получаем что $const = 0$. Подставив в (20) $\vec{x} = \vec{P}_i$ $(i = 1, \dots, L)$, получаем:

$$C_K = 0 \qquad (K = 1, \dots, L).$$

Лемма доказана.

Таким образом, мы можем построить L собственных векторов дискретизованного оператора $[\hat{A}]$ с нулевым собственным значением. Численные эксперименты показали, что других собственных векторов с нулевым собственным значением у дискретизованного оператора $[\hat{A}]$ нет.

§ 2. Метод решения системы дискретизованных уравнений

Рассмотрим детально дискретизованные системы (7),(7а). В предыдущем параграфе было показано, что дискретизованный оператор $[\hat{A}]$ имеет собственные векторы с нулевым собственным значением, и их количество в практически интересных случаях достаточно велико. Если токи в обмотках невелики, магнитная проницаемость достигает больших значений; при этом левая часть системы (7) стремится к нулю, и система (7) становится плохо обусловленной из-за наличия собственных векторов оператора $[\hat{A}]$ с нулевым собственным значением. По той же самой причине значительно ухудшается сходимость итерационного процесса, используемого в /4/ для решения системы (7а):

$$\hat{B}_{K+1} = \mu_0 \hat{H}^S + ([\hat{A}] + [E])\hat{M}(\hat{B}_K), \tag{21}$$
$$\hat{B}_0 = \hat{0}, \quad K = 0, 1, \ldots .$$

Процесс считается завершенным, если относительная невязка $\frac{\| \hat{B}^{K+1} - \hat{B}^K \|}{\| \hat{B}^{K+1} \|}$ становится меньше наперед заданной величины ε.

Фактически скорость сходимости итерационного процесса (21) мажорируется скоростью сходимости геометрической прогрессии с показателем $(1 - \frac{1}{\mu_{max}}) \cdot (\lambda_{max} + 1)$, где λ_{max} – максимальное собственное значение дискретизованного оператора $[\hat{A}]$ (как показано в § I, $\lambda_{max} = 0$), а μ_{max} – максимальное значение магнитной проницаемости. В рассматриваемом нами случае малых токов значение μ_{max} довольно велико ($\simeq 10^5$).

Для пересчета поля в произвольную точку вне железа нам необходимо знать только значение намагниченности $\hat{M}$, где

$$\hat{M} = (\vec{M}_1, \vec{M}_2, \ldots, \vec{M}_N)^T .$$

С другой стороны, значение оператора $[\tilde{A}]$ из (I2) в произвольной точке $\vec{a}$ не меняется при добавлении к вектору $\hat{M}$ произвольной линейной комбинации собственных векторов $\hat{e}_i$, определяемых из (I7).

Представим область определения дискретизованного оператора $[\hat{A}]$ $\mathbb{R}_{2N}$ в виде прямой суммы двух векторных пространств $\mathbb{E}_1$ и $\mathbb{E}_2$, где $\mathbb{E}_2$ есть $\ker [\hat{A}]$, а $\mathbb{E}_1$ – ортогональное дополнение $\mathbb{E}_2$. Опираясь на предположение о свойствах дискретизованного оператора $[\hat{A}]$, высказанное в § I, нетрудно заметить, что $[\hat{A}]$ невырожден на $\mathbb{E}_1$ и спектр $[\hat{A}]$ на $\mathbb{E}_1$ лежит на отрезке $[-1, \lambda_{max}]$, где $\lambda_{max} < 0$ –максимальное ненулевое собственное значение $[\hat{A}]$.

Пусть $\hat{M}^*_K = [P]\hat{M}(\hat{B}_K)$, где $[P]$– проектор на подпространство $\mathbb{E}_1$. Рассмотрим следующую модификацию итерационного процесса (21):

$$\hat{B}_{K+1} = \mu_0 \hat{H}^S + ([\hat{A}] + [E])\hat{M}(\hat{B}_K), \tag{22}$$
$$k = 0, 1, \ldots .$$

Процесс считается завершенным, если невязка R_K

$$R_K = \frac{\| \hat{M}^*_{K+1} - \hat{M}^*_K \|}{\| \hat{M}^*_K \|} \tag{23}$$

становится меньше наперед заданной величины ε.

Рассмотрим вопросы, возникающие при практической реализации итерационного процесса (22),(23). Необходимо построить достаточно быструю процедуру проектирования произвольного $2N$-мерного вектора на пространство $\mathbb{E}_1$. Другими словами, для произвольного вектора $\hat{M}$ необходимо найти константы C_i, $i = 1, \ldots, L$, такие что вектор $\hat{M}^*$:

$$\hat{M}^* = \hat{M} + \sum_{i=1}^{L} C_i \hat{e}_i \tag{24}$$

ортогонален всем векторам $\{\hat{e}_j\}$, определяемым из (I7). Эта задача сводится к решению системы линейных уравнений:

$$(\hat{M}, \hat{e}_j) + \sum_{i=1}^{L} C_i (\hat{e}_i, \hat{e}_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, L . \tag{25}$$

Нетрудно заметить, что матрица из (25) является симметричной, положительно определенной и сильно разреженной. Для решения системы (25) использовался метод неполного разложения Холецкого в сочетании с методом сопряженных градиентов /5/.

Пусть $[B]$ – симметричная, разреженная, положительно определенная матрица. Требуется решить систему

$$[B]\hat{u} + \hat{v} = 0 . \tag{26}$$

Пусть $[L]$ – левая треугольная матрица, имеющая нулевые элементы на тех же местах, что и матрица $[B]$. Потребуем, чтобы ненулевые элементы b_{ij} матрицы $[B]$ совпадали с соответствующими элементами $\tilde{b}_{ij}$ матрицы $[\tilde{B}] = [L][L]^T$. Для решения (26) используется метод сопряженных градиентов, примененный к системе:

$$[L]^{-1}[B][L]^{-T}\hat{\hat{u}} + [L]^{-1}\hat{v} = 0, \tag{27}$$

где $\hat{\hat{u}} = [L]^T \hat{u}$.

В качестве начального приближения для метода сопряженных градиентов на каждом шаге итерационного процесса (22)-(23) использовались значения $\{C_i\}$ с предыдущего шага.

На основе вышеизложенного создан комплекс программ расчета магнитостатических полей. Данная методика применялась для определения магнитного поля краевых шимм второго направления медленного вывода пучка синхрофазотрона ЛВЭ ОИЯИ (рис.2). На рисунке 3 приведены кривые, иллюстрирующие скорость сходимости итерационных процессов (22)-(23) и (2I).

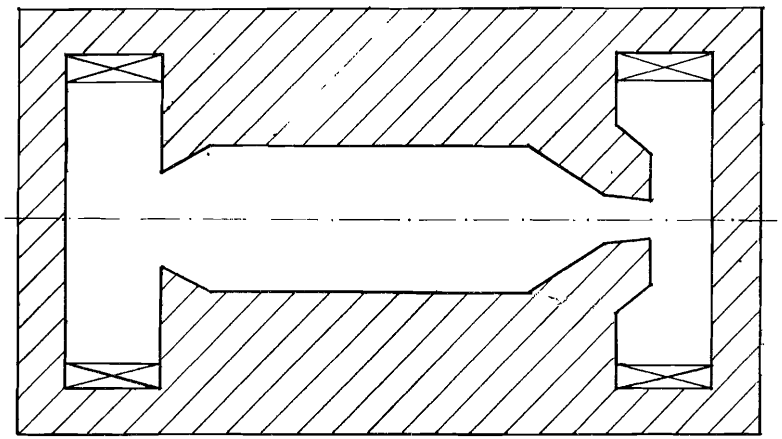

Рис.2. Магнит синхрофазотрона с ферромагнитными шиммами.

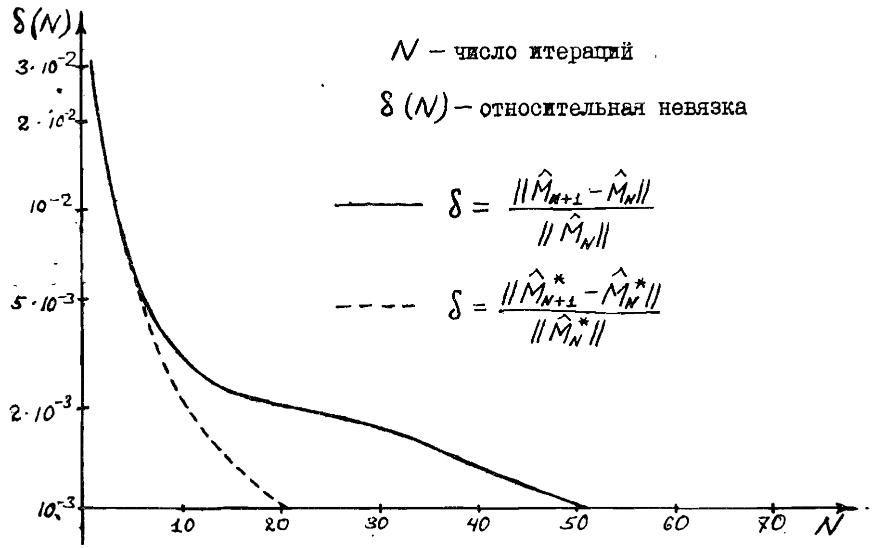

Рис.3

В таблице приведены вычислительные затраты на итерационные процессы (2I) и (22)-(24) при разбиении области железа на 268 элементов.

Количество итераций	CP TIME итерационного процесса (2I), с	CP TIME итерационного процесса (22)-(23), с
5	53.04I	53.384
I0	I05.304	I08.040
I5	I57.505	I62.280
20	209.725	2I7.40I

Основное достоинство предложенного алгоритма состоит в том, что он позволяет найти разумный критерий выхода из итерационного процесса (2I), что существенно сокращает вычислительные затраты на решение нелинейной дискретизованной системы уравнений в случае больших значений магнитной проницаемости μ .

Литература

I. Trowbridge C.W. et al. GFUN3D User Guide, RL- 76 - 029/A.
2. Friedman M.J. Mathematical Study of the Nonlinear Singular Integral Magnetic Field Equation. SIAM. J. Appl. Math. Vol. 39, 1980, pp. 14 -<20 .
3. Акишин П.Г. ОИЯИ, PII-86-522, Дубна, I986.
4. Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. ОИЯИ, PII-86-534, Дубна, I986.
5. Meijerink J.A., VAN der Vorst H.A. "An Iterative Solution Method for Linear Systems of Which the Coefficient Matrix is a Symmetric M-Matrix". Mathematics of Computation 1977, Vol. 31, No.137, pp. 148-162.

Рукопись поступила в издательский отдел
3I октября I986 года.

Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. P11-86-718

Об одном устойчивом алгоритме решения интегральных уравнений магнитостатики

Исследуются вопросы, возникающие при решении интегральных уравнений магнитостатики в случае больших значений магнитной проницаемости. Доказана теорема о существовании у дискретизированного оператора собственных векторов с нулевым собственным значением и найден способ их построения в двумерном случае. Предложен модифицированный итерационный процесс решения системы дискретизованных уравнений. Приводятся результаты тестовых расчетов. Алгоритм может быть рекомендован для широкого класса двумерных задач магнитостатики.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод авторов

Akishin P.G., Zhidkov E.P., Kravtsov V.D. P11-86-718

About One Stable Algorithm for Solution of Integral Magnetostatical Equations

Some problems arising at the solution of the integral magnetostatical equations in the case of great value of permeability are investigated. The theorem about the existence of the eigenvectors of the discretizated operator with the zero eigenvalue is proved, and the method of their construction is found in two dimensions. The modified iterative process of the solution of the system of the discretizated equations is proposed. The results of test calculations are discussed. The algorithm could be recommended for a wide class of the two-dimensional magnetostatical problems.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986