объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P11-86-531

Г.А.Емельяненко

О СВОЙСТВАХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОСОБЕННЫМИ ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫМИ, ЛЕНТОЧНЫМИ И КВАЗИТРЕХДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

Вычисление главных угловых миноров трехдиагональных матриц

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

1986

I. Введение

В настоящей работе продолжаются исследования по изучению свойств трехдиагональных матриц на основе нетрадиционного подхода /I-3/. Здесь будут подробно изучены проблемы вычисления главных угловых миноров (а следовательно, и детерминанта) матриц. Нет необходимости доказывать, сколь важны указанные фундаментальные характеристики в полной алгебраической проблеме ($AX=Y$, $AX=\lambda X$) систем уравнений с такими матрицами (операторами). Действительно, хорошо известно, например /4-8/, что системы алгебраических уравнений общего вида *)

$$A \cdot Z = V \quad , \tag{I.I}$$

где Z , $V \in R_m$ (R_m - евклидово пространство), с помощью преобразований подобия $Q^T(QAQ^T)QZ=V$ сводятся к системам

$$C \cdot X = Y \quad , \tag{I.2}$$

где X, $Y \in R_m$, а трехдиагональная матрица C имеет вид $C=QAQ^T$ и $X=Q \cdot Z$, $Y=Q \cdot V$. При этом указанные преобразования обладают свойствами:

1°. $Q^T Q = QQ^T = E$

2°. $\det(A) = \prod_{k=1}^{m} \lambda_k = \prod_{k=1}^{m} \mu_k = \det(C)$

$$Sp(A) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = \sum_{k=1}^{m} \mu_k = Sp(C) \quad , \text{где} \tag{I.3}$$

$$A \cdot Z_k = \lambda_k \cdot Z_k \quad , \quad C \cdot X_k = \mu_k \cdot X_k$$

3°. $\|Z\| = \|X\|$, $\|Y\| = \|V\|$

4°. $\|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \nu = \|C\| \cdot \|C^{-1}\|$

---

*) Ниже мы приводим преобразования подобия для $A=A^T$, хотя идея настоящих рассуждений сохраняется с незначительными оговорками /7/ и для A -общего вида.

Наиболее широкое распространение (особенно, когда A - самосопряженный оператор, например, при решении некорректных обратных задач[9]) получили преобразования подобия с Q-матрицами отражения[5]. При этом, как следует из свойств 3^0 и 4^0 (I.3), такие преобразования оставляют эквивалентными вычислительные свойства самих операторов A и C и решений систем (I.I) и (I.2) относительно возмущений $A \pm \Delta A$ и $V \pm \Delta V$.

Итак, пусть*) матрица C (I.2) имеет вид

$$C = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & & p_m & q_m \end{bmatrix} \qquad (I.4)$$

где $\{p_k \neq 0,\ r_k \neq 0,\ q_k \neq 0;\ q_1 \neq 0\}_{k=2}^{m}$.

В[2] была доказана следующая теорема 7. Если C (I.4) - неособенная трехдиагональная матрица с отличными от нуля элементами, то для элементов обратной ей матрицы $B=C^{-1}$ справедливо представление:

$$B_{ij} = \text{const} \begin{cases} q_i^{-1} \cdot \alpha_i \cdot \beta_i, & i=j \\ (-1)^{i+j} \cdot q_i^{-1} \cdot \alpha_i \cdot \beta_j \cdot \prod_{k=i+1}^{j} \dfrac{r_k}{q_k}, & i \leq j \\ (-1)^{i+j} \cdot q_j^{-1} \cdot \beta_i \cdot \alpha_j \cdot \prod_{k=j+1}^{i} \dfrac{p_k}{q_k}, & j \leq i, \end{cases} \qquad (I.5)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= \alpha_i - \gamma_i \alpha_{i-1} \\ \beta_{j-1} &= \beta_j - \gamma_{j+1} \cdot \beta_{j+1} \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_{i+1} = 1 - \sum_{k=1}^{i} \gamma_k \alpha_{k-1}, & i=1,2,\dots,m \\ \beta_{j-1} = 1 - \sum_{k=j}^{m} \gamma_{k+1} \beta_{k+1}, & j=m,\dots,1 \end{cases} \qquad (I.6)$$

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1; \quad \beta_{m+1} = \beta_m = \beta_{m-1} = 1$$

$$\gamma_k = \frac{p_k}{q_{k-1}} \cdot \frac{r_k}{q_k}, \quad \gamma_1 = \gamma_{m+1} = 0, \quad k=2,\dots,m; \quad \text{Const} = (\alpha_{m+1}^{-1} = \beta_0^{-1}),$$

*) В настоящей серии работ, как уже отмечалось в /I-3/, принята единая система обозначений, а также нумерация основных результатов (теорем и лемм).

а также

$$\text{Const} \cdot (\beta_i \cdot \alpha_{i+1} - \gamma_{i+1} \cdot \alpha_i \cdot \beta_{i+1}) = 1, \quad i=1,2,\dots,m. \qquad (I.7)$$

При этом:

I^0. Если $\alpha_i = 0$, то $B_{i\,i-1} = r_i^{-1}$ и $B_{ij} \underset{j \leq i}{\overset{j \geq i}{=}} 0$, $B_{ki} \underset{k \leq i}{\overset{k \geq i}{=}} 0$;

2^0. Если $\beta_i = 0$, то $B_{i\,i+1} = p_{i+1}^{-1}$ и $B_{ij} = 0$ $B_{ki} = 0$;

3^0. Если $B_{ii} = 0$ (т.е. $\alpha_i = 0$ или $\beta_i = 0$), то $B_{i+1\,i+1}$ и $B_{i-1\,i-1}$ одновременно в нуль не обращаются.

4^0. Если*) $\alpha_i = 0$ и $\beta_i = 0$, то B (и следовательно, C) особенная матрица.

Замечание I. Как уже отмечали в[2], последовательности $\{\alpha, \beta\}$ (I.6) вычисляются устойчиво по отношению к ошибкам округления на ЭВМ, если $\{|\gamma_k| \leq 1\}_{k=2}^{m}$. Из этого следует, учитывая (I.5), что и весь обратный оператор $C^{-1}=B$ может быть вычислен устойчиво при том же условии $\{|\gamma_k| \leq 1\}_{k=2}^{m}$, поскольку вычисление произведений элементов $\left\{\dfrac{r_k}{q_k}\right.$, а также $\left.\dfrac{p_k}{q_k}\right\}$ в (I.5) не является рекуррентными процедурами.

Замечание 2. Мы указывали уже в[1,2] на одну важную универсальную особенность представления (I.5), отличающую его выгодным образом от других известных[7] представлений C^{-1}. А именно, это представление одинаково справедливо как в случае всех отличных от нуля угловых миноров, так и в случае, когда некоторые из них обращаются в нуль, что обеспечивается использованием безделительных устойчивых рекуррентных процессов (I.6). При этом в[1,2] мы использовали в рассуждениях лишь качественную связь последовательностей $\{\alpha, \beta\}$ с главными угловыми минорами. Ниже мы получим и явные выражения для количественных связей между ними.

Замечание 3. Несмотря на указанные достоинства представления (I,5), оно может оказаться непригодным для практических вычислений на ЭВМ при больших порядках m матриц C в случаях, когда $\{\alpha$ и $\beta\}$ имеют характер монотонно убывающих последовательностей, хотя при этом реальные значения B_{ij} (I.5) могут и не обращаться в нуль. Поэтому в[2] было получено другое представление $C^{-1} = B$ в виде теоремы 8. Если C (I.4) - неособенная трехдиагональная матрица с отличными от нуля элементами, то элементы обратной ей матрицы $C^{-1}=B$ могут быть вычислены в общем случае устойчивым образом при $\{|\gamma_k| \leq 1\}$ в виде:

*) Этим свойством дополнена теорема 7[2] на основании свойства 3^0 теоремы 6[2].

$$
B_{ii} \stackrel{1 \le i \le m}{=\!=} \begin{cases} 0, \text{ если } \Lambda_i = 0 \text{ или(и) } G_i = 0 \\ q_i^{-1} \cdot (G_{i-1} + \Lambda_{i+1} - 1)^{-1}, \text{ если } \Lambda_i \ne 0 \ne G_i; \end{cases}
$$

$$
B_{ij} = \begin{cases} B_{ii} \cdot (-1)^{i+j} \prod\limits_{k=i}^{j-1} \eta_k, \ i < j, \text{ если } (\Lambda_i \ne 0 \ne G_i \to B_{ii} \ne 0) & \text{(I.8)} \\ B_{ii} \cdot (-1)^{i+j} \prod\limits_{k=j+1}^{i} \mu_k, \ j < i, \text{ если } (\Lambda_i \ne 0 \ne G_i \to B_{ii} \ne 0); & \text{(I.9)} \end{cases}
$$

либо

$$
B_{ij} = \begin{cases} \begin{cases} (p_{i+1}^{-1} = B_{ii+1}) \cdot (-1)^{i+j-1} \prod\limits_{k=i+1}^{j-1} \eta_k, \ i+1 \le j \le m, \ (\Lambda_i \ne 0, G_i = 0 \to B_{ii} = 0) \\ 0, \ i \le j, \text{ если } \Lambda_i = 0, \ G_i \text{ - ненулевое;} \end{cases} \\ \begin{cases} 0, \ j \le i, \text{ если } G_i = 0, \ \Lambda_i \text{ - ненулевое,} \\ (r_i^{-1} = B_{ii+1}) \cdot (-1)^{i+j-1} \prod\limits_{k=j+1}^{i-1} \mu_k, \ j+1 \le i \le m, \text{ если} \\ (G_i \ne 0, \ \Lambda_i = 0 \to B_{ii} = 0), \end{cases} \end{cases} \qquad \text{(I.10)}
$$

где:

$$
\begin{cases} \left\{ G_k = \dfrac{\beta_k}{\beta_{k+1}}; \quad \Lambda_k = \dfrac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}} \right\} \\ G_{i-1} = 1 - \gamma_{i+1} \cdot G_i^{-1}, \ G_m = G_{m-1} = 1, \quad i = m-1, \ldots, 1 \\ \Lambda_{j+1} = 1 - \gamma_j \Lambda_j^{-1}, \quad \Lambda_1 = \Lambda_2 = 1, \quad j = 3, 4, \ldots, m \\ \gamma_k = \dfrac{p_k}{q_{k-1}} \cdot \dfrac{r_k}{q_k}; \quad \gamma_1 = \gamma_{m+1} = 0; \ k = 2, 3, \ldots, m \end{cases} \qquad \text{(I.11)}
$$

$$
\begin{cases} \eta_k = \dfrac{q_k}{p_{k+1}} \left\{ (1 - G_{k-1}) = \gamma_{k+1} \cdot G_k^{-1} \right\}; \ \eta_m = 0; \ k = 1, 2, \ldots, m-1 \\ \mu_k = \dfrac{q_k}{r_k} \left\{ (1 - \Lambda_{k+1}) = \gamma_k \cdot \Lambda_k^{-1} \right\}; \ \mu_1 = 0; \ k = 2, 3, \ldots, m, \end{cases} \qquad \text{(I.12)}
$$

а также, <u>если</u>:

1°. $\Lambda_k = 0$ – изолированный нуль последовательности $\{\Lambda_k\}$, то

$$
(\Lambda_{k-1} = \gamma_{k-1}, \ \Lambda_{k+1} = \infty, \ \Lambda_{k+2} = 1) \to (\mu_{k-1} = \frac{q_{k-1}}{r_{k-1}}, \ \mu_k = \infty, \ \mu_{k+1} = 0), \text{ но } \mu_{k+1} \cdot \mu_k = -\frac{p_{k+1}}{r_k}. \qquad \text{(I.13)}
$$

2°. $G_k = 0$ – изолированный нуль последовательности $\{G_k\}$, то

$$
(G_{k+1} = \gamma_{k+2}, \ G_{k-1} = \infty, \ G_{k-2} = 1) \to (\eta_{k+1} = \frac{q_{k+1}}{p_{k+2}}, \eta_k = \infty, \eta_{k-1} = 0) \qquad \text{(I.14)}
$$

но $\eta_{k+1} \cdot \eta_k = -\dfrac{r_k}{p_{k+1}}$.

<u>Замечание 4</u>. Как следует из определения (I.II) последовательностей $\{\Lambda_k\}$ и $\{G_k\}$ (изоморфных последовательностям $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$), первые убывают медленнее, чем последние, что позволяет значительно увеличить порядок m рассматриваемых матриц. Если же устойчивые при $|\gamma_k| \le 1$ процессы (I.I4) прерываются из-за $\Lambda_i = 0 \to$ (i – нулевой верхний угловой минор), либо $G_i = 0 \to$ (i –нулевой нижний угловой минор), то их доопределение (I.I3) или (I.I4) с учетом (I.8)$_{I)}$ и (I.I0) позволяет однозначно и устойчиво (поскольку процессы (I.I2) не являются рекуррентными) вычислить $C^{-1} = B$. При этом ошибки (из-за процесса округлений на ЭВМ) внедиагональных элементов B_{ij} не превосходят ошибок B_{ii} либо (B_{ii+1} или B_{ii-1}), если $\left| \prod\limits_{k=i,i+1}^{j-1} \eta_k \right| \le 1$ и $\left| \prod\limits_{k=j+1}^{i-1,i} \mu_k \right| \le 1$.

<u>Замечание 5</u>. Следует, однако, отметить, что ни представления (I.5)-(I.7), ни (I.8)÷(I.I4) сами по себе еще не дают точных количественных связей с главными угловыми минорами матрицы C (I.4), хотя и указывают способ их построения. Эту задачу мы ниже и решим.

2. <u>Устойчивое вычисление детерминанта и главных угловых миноров трехдиагональных матриц</u>

Отметим также, что проблема главных угловых миноров важна не только в связи с вычислением определителей, но и в связи с решением задачи собственных значений и собственных функций /5,7,I0/.

В дальнейшем, следуя /7,II/, будем обозначать Δ_ℓ^n – миноры (определители матриц, получающихся из C (I.4) отбрасыванием всех строк с номерами меньше ℓ и всех столбцов с номерами больше n. Тогда, очевидно, Δ_1^n есть главные угловые миноры, начинающиеся с q_1 и Δ_ℓ^m – главные угловые миноры, начинающиеся с q_m в C (I.4), а Δ_1^m – определитель матрицы. Справедлива следующая

<u>Теорема II</u>. Пусть C –трехдиагональная матрица

$$
C = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & & \\ \hline & & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & & p_m & q_m \end{bmatrix} \qquad \text{(2.I)}
$$

с отличными от нуля элементами $\{p_k \ne 0 \ne r_k; \ q_k \ne 0; q_1 \ne 0\}_{k=2}^m$. Тогда ее главные угловые миноры – Δ_1^n, Δ_ℓ^m (и детерминант $\det(C) = \Delta_1^m$) могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1^j &= \prod_{k=1}^{j} q_k\cdot\alpha_{j+1}\\ \Delta_i^m &= \prod_{k=i}^{m} q_k\cdot\beta_{i-1}\end{aligned}\right\}\longrightarrow(\det(C)=\Delta_1^m)=(\alpha_{m+1}=\beta_o)\prod_{k=1}^{m} q_k\quad, \qquad (2.2)$$

где

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{i+1} &= \alpha_i-\gamma_i\cdot\alpha_{i-1}\\ \beta_{j-1} &= \beta_j-\gamma_{j+1}\cdot\beta_{j+1}\end{aligned}\right\}\Longleftrightarrow\left\{\begin{aligned}\alpha_{i+1} &= 1-\sum_{k=1}^{i}\gamma_k\cdot\alpha_{k-1};\quad i=1,2,\ldots,m\\ \beta_{j-1} &= 1-\sum_{k=j}^{m}\gamma_{k+1}\cdot\beta_{k+1}\quad;\quad j=m,\ldots,1\end{aligned}\right. \qquad (2.3)$$

$$\alpha_o=\alpha_1=\alpha_2=1\quad;\quad\beta_{m+1}=\beta_m=\beta_{m-1}=1$$

$$\gamma_k=\frac{p_k}{q_{k-1}}\cdot\frac{r_k}{q_k}\quad;\quad k=2,\ldots,m\quad;\quad\gamma_1=\gamma_{m+1}=0\quad,$$

а также

$$\left[(\beta_i\cdot\alpha_{i+1}-\gamma_{i+1}\cdot\alpha_i\cdot\beta_{i+1})=(\alpha_{m+1}=\mathrm{Const}^{-1}=\beta_o)\right]\Longleftrightarrow$$

$$\left[(\det(C)=\Delta_1^m)=\Delta_1^i\,\Delta_{i+1}^m-p_{i+1}\,r_{i+1}\,\Delta_1^{i-1}\cdot\Delta_{i+2}^m\right]\quad. \qquad (2.4)$$

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим равенство

$$C\cdot W=(\det(C)=\Delta_1^m)\cdot E\quad, \qquad (2.5)$$

где E – тождественный оператор, а W – присоединенная матрица, элементами W_{ij} которой являются алгебраические дополнения, получающиеся из C (2.I) вычеркиванием i-строки и j-столбца. Следуя [7,II], можем записать

$$\begin{aligned}&1^0.\ w_{ij}=\Delta_1^{i-1}\cdot\Delta_{i+1}^m\quad, &&\text{если}\quad i=j\\ &2^0.\ w_{ij}=(-1)^{i+j}\prod_{\ell=i}^{j-1} r_{\ell+1}\,\Delta_1^{i-1}\cdot\Delta_{j+1}^m\quad, &&\text{если}\quad i<j\\ &3^0.\ w_{ij}=(-1)^{i+j}\prod_{\ell=j}^{i-1} p_{\ell+1}\,\Delta_1^{j-1}\cdot\Delta_{i+1}^m\quad, &&\text{если}\quad i>j.\end{aligned} \qquad (2.6)$$

Запишем из m^2-равенств (2.5) m-диагональных, т.е.

$$\begin{aligned}&q_1 w_{11}+r_2 w_{21}=\Delta_1^m\quad, && j=1\\ &p_j\cdot w_{j-1j}+q_j\, w_{jj}+r_{j+1}w_{j+1j}=\Delta_1^m\quad, && j=2,3,\ldots,m-1\\ &p_m\cdot w_{m-1\,m}+q_m\cdot w_{mm}=\Delta_1^m\quad, && j=m.\end{aligned} \qquad (2.7)$$

Подставив в (2.7) вместо w_{ij} их соответствующие значения из (2.6), получаем

$$\begin{aligned}&(q_1\cdot\Delta_2^m-p_2r_2\Delta_3^m)\,\Delta_1^o=\Delta_1^m\quad;\quad j=1\\ &(-p_jr_j\Delta_1^{j-2}+q_j\Delta_1^{j-1})\,\Delta_{j+1}^m-p_{j+1}r_{j+1}\Delta_{j+2}^m\cdot\Delta_1^{j-1}=\Delta_1^m;\quad j=2,\ldots,m-1\\ &(q_m\Delta_1^{m-1}-p_mr_m\Delta_1^{m-2})\,\Delta_{m+1}^m=\Delta_1^m\quad;\quad j=m\quad.\end{aligned} \qquad (2.8)$$

Из (2.8) следует, что первое и последнее равенства будут согласовываться со средними (при $j=1$ и $j=m$), если положить

$$\Delta_1^{-1}=0=\Delta_{m+2}^m. \qquad (2.9)$$

Далее снова, воспользовавшись результатами [7,II], можем записать следующие рекуррентные процессы для главных угловых миноров

$$\begin{aligned}&\Delta_1^j=q_j\,\Delta_1^{j-1}-p_jr_j\,\Delta_1^{j-2}\ ;\ \Delta_1^{-1}=0\ ,\ \Delta_1^o=1;\ j=1,\ldots,m\\ &\Delta_j^m=q_j\cdot\Delta_{j+1}^m-p_{j+1}\,r_{j+1}\Delta_{j+2}^m\ ;\Delta_{m+2}^m=0,\ \Delta_{m+1}^m=1;\quad j=m\ldots,1.\end{aligned} \qquad (2.10)$$

Подставляя первые из (2.I0) равенств в (2.8), получаем следующие равенства [7]:

$$\det(C)=\Delta_1^m=\Delta_1^j\,\Delta_{j+1}^m-p_{j+1}\,r_{j+1}\Delta_1^{j-1}\cdot\Delta_{j+2}^m\quad;\quad j=1,2,\ldots,m\ , \qquad (2.11)$$

<u>Замечание 6</u>. Однородные вычислительные процессы (2.I0) для главных угловых миноров обычно, например [5,I0], используются в расчетах, но они, как видим, устойчивы при условии $\{|q_j|\le 1\quad,\ |p_jr_j|\le 1\}$, что обеспечивается не во всех встречающихся на практике задачах. Кроме того, быстрое монотонное убывание (возрастание) угловых миноров приводит к необходимости использования дополнительных [7] процедур, например, раздельного вычисления мантисс и порядков при выполнении арифметических действий с использованием для контроля устойчивости равенств (2.II). Это обстоятельство естественно снижает ценность (2.I0), как при их использовании [II] для построения $C^{-1}=B$, так и при решении проблемы собственных векторов [II], а также решения систем уравнений [7] с трехдиагональными матрицами.

Итак, при дальнейшем доказательстве теоремы мы воспользуемся тем, что с одной стороны справедливы равенства (2.5) и при этом элементы присоединенной матрицы W вычисляются по (2.6), (2.I0), (2.II), а с другой стороны, справедливы теоремы 7 и 8. Но из этого следуют равенства

$$(C\cdot B=E\ ;\ C\cdot W=\Delta_1^m\,E)\rightarrow B_{ij}=(\Delta_1^m)^{-1}\cdot W_{ij}. \qquad (2.12)$$

Другими словами, например, для нижнего треугольника имеем, воспользовавшись (I.5) и 3^{o} в (2.6),

I^{o}. $i \geqslant j$

$$B_{ij}=\mathrm{Const}\cdot(-1)^{i+j}\cdot q_j^{-1}\cdot \beta_i\cdot\alpha_j\cdot\prod_{k=j+1}^{i}\frac{p_k}{q_k}. \qquad (2.I3)$$

с другой стороны,

$$(\Delta_1^m)^{-1}\cdot W_{ij} = (\Delta_1^m)^{-1}\cdot(-1)^{i+j}\prod_{\ell=j}^{i-1}p_{\ell+1}\cdot\Delta_1^{j-1}\cdot\Delta_{i+1}^m.$$

Перепишем эти равенства в виде

$$B_{ij}=\mathrm{Const}\left\{(-1)^{i+j}\left[\prod_{k=j}^{m}q_k^{-1}\cdot\alpha_j\right]\cdot\left[\prod_{k=i+1}^{m}q_k\cdot\beta_i\right]\right\}\cdot\prod_{k=j+1}^{i}p_k$$

$$W_{ij}=\left\{(-1)^{i+j}\Delta_1^{j-1}\cdot\Delta_{i+1}^m\right\}\prod_{k=j+1}^{i}p_k,$$

откуда, подставляя их в (2.I2), получаем

$$(\mathrm{Const}\cdot\Delta_1^m)\cdot\left\{\left(\prod_{k=j}^{m}q_k^{-1}\right)\cdot\alpha_j\right\}\cdot\left\{\left(\prod_{k=i+1}^{m}q_k\right)\cdot\beta_i\right\}=\Delta_1^{j-1}\cdot\Delta_{i+1}^m,\quad i\geqslant j. \qquad (2.I4)$$

Равенство (2.I4) по сути уже устанавливает связь угловых миноров с точностью до нормировочного общего сомножителя – $\mathrm{Const}\cdot\Delta_1^m$ с элементами последовательностей $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$. Но как факторизовать этот сомножитель ? Какой при этом воспользоваться априорной информацией? Чтобы ответить на эти вопросы, запишем формальное разложение

$$\mathrm{Const}\cdot\Delta_1^m=\varphi_1\cdot\varphi_2. \qquad (2.I5)$$

Итак, пусть (2.I4) с учетом (2.I5) запишется как

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1^{j-1}&=\varphi_1\cdot\prod_{k=j}^{m}q_k^{-1}\cdot\alpha_j\\ \Delta_{i+1}^m&=\varphi_2\prod_{k=i+1}^{m}q_k\cdot\beta_i\end{aligned}\right\}. \qquad (2.I6)$$

Тогда в дополнение к первому равенству в (2.I6) имеем

$$\begin{aligned}\Delta_1^{j}&=\varphi_1\prod_{k=j+1}^{m}q_k^{-1}\cdot\alpha_{j+1},\\ \Delta_1^{j-2}&=\varphi_1\prod_{k=j-1}^{m}q_k^{-1}\cdot\alpha_{j-1}.\end{aligned} \qquad (2.I7)$$

Подставляя эти три равенства в первое равенство (2.I0), получаем

$$\varphi_1\cdot\prod_{k=j+1}^{m}q_k^{-1}\alpha_{j+1}=q_j\cdot\varphi_1\cdot\prod_{k=j}^{m}q_k^{-1}\alpha_j-p_jr_j\varphi_1\prod_{k=j-1}^{m}q_k^{-1}\cdot\alpha_{j-1}.$$

Сокращая последнее равенство на $\prod_{k=j+1}^{m}q_k^{-1}\neq 0$, получим

$$\varphi_1\cdot\alpha_{j+1}=\varphi_1\cdot\alpha_j-\varphi_1\frac{r_jp_j}{q_{j-1}q_j}\cdot\alpha_{j-1}. \qquad (2.I8)$$

Но это равенство, как мы знаем, справедливо при любых φ_1, поскольку оно определяет однородный вычислительный процесс получения последовательности $\{\alpha\}$. Итак, какой же должна быть φ_1 -константа ? Единственным источником информации при поиске ответа на поставленный вопрос могут быть начальные условия $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=1$ для последовательности $\{\alpha\}$ (2.I8) и $\Delta_1^{-1}=0$, $\Delta_1^{0}=1$ – для последовательности Δ_1^j (2.I0).
Итак, согласно определению (2.I6) и начальным условиям в (2.I0) для Δ_1^j, а также начальным условиям для $\{\alpha\}$, имеем

$$1=\Delta_1^0=\varphi_1\cdot\prod_{k=1}^{m}q_k^{-1}\alpha_1=\varphi_1\cdot\prod_{k=1}^{m}q_k^{-1}=\prod_{k=1}^{m}q_k\cdot\prod_{k=1}^{m}q_k^{-1}.$$

Следовательно, из согласования начальных условий находим, что

$$\varphi_1=\prod_{k=1}^{m}q_k. \qquad (2.I9)$$

Действительно, нетрудно убедиться, что такой выбор факторизующего множителя φ_1 в (2.I5) не противоречит значениям $\Delta_1^1=q_1$ и $\alpha_2=1$.
На самом деле

$$q_1=\Delta_1^1=\prod_{k=1}^{m}q_k\cdot\prod_{k=2}^{m}q_k^{-1}\cdot(\alpha_2=1)=q_1.$$

Окончательно получаем:

$$\Delta_1^j=\prod_{k=1}^{m}q_k\cdot\prod_{k=j+1}^{m}q_k^{-1}\cdot\alpha_{j+1}\rightarrow\Delta_1^j=\prod_{k=1}^{j}q_k\cdot\alpha_{j+1}. \qquad (2.20)$$

Пусть теперь для Δ_{i+1}^m справедливо второе равенство в (2.I6).
Тогда, очевидно, можем записать

$$\begin{aligned}\Delta_{i+1}^m&=\varphi_2\cdot\prod_{k=i+1}^{m}q_k\cdot\beta_i\\ \Delta_{i+2}^m&=\varphi_2\cdot\prod_{k=i+2}^{m}q_k\cdot\beta_{i+1}\\ \Delta_{i}^m&=\varphi_2\cdot\prod_{k=i}^{m}q_k\cdot\beta_{i-1}.\end{aligned} \qquad (2.2I)$$

Подставляя эти равенства во второе из равенств (2.I0), получаем

$$\varphi_2\cdot\prod_{k=i}^{m}q_k\cdot\beta_{i-1}=q_i\cdot\varphi_2\prod_{k=i+1}^{m}q_k\cdot\beta_i-p_{i+1}r_{i+1}\varphi_2\cdot\prod_{k=i+2}^{m}q_k\cdot\beta_{i+1}.$$

Сократив последнее равенство на $\prod_{k=i}^{m}q_k\neq 0$, получим

$$\varphi_2\cdot\beta_{i-1}=\varphi_2\cdot\beta_i-\frac{p_{i+1}}{q_i}\cdot\frac{r_{i+1}}{q_{i+1}}\varphi_2\cdot\beta_{i+1}. \qquad (2.22)$$

Но это равенство, как следует из (I.6), справедливо при любых φ_2, поскольку определяет однородный вычислительный процесс получения последовательности $\{\beta\}$. Очевидно теперь, что для выбора факторизующего

сомножителя φ_2 достаточно согласовать начальные условия $\beta_m=\beta_{m-1}=1$ для $\{\beta\}$ с начальными условиями $\Delta^m_{m+1}=1$, $\Delta^m_m=q_m$ для $\{\Delta^m_i\}$. Согласно определению (2.2I), имеем $\Delta^m_{m+1}=\varphi_2\cdot\prod_{k=m+1}^{m} q_k\,\beta_m=\varphi_2=1$. Аналогично $\Delta^m_m=\varphi_2\cdot\prod_{k=m}^{m}q_k\cdot\beta_{m-1}=\varphi_2\cdot q_m\to\varphi_2=1$.
Следовательно, множитель φ_2 в (2.I5) равен I. Итак, подставив теперь φ_1 и φ_2 в (2.I5), получаем*)

$$\mathrm{const}\,\Delta^m_1=\prod_{k=1}^{m}q_k\to\det(C)=\Delta^m_1=\prod_{k=1}^{m}q_k\cdot(\alpha_{m+1}=\beta_0). \tag{2.23}$$

Это равенство, как видим, не противоречит определениям $(2.I7)_{I)}$ и $(2.2I)_{3)}$ главных угловых миноров. Итак, мы по сути можем говорить об изоморфизме последовательностей $(2.I0)_{I)}$ и (2.I8) при $\varphi_1=\prod_{k=1}^{m}q_k$, а также $(2.I0)_{2)}$ и (2.22) при $\varphi_2=1$, и тем самым показали справедливость (2.2), (2.3). Нетрудно установить также изоморфизм равенств

$$(\beta_i\alpha_{i+1}-\gamma_{i+1}\alpha_i\beta_{i+1})\overset{(2.4)}{=}\mathrm{Const}^{-1};\ \mathrm{Const}=(\alpha^{-1}_{m+1}=\beta^{-1}_0)$$

и $$\det(C)\overset{(2.11)}{=}\Delta^m_1=\Delta^i_1\cdot\Delta^m_{i+1}-p_{i+1}\cdot r_{i+1}\cdot\Delta^{i-1}_1\cdot\Delta^m_{i+2}\ ;\ i=1,2,\dots,m \tag{2.24}$$

при условии

$$\det(C)=\Delta^m_1=\frac{\prod_{k=1}^{m}q_k}{\mathrm{const}}=\prod_{k=1}^{m}q_k\cdot(\alpha_{m+1}=\beta_0)\ . \tag{2.25}$$

На самом деле, покажем, что из равенств

$$\Delta^i_1\Delta^m_{i+1}-p_{i+1}\cdot r_{i+1}\cdot\Delta^{i-1}_1\cdot\Delta^m_{i+2}=\det(C)$$

следуют равенства

$$\alpha_{i+1}\cdot\beta_i-\gamma_{i+1}\alpha_i\beta_{i+1}=(\alpha_{m+1}=\beta_0)\quad;\quad 1\le i\le m.$$

Подставив вместо угловых миноров их выражения через α (2.I7) и β (2.2I), получаем

$$\det(C)=\Delta^i_1\Delta^m_{i+1}-p_{i+1}r_{i+1}\cdot\Delta^{i-1}_1\cdot\Delta^m_{i+2}=$$
$$=\prod_{k=1}^{m}q_k\cdot\prod_{k=i+1}^{m}q_k^{-1}\cdot\alpha_{i+1}\prod_{k=i+1}^{m}q_k\cdot\beta_i-$$
$$-p_{i+1}\cdot r_{i+1}\prod_{k=1}^{m}q_k\cdot\prod_{k=i}^{m}q_k^{-1}\cdot\alpha_i\prod_{k=i+2}^{m}q_k\cdot\beta_{i+1}=$$
$$=\prod_{k=1}^{m}q_k\left[\alpha_{i+1}\cdot\beta_i-\gamma_{i+1}\cdot\alpha_i\cdot\beta_{i+1}\right],$$

*) Тем самым установили явную зависимость введенной в /I-2/ Const. $\mathrm{Const}=\prod_{k=1}^{m}q_k\cdot 1/\det(C)$

откуда в силу определения $\det(C)$ (2.25) следует первое равенство (2.24). С другой стороны

$$(\alpha_{m+1}=\beta_0)=\alpha_{i+1}\cdot\beta_i-\gamma_{i+1}\cdot\alpha_i\cdot\beta_{i+1}=$$
$$=\prod_{k=1}^{i}q_k^{-1}\cdot\Delta^i_1\prod_{k=i+1}^{m}q_k^{-1}\Delta^m_{i+1}-\gamma_{i+1}\cdot\prod_{k=1}^{i-1}q_k^{-1}\cdot\Delta^{i-1}_1\prod_{k=i+2}^{m}q_k^{-1}\cdot\Delta^m_{i+2}=$$
$$=\prod_{k=1}^{m}q_k^{-1}(\Delta^i_1\cdot\Delta^m_{i+1}-r_{i+1}p_{i+1}\cdot\Delta^{i-1}_1\cdot\Delta^m_{i+1}),$$

откуда в силу $\det(C)$ (2.25) следует второе равенство (2.24). Итак, мы показали изоморфизм равенств (2.24) и вместе с тем закончили доказательство теоремы II.

Следствие I. Для устойчивости процессов (2.2)-(2.4) вычисления главных угловых миноров Δ^i_1 и Δ^m_i матрицы C (2.I) необходимо и достаточно, чтобы $\{|\gamma_k|\le 1\}^m_{k=2}$. Доказательство этого утверждения очевидно и непосредственно следует из указанных представлений теоремы II.

Следствие 2 (Лемма II). Трехдиагональная матрица C (2.I) с отличными от нуля элементами тогда и только тогда вырождена, если

$$1^0.\ \alpha_{m+1}=0=\beta_0\Longleftrightarrow\Delta^m_1=0,$$
$$2^0.\ \alpha_i=0=\beta_i\Longleftrightarrow\Delta^{i-1}_1=0=\Delta^m_{i+1}, \tag{2.26}$$

3^0. либо когда обращаются одновременно в нуль пары соседних членов (α_k,α_{k+1}) последовательности $\{\alpha\}$, либо (β_{k-1},β_k) последовательности $\{\beta\}$.

Доказательство пункта I^0 леммы непосредственно следует из определения (2.2) теоремы II. Из этого же определения следует, что в случае "нулевых пар" соседних членов последовательностей $\{\alpha\}$ или $\{\beta\}$ становятся нулевыми и все угловые главные миноры Δ^j_1 или Δ^m_j матрицы C (2.I) в соответствии с определениями (2.I0), а следовательно, и вырожденность матрицы C в соответствии с теоремой Лапласа /7/.
Пункт 2^0 леммы обычно в оригинальной и справочной литературе не указывается. Его доказательство непосредственно следует из изоморфизмов (2.24). Итак, лемма доказана.

Замечание 7. Лемма II, как видим, устанавливает простые конструктивные критерии вырожденности оператора C, которые непосредственно связаны с устойчивыми вычислительными процессами (2.3). Однако (и это особенно важно при выводах, которые следуют из 2^0) необходимо отличать "истинно вырожденные" матрицы, т.е. такие, для которых в соответствии с леммой 6 /2/ условия $\gamma_i(1-\gamma_{i+2})=0$ и $\gamma_{j+1}(1-\gamma_{j-1})=0$, являются необходимыми и достаточными для существования ближайших справа от $\alpha_i=0$ и слева от $\beta_j=0$ нулевых значений $\alpha_k=0$ и $\beta_n=0$ от "машинно-вырожденных". Последние могут появиться из-за замены названных выше теоретических условий их практическими аналогами, непосредственно используемыми в вычислениях, т.е. $\alpha_{i+3}=\gamma_i(1-\gamma_{i+2})\cdot\alpha_{i-1}=0$ или $\beta_{j-3}=\gamma_{j+1}(1-\gamma_{j-1})\cdot\beta_{j+1}=0$. Как видим, "машинные" нули могут появиться "преждевременно" и по причине малости α_{i-1} или β_{j+1}.

Замечание 8. В случае матриц C (I.4) с диагональным преобладанием, как это было отмечено в следствии 3 к лемме I0[2], элементы матриц $C^{-1}=B$ убывают от диагонали к первому (последнему) столбцам (на более подробном анализе этого мы еще будем останавливаться при вычислении $\|C\|$). Это в свою очередь обусловливает убывающий характер равномерно ограниченных последовательностей $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$ согласно (I.5). С другой стороны, характер поведения последовательностей $\{\alpha$ и $\beta\}$ совпадает с характером поведения последовательностей $\{\Delta_1^j$ и $\Delta_i^m\}$ с точностью до сомножителей $\{\prod_{k=1}^{j} q_k$ и $\prod_{k=i}^{m} q_k\}$, как это следует из (2.2). Полностью изометричными эти последовательности будут лишь для матриц, у которых $\{q_k=1\}_{k=1}^{m}$. Если $\{|q_k|>1\}_{k=1}^{m}$, то очевидно из-за (2.3) последовательности $\{\Delta_1^j$ и $\Delta_i^m\}$ будут по модулю возрастать быстрее, чем убывают последовательности $\{\alpha$ и $\beta\}$ и наоборот, если $\{|q_k|<1\}$, то убывать по модулю быстрее, чем $\{\alpha$ и $\beta\}$. Следовательно, представление (2.2), (2.3) для угловых миноров позволяет увеличить максимальный порядок m при их изучении, особенно если $\{q_k=q\}_{k=1}^{m}$ по сравнению с известными[7] численными процедурами (2.I0). Улучшить (практически снять ограничение на порядок m) ситуацию позволяет следующая теорема.

Следствие 3 (теорема I2). Если C -трехдиагональная матрица вида (2.I) с отличными от нуля элементами, то ее главные угловые миноры могут быть представлены как

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1^j &= \prod_{k=1}^{j} q_k\cdot\prod_{k=1}^{j+1}\Lambda_k \\ \Delta_i^m &= \prod_{k=i}^{m} q_k\cdot\prod_{k=i-1}^{m} G_k \end{aligned}\right\}\Rightarrow \det(C)=\prod_{k=1}^{m} q_k\cdot\left(\prod_{k=1}^{m+1}\Lambda_k=\prod_{k=0}^{m} G_k\right) \tag{2.27}$$

где

$$\left\{\begin{aligned} G_{i-1} &= 1-\gamma_{i+1}G_i^{-1}; \quad G_m=G_{m-1}=1; \quad i=m-1,\dots,1 \\ \Lambda_{j+1} &= 1-\gamma_j\cdot\Lambda_j^{-1}; \quad \Lambda_1=\Lambda_2=1; \quad j=3,\dots,m \\ \gamma_k &= \frac{p_k}{q_{k-1}}\cdot\frac{r_k}{q_k}; \quad k=2,\dots,m. \end{aligned}\right. \tag{2.28}$$

При этом, если:

$$\begin{aligned} &1^0.\ \Lambda_k=0\to\Lambda_{k+2}=1,\ \Lambda_{k-1}=\gamma_{k-1},\ \Lambda_{k+1}=\infty,\ \text{но}\ \Lambda_k\cdot\Lambda_{k+1}=-\gamma_k. \\ &2^0.\ G_k=0\to G_{k-2}=1,\ G_{k+1}=\gamma_{k+2},\ G_{k-1}=\infty,\ \text{но}\ G_k\cdot G_{k-1}=-\gamma_{k+1}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Доказательство теоремы очевидно следует из (2.2) и (2.3) и теоремы 8 (I.8)-(I.I4), поскольку выполняются формальные равенства

$$\alpha_{j+1}=\prod_{k=1}^{j+1}\left(\Lambda_k=\frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}}\right)\ \text{и}\ \beta_{i-1}=\prod_{k=i-1}^{m}\left(G_k=\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}}\right), \tag{2.30}$$

в силу начальных условий в (2.3) для $\{\alpha, \beta\}$ и в (I.II) для $\{\Lambda$ и $G\}$. При этом следует иметь в виду, что

$$\alpha_{j+1}=\prod_{k=1}^{j+1}\Lambda_k=\begin{cases} 0, & \text{если}\ \Lambda_{j+1}=0 \\ \Lambda_1\cdot\Lambda_2\cdots(\Lambda_k\cdot\Lambda_{k+1})\cdot\Lambda_{k+2}\cdots\Lambda_j\cdot\Lambda_{j+1}\neq 0, & \\ \text{если}\ \Lambda_k=0\ \text{для любого}\ 3\le k\le j & \end{cases} \tag{2.31}$$

$$\beta_{i-1}=\prod_{k=i-1}^{m} G_k=\begin{cases} 0, & \text{если}\ G_{i-1}=0 \\ G_{i-1}G_iG_{i+1}\cdots(G_{k-1}G_k)G_{k+1}\cdots G_m\neq 0, & \\ \text{если}\ G_k=0\ \text{для любого}\ i\le k\le m-2. & \end{cases} \tag{2.32}$$

Отметим, что введение в[2] формальных обозначений (2.30) привело к необходимости введения доопределений (2.29), поскольку используются процессы (2.28) вместо безделительных процессов (2.3). Однако, если бы в[2] нами были использованы вместо (2.28) процессы

$$G_{k-1}G_k=G_k-\gamma_{k+1}\quad \text{и}\quad \Lambda_{k+1}\cdot\Lambda_k=\Lambda_k-\gamma_k, \tag{2.33}$$

то доказательство доопределений (2.29) можно было бы выполнить более просто, чем это было сделано в[2]. А именно: Пусть

$$(G_k=0,\ \Lambda_k=0)\longrightarrow(G_{k-1}\cdot G_k=-\gamma_{k+1},\ \Lambda_{k+1}\cdot\Lambda_k=-\gamma_k).$$

С другой стороны, имеют место формальные равенства

$\Lambda_{k+2}\cdot\Lambda_{k+1}=\Lambda_{k+1}-\gamma_{k+1}=(1-\gamma_k\Lambda_k^{-1})-\gamma_{k+1}$ и $G_{k-2}G_{k-1}=G_{k-1}-\gamma_k=(1-\gamma_{k+1}\cdot G_k^{-1})-\gamma_k$,

из которых с учетом ($\Lambda_k=0$ и $G_k=0$), получаем

$$\begin{aligned} G_{k-2}\cdot G_{k-1}\cdot G_k &= -\gamma_{k+1}\xrightarrow{(2.33)} G_{k-2}=1 \\ \Lambda_{k+2}\cdot\Lambda_{k+1}\cdot\Lambda_k &= -\gamma_k\xrightarrow{(2.33)}\Lambda_{k+2}=1 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Теорема доказана.

Учитывая, что процессы (2.28) устойчивы, на что неоднократно указывалось ранее, при $\{|\gamma_k|\le 1\}$, приходим к следующему выводу.

Заключение

Используя результаты нетрадиционного подхода[I-3] к изучению свойств трехдиагональных операторов, мы получили новые представления (2.3)÷(2.4) и (2.27)÷(2.29) для главных угловых миноров, устойчивые при условии $\{|\gamma_k|\le 1\}_{k=2}^{m}$. При этом выражения (2.27)÷(2.29) представляют собой своеобразный способ автоматического численного кодирования (= факторизации) угловых миноров при любых сколь угодно больших порядках - m матрицы C (2.I) в виде элементов ограниченных последовательностей $\{q_k$ и G_k , $\Lambda_k\}$. Другими словами, последнее представление снимает известное ограничение на величину миноров (как функцию от m -порядка матрицы C (2.I) при вычислении их на ЭВМ по известным[7] рекуррентным формулам (2.I0). Кроме того, нами получены простые конструктивные критерии (2.26), если к тому же учесть представления (2.30) вырожденности трехдиагональных матриц.

Автор искренне признателен члену-корреспонденту АН СССР профессору Н.Н.Говоруну за интерес к настоящей серии работ и представленную возможность работы над ней.

Литература

I. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, PII-85-304, Дубна, I985.
2. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, PII-85-488, Дубна, I985.
3. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, PII-85-489, Дубна, I985.
4. Дж.Х.Уилкинсон. Алгебраическая проблема собственных значений. М., "Наука", I970.
5. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры.-М.,"Наука", I977.
6. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений.М.,"Наука", I984.
7. Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Трехдиагональные матрицы и их приложения. М.,"Наука", I985.
8. Беллман С.Р. Введение в теорию матриц. М.,"Наука", I969.
9. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Я. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М,"Наука", I983.
I0. Марчук Г.И., Колесов Б.Е. Применение численных методов для расчета нейтронных сечений. М., Атомиздат, I970.
II. Бухбергер Б., Емельяненко Г.А. ЖВМ и МФ, I973, т.I3, № 3; ОИЯИ, PII-5686, Дубна, I97I.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июля I986 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Емельяненко Г.А. P11-86-531

О свойствах систем линейных уравнений с неособенными трехдиагональными, ленточными и квазитрехдиагональными матрицами. Вычисление главных угловых миноров трехдиагональных матриц

На основе подхода /1-3/ к изучению свойств трехдиагональных матриц получены нетрадиционные представления для главных угловых миноров /и определителя/, а также конструктивные критерии вырожденности матриц.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Emelyanenko G.A. P11-86-531

On the Properties of Systems of Linear Equations with Non-Singular Tridiagonal, Band and Quasitridiagonal Matrices. The Calculation of Main Corner Minors of the Tridiagonal Martices

On the basis of the approach (1-3) to the investigation of the properties of tridiagonal matrices the non-traditional properties of main corner minors (and determinant) and the construtive criteria of the singular matrices are obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986