

**СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

**P11-86-534**

**П.Г.Акишин, Е.П.Жидков, В.Д.Кравцов**

**ОБ ОДНОМ ОПТИМИЗИРОВАННОМ АЛГОРИТМЕ  
РЕШЕНИЯ  
ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
МАГНИТОСТАТИКИ**

**1986**

Пусть  $\vec{B}(\vec{x})$  - индукция магнитного поля в точке  $\vec{x}$ ;  $\vec{H}(\vec{x})$  - напряженность;  $\vec{M}(\vec{x})$  - магнитный момент;  $\mu = \mu(|\vec{B}(\vec{x})|)$  - магнитная проницаемость;  $\vec{H}^s(\vec{x})$  - поле от токовых элементов, вычисляемое по закону Био-Саварра. Пусть  $G$  - область, заполненная железом. Интегральная постановка задачи магнитостатики в двумерном случае имеет вид /1/:

$$\vec{H}(\vec{a}) = \vec{H}^s(\vec{a}) - \frac{\nabla \vec{a}}{2\pi} \int_G (\vec{M}(\vec{x}), \nabla_{\vec{x}} \ln |\vec{x} - \vec{a}|) dS_{\vec{x}}. \quad (1)$$

Величины  $\vec{H}$ ,  $\vec{M}$  и  $\vec{B}$  связаны следующими соотношениями:

$$\vec{H}(\vec{x}) = \frac{\vec{B}(\vec{x})}{\mu_0 \cdot \mu(|\vec{B}(\vec{x})|)}, \quad (2)$$

$$\vec{M}(\vec{x}) = \frac{\vec{B}(\vec{x})}{\mu_0} - \vec{H}(\vec{x}), \quad (3)$$

где  $\mu_0$  - магнитная проницаемость вакуума.

Пусть область  $G$  разбита на треугольники  $\{G_i\}$ :

$$G = \bigcup_{i=1}^N G_i,$$

причем разбиение удовлетворяет следующим условиям:

- а) мера пересечения  $G_i$  и  $G_j$  равна нулю при  $i \neq j$ ;
- б) при  $i \neq j$  треугольники  $G_i$  и  $G_j$  могут иметь либо одну и только одну общую вершину, либо одну и только одну общую сторону, либо не пересекаться совсем. Определим  $\vec{a}_i$  следующим образом:

$$\vec{a}_i = \frac{\int_{G_i} \vec{x} dS_{\vec{x}}}{\int_{G_i} dS_{\vec{x}}}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

Следуя /1/, рассмотрим дискретизацию (1):

$$\vec{H}_i = \vec{H}^s(\vec{a}_i) - \frac{\nabla \vec{a}_i}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_{G_j} (\vec{M}_j, \nabla_{\vec{x}} \ln |\vec{x} - \vec{a}_i|) dS_{\vec{x}} \Big|_{\vec{x} = \vec{a}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

где  $\{\vec{H}_i\}$ ,  $\{\vec{M}_i\}$  удовлетворяют (2), (3). Решая (5) с учетом (2), (3), можно найти  $\{\vec{M}_i\}$ . Для определения поля в произвольной точке можно воспользоваться (I), предполагая, что  $\vec{M}(\vec{x}) \equiv \vec{M}_j$  при  $\vec{x} \in G_j$ .

### § 1. Вычисление коэффициентов матриц дискретизованных систем

Для записи дискретизованной системы (5) необходимо вычислить интегралы вида

$$J_k = \nabla_{\vec{x}} \int_{G_k} (\vec{M}, \nabla_{\vec{x}} \ln |\vec{x} - \vec{a}|) dS_{\vec{x}}, \quad (6)$$

где  $\vec{M} \equiv \text{const}$ .

Интеграл  $J_k$  редуцируется на границу области  $G_k$ :

$$J_k = \oint_{\partial G_k} (\vec{M}, \vec{n}(\vec{x})) \nabla_{\vec{x}} \ln |\vec{x} - \vec{a}| d\ell_{\vec{x}}. \quad (7)$$

Пусть  $L_1, L_2, L_3$  - стороны треугольника  $G_k$ ;  $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$  - внешние нормали соответственно к  $L_1, L_2, L_3$ ,  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  - единичные векторы, указывающие положительное направление обхода треугольника  $G_k$  ( $(\vec{n}_i, \vec{e}_i) = 0, i = 1, 2, 3$ ).

Имеем:

$$J_k = \sum_{i=1}^3 (\vec{M}, \vec{n}_i) \int_{L_i} \nabla_{\vec{x}} \ln |\vec{x} - \vec{a}| d\ell_{\vec{x}}. \quad (8)$$

Представим  $\nabla_{\vec{x}} \ln |\vec{x} - \vec{a}|$  в виде

$$\nabla_{\vec{x}} \ln |\vec{x} - \vec{a}| = \vec{n}_i \frac{\partial}{\partial n_{\vec{x}}} (\ln |\vec{x} - \vec{a}|) + \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial \ell_{\vec{x}}} (\ln |\vec{x} - \vec{a}|). \quad (9)$$

Интеграл  $\int_{L_i} \frac{\partial}{\partial \ell_{\vec{x}}} \ln |\vec{x} - \vec{a}| d\ell_{\vec{x}}$  с точностью до знака равен

$$\int_{L_i} \frac{\partial}{\partial \ell_{\vec{x}}} (\ln |\vec{x} - \vec{a}|) d\ell_{\vec{x}} = \ln |\vec{p}_2 - \vec{a}| - \ln |\vec{p}_1 - \vec{a}|,$$

где  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$  - концы отрезка  $L_i$ .

Аналогично интеграл  $\int_{L_i} \frac{\partial}{\partial n_{\vec{x}}} \ln |\vec{x} - \vec{a}| d\ell_{\vec{x}}$  с точностью до знака равен

углу, под которым видна сторона  $L_i$  из точки  $\vec{a}$ .

Отсюда следует, что  $J_k$  представляется в виде линейной комбинации  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  и  $R_1, R_2, R_3$ , где  $\varphi_i$  - угол, под которым виден отрезок  $L_i$  из точки  $\vec{a}$ , а  $R_i = \ln |\vec{p}_i - \vec{a}|$ , где  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$  - вершины треугольника  $G_k$ .

Нетрудно заметить, что треугольники  $G_k$  могут иметь общие стороны и вершины. Пусть  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_M$  - вершины всех треугольников  $\{G_k\}$ , а  $L_1, L_2, \dots, L_K$  - все стороны всех треугольников  $\{G_k\}$  (предполагается, что все вершины и все стороны различны).

Тогда для того, чтобы явно выписать коэффициенты в (5), необходимо вычислить  $M \times N$  величин  $R_{ij}$ :

$$R_{ij} = \ln |\vec{p}_i - \vec{a}_j|, \\ i = 1, \dots, M, \\ j = 1, \dots, N,$$

и  $K \times N$  углов  $\varphi_{mk}$ , под которыми видны стороны  $L_m$  из точек  $\vec{a}_k$ . Подобная процедура, полностью устраняющая дублирование при вычислении коэффициентов матриц, сделана и для комплекса программ расчета осесимметричных магнитных полей /2/.

### § 2. Многосеточный алгоритм

Введем следующие обозначения:

$$\hat{B} = (\vec{B}_1, \vec{B}_2, \dots, \vec{B}_N)^T, \\ \hat{M} = (\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_N)^T, \\ \hat{H}^s = (\vec{H}^s(\vec{a}_1), \vec{H}^s(\vec{a}_2), \dots, \vec{H}^s(\vec{a}_N))^T, \\ \hat{H} = (\vec{H}_1, \vec{H}_2, \dots, \vec{H}_N)^T.$$

Тогда системы (2), (3), (5) можно записать в виде

$$\hat{H} = \hat{H}^s + [A] \hat{M} \\ \hat{M} = \left( \frac{1}{\mu_0} \hat{B} - \hat{H} \right), \quad (10)$$

где  $[A]$  - матрица размерности  $(2N \times 2N)$ .

Трансформируем (10) к виду:

$$\frac{1}{\mu_0} \hat{B} = \hat{H}^s + ([E] + [A]) \hat{M}(\hat{B}), \quad (11)$$

где  $[E]$  - единичная матрица.

В предположении ограниченности магнитного момента  $\vec{M}$  в /3/ доказывается теорема существования решения (I).

Для решения (II) в /2/ использовался следующий итерационный процесс:

$$\frac{1}{\mu_0} \hat{B}_{k+1} = \hat{H}^s + ([E] + [A]) \hat{M}_k, \\ \hat{M}_k = \hat{M}(\hat{B}_k), \quad (12)$$

$$\hat{M}_0 = \hat{0}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Для ускорения сходимости (I2) используются вычисления на последовательности сеток /4-7/.

Первоначально задача (II) решается на крупном разбиении с использованием итерационного процесса (I2). Затем каждый треугольник  $S_k$  разбивается на 4 подобных. Решается задача (II) для этого разбиения, причем начальное приближение в (I2) для мелкого разбиения переносится с уже решенной задачи (II) для крупного разбиения. Данная процедура существенно сокращает суммарный расход машинного времени на решение задачи (II) в связи с тем, что наибольшее количество итераций проводится на более дешевом (с точки зрения вычислительных затрат) крупном разбиении. Решение задачи (II) на мелком разбиении начинается с хорошего начального приближения.

### § 3. Численные расчеты

Изложенная в первых двух параграфах методика реализована в виде комплекса фортранных программ расчета двумерных магнитостатических полей. При определении коэффициентов матриц систем дискретизованных уравнений (5) для крупного и мелкого разбиений учитывался тот факт, что коэффициенты матрицы дискретизованной системы крупного разбиения выражаются через коэффициенты матрицы дискретизованной системы мелкого разбиения. Действительно, пусть  $S$  - треугольник ABC крупного разбиения (рис. I). Тогда, очевидно, имеет место следующее тождество:

$$\nabla_{\vec{a}} \int_S (\vec{M}, \nabla_{\vec{a}} \ln |\vec{x} - \vec{a}|) dS_{\vec{x}} = \sum_{i=1}^4 \nabla_{\vec{a}} \int_{S_i} (\vec{M}, \nabla_{\vec{a}} \ln |\vec{x} - \vec{a}|) dS_{\vec{x}},$$

где  $\vec{M} \equiv const$ .

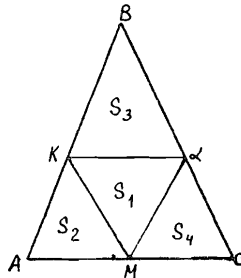


Рис. I.

Центроиды треугольников крупного разбиения также содержатся среди центроидов мелкого разбиения.

В качестве входных данных для комплекса необходимо задавать:

1. Конфигурацию железа.
2. Набор треугольников  $\{S_k\}$ .

Есть возможность автоматического разбиения на треугольники. В этом случае область, заполненная железом, должна задаваться в виде объединения выпуклых многоугольников, в каждом многоугольнике должен быть задан максимальный диаметр получаемых треугольников.

3. Конфигурацию токовых обмоток (в виде многоугольников), плотности токов в обмотках.

4. Тип магнита.

Введем декартову систему координат  $XOY$ . Возможны 6 ситуаций:

- а) магнит без всякой симметрии;
  - б) антисимметрия поля относительно оси  $OX$ ;
  - в) симметрия поля относительно оси  $OX$ ;
  - г) антисимметрия поля относительно оси  $OX$  и симметрия - относительно оси  $OY$ ;
  - д) симметрия поля относительно осей  $OX$  и  $OY$ ;
  - е) антисимметрия поля относительно осей  $OX$  и  $OY$ .
5. Точки наблюдения, в которые производится пересчет поля.

Тестирование комплекса проводилось на задаче, имеющей аналитическое решение: бесконечный цилиндр с  $\mu = const$  в поперечном однородном магнитном поле. При этом результат расчета при разбиении четверти круга на 240 элементов совпал с теоретическим с относительной ошибкой  $10^{-4}$ . Время, затраченное на формирование матрицы, решение итерационного процесса и пересчет поля в 20 точках, составило 188 секунд центрального процессора СДС-6500.

Проводилась также оценка сокращения времени вычисления коэффициентов матрицы в (II) при использовании данного оптимизированного алгоритма. Расчет коэффициентов матрицы при разбиении конфигурации железа на 224 элемента (с учетом симметрии поля относительно осей  $OX$  и  $OY$ ) по оптимизированному алгоритму занял 134 секунды центрального процессора СДС-6500, тогда как точно такой же расчет по неоптимизированному алгоритму потребовал 409 секунд.

В целях проверки работы комплекса на реальных задачах был проведен двумерный расчет магнитной системы синхротрона "СПИН" /8/. При сравнении расчетов основной гармоникой поля по данной методике и расчетов /9/, использующих дифференциальную постановку, получено совпадение с отн. ошибкой 0,1%. Время, затраченное на решение этой задачи, составило 20 секунд центрального процессора.

Изложенный в статье алгоритм расчета двумерных магнитостатических полей применялся при численном анализе магнитного поля синхрофазотрона ЛВЭ ОИЯИ. В ходе работ по созданию медленного вывода пучка ускорителя возникла необходимость создания линейно растущего магнитного поля с заданным градиентом путем накладки ферромагнитных шимми в магните синхрофазотрона [9]. Проводился расчет поля магнита без шимми, для которого экспериментально получено распределение поля. С учетом правомерности двумерного приближения получено хорошее согласие численного расчета с экспериментом (рис.2). Также были проведены расчеты поля магнита с шиммами различной формы, в результате которых была получена требуемая конфигурация магнитного поля.

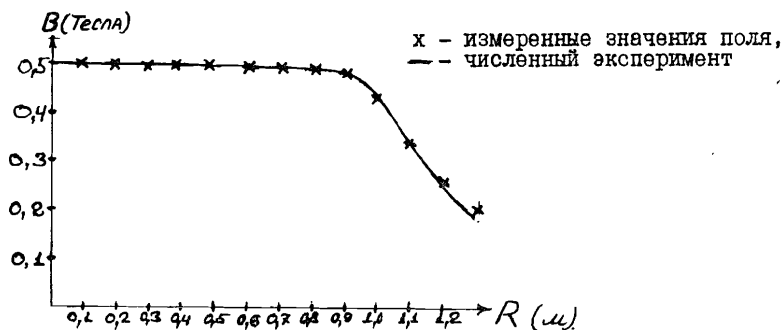


Рис. 2.

В заключение авторы выражают благодарность И.Б.Исинскому за интерес к работе и предоставление экспериментальных данных.

#### Литература

1. Newman M.J., Trowbridge C.W., Turner L.R. Proc 4th Int. Conf. on Magnet. Technology, Brookhaven, 1972.
2. Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. ОИЯИ, РИ-85-552, Дубна, 1985.
3. Акишин П.Г., Жидков Е.П. ОИЯИ, РИ-81-826, Дубна, 1981.
4. Бахвалов Н.С. ЖМ и МФ, 1966, 6, № 5, с. 861-883.
5. Федоренко Р.П. УМН т. XXIII, вып. 2 (170), 1973.
6. Ильин В.П., Свешников В.М. Численные методы механики сплошной среды. Инф. блл. СО АН СССР, Новосибирск, 1971, т.2, №1, с.43-54.
7. Айрян Э.А. и др. ОИЯИ, 5-81-820, Дубна, 1981.
8. Айрян Э.А. и др. ОИЯИ, РИ-86-80, Дубна, 1986.
9. Акишин П.Г. и др. ОИЯИ, РИ-85-973, Дубна, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел  
31 июля 1986 года.

#### НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

- |               |  |             |
|---------------|--|-------------|
| D2-82-568     | Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.   | 1 р. 75 к.  |
| D9-82-664     | Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.  | 3 р. 30 к.  |
| D3,4-82-704   | Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.  | 5 р. 00 к.  |
| D11-83-511    | Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.                                   | 2 р. 50 к.  |
| D7-83-644     | Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.  | 6 р. 55 к.  |
| D2,13-83-689  | Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.   | 2 р. 00 к.  |
| D13-84-63     | Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.   | 4 р. 50 к.  |
| D2-84-366     | Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.   | 4 р. 30 к.  |
| D1,2-84-599   | Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.  | 5 р. 50 к.  |
| D17-84-850    | Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/  | 7 р. 75 к.  |
| D10,11-84-818 | Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983 | 3 р. 50 к.  |
|               | Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/  | 13 р. 50 к. |
| D4-85-851     | Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.   | 3 р. 75 к.  |
| D11-85-791    | Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.                                      | 4 р.        |
| D13-85-793    | Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна 1985.  | 4 р. 80 к.  |

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:  
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79  
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ  
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. P11-86-534  
Об одном оптимизированном алгоритме решения  
двумерных интегральных уравнений магнитостатики

Исследуются вопросы, связанные с оптимизацией алгоритма решения двумерных интегральных уравнений магнитостатики. Предлагается процесс решения системы дискретизованных уравнений на последовательности сеток. Приводятся результаты тестовых расчетов. Метод может быть рекомендован для широкого класса двумерных задач магнитостатики.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Akishin P.G., Zhidkov E.P., Kravtsov V.D. P11-86-534  
About One Optimizational Algorithm  
of Solution of Two-Dimensional Integral  
Magnetostatical Equations

Some problems connected with the optimization of an algorithm for solving two-dimensional integral magnetostatical equations are investigated. The process of solving the system of discretization equations on a sequence of grids is proposed. The results of test calculations are discussed. The method could be recommended for a wide class of two-dimensional problems of magnetostatics.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986