

**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P11-86-522

П.Г.АКИШИН

**ОБ ОДНОЙ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ
GFUN - МЕТОДА**

1986

Пусть $\bar{B}(\bar{x})$ — индукция магнитного поля в т. \bar{x} ; $\bar{H}(\bar{x})$ — напряженность; $\bar{M}(\bar{x})$ — магнитный момент; $\mu = \mu(|\bar{B}(\bar{x})|)$ — магнитная проницаемость; $\bar{H}^S(\bar{x})$ — поле от токовых элементов, вычисляемое по закону Био-Савара. Пусть G — область, заполненная железом. Интегральная постановка задачи магнитостатики в трехмерном случае имеет вид $/1/$:

$$\bar{H}(\bar{a}) = \bar{H}^S(\bar{a}) + \frac{\nabla \bar{a}}{4\pi} \left[\int_G (\bar{M}(\bar{x}), \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|}) dv_{\bar{x}} \right]. \quad (1)$$

Величины \bar{H} , \bar{M} , \bar{B} связаны следующим соотношением:

$$\bar{H}(\bar{x}) = \frac{\bar{B}(\bar{x})}{\mu(|\bar{B}(\bar{x})|)\mu_0} \quad (2)$$

$$\bar{M}(\bar{x}) = \frac{\bar{B}(\bar{x})}{\mu_0} - \bar{H}(\bar{x}) \quad (3)$$

где μ_0 — абсолютная магнитная проницаемость вакуума.

Рассмотрим метод, разработанный и реализованный в $/1/$ в виде пакета программ $BFUN$. Разобьем G на подмножества G_i :

$$G = \bigcup_{i=1}^N G_i.$$

Мера пересечения G_i с G_j равна нулю при $i \neq j$. В каждом G_i выберем точку наблюдения \bar{a}_i (в $/1/$ в качестве \bar{a}_i берется центр масс G_i). Будем считать $\bar{M}(\bar{x})$ в каждом G_i постоянным и равным \bar{M}_i . Тогда дискретизованная система из $/1/$ имеет следующий вид:

$$\frac{\bar{M}_i}{\mu(|\bar{M}_i|) - 1} = \bar{H}^S(\bar{a}_i) + \sum_{j=1}^N \frac{\nabla \bar{a}_j}{4\pi} \left[\int_{G_j} (\bar{M}_j, \nabla_{\bar{a}_j} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}_j|}) dv_{\bar{x}} \right]_{\bar{a} = \bar{a}_i} \quad (4)$$

$$i = 1, \dots, N.$$

Магнитная проницаемость μ в (4) предполагается заданной как функция $|\bar{M}|$.

Выражая \bar{H} и \bar{M} через \bar{B} , получаем постановку из $/2/$:

$$\frac{\bar{B}_i}{\mu(|\bar{B}_i|) - 1} = \mu_0 \bar{H}^S(\bar{a}_i) + \sum_{j=1}^N \frac{\nabla \bar{a}_j}{4\pi} \left[\int_{G_j} (\bar{B}_j (1 - \frac{1}{\mu(|\bar{B}_j|)}) , \nabla_{\bar{a}_j} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}_j|}) dv_{\bar{x}} \right]_{\bar{a} = \bar{a}_i}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5)$$

§ I. Вычисление коэффициентов матриц дискретизованных систем

Для записи дискретизованных систем (4), (5) необходимо вычислить интегралы вида

$$J_k = \nabla_{\bar{a}} \int_{G_k} (\bar{m}, \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|}) dv_{\bar{x}} \quad (6)$$

где $\bar{m} \equiv \text{const}$.

В этом параграфе излагается метод, позволяющий существенно сократить затраты машинного времени на вычисление коэффициентов дискретизованных систем.

Потребуем от разбиения области G на G_i выполнения следующих условий:

1. $\{G_i\}$ - выпуклые многогранники (предполагается, что G можно разбить на объединение $\{G_i\}$).
2. Многогранники G_i и G_j при $i \neq j$ либо не пересекаются совсем, либо пересекаются только ровно по одной грани, либо ровно по одному ребру, либо по одной вершине.

Интеграл J_k из (6) сводится на границу G_k :

$$J_k = \oint_{DG_k} (\bar{m} d\bar{s}_x) \nabla_{\bar{x}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|} \quad (7)$$

Пусть s_1, s_2, \dots, s_L - грани G_k , $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_L$ - внешние нормали соответственно к s_1, s_2, \dots, s_L .

Имеем

$$J_k = \sum_{i=1}^L (\bar{m}, \bar{n}_i) \int_{s_i} \nabla_{\bar{x}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|} ds_{\bar{x}} \quad (8)$$

Представим $\nabla_{\bar{x}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|}$ в виде

$$\nabla_{\bar{x}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|} = \bar{n}_i (\bar{n}_i, \nabla_{\bar{x}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|}) + \tilde{\nabla}_{\bar{x}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|} \quad (9)$$

где $\tilde{\nabla}_{\bar{x}}$ - градиент по переменным в плоскости s_i . Интеграл

$\int_{s_i} (\bar{n}_i, \nabla_{\bar{x}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|}) ds_{\bar{x}}$ с точностью до знака равен телесному углу, под которым видна грань s_i из точки \bar{a} . Интеграл $\int_{s_i} \tilde{\nabla}_{\bar{x}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|} ds_{\bar{x}}$ можно редуцировать к интегралу по границе грани s_i . Пусть

$l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_M}$ - ребра грани s_i . Пусть $\hat{n}_{i_1}, \hat{n}_{i_2}, \dots, \hat{n}_{i_M}$ - внешние нормали к s_i соответственно на ребрах $l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_M}$.

Интеграл $\int_{s_i} \tilde{\nabla}_{\bar{x}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|} ds_{\bar{x}}$ равен

$$\int_{s_i} \tilde{\nabla}_{\bar{x}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|} ds_{\bar{x}} = \sum_{j=1}^M \hat{n}_{i_j} \int_{l_{i_j}} \frac{dl_{\bar{x}}}{|\bar{x}-\bar{a}|} \quad (10)$$

Отсюда следует, что интеграл J из (8) представляется в виде линейной комбинации $\{J_{i_j}\}$ и телесных углов $\{\Omega_i\}$:

$$J_{i_j} = \int_{l_{i_j}} \frac{dl_{\bar{x}}}{|\bar{x}-\bar{a}|} \quad (11)$$

$$\Omega_i = \int_{s_i} (\bar{n}_i, \nabla_{\bar{x}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|}) ds_{\bar{x}}.$$

Нетрудно заметить, что если разбиение области G удовлетворяет вышеуказанным условиям, то многие элементы имеют общие грани и общие ребра. Отсюда следует, что если предварительно вычислить все необходимые

величины типа $\int_{s_i} (\bar{n}_i, \nabla_{\bar{x}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|}) ds_{\bar{x}}$, $\int_{l_{i_j}} \frac{dl_{\bar{x}}}{|\bar{x}-\bar{a}|}$, то можно существенно ускорить процесс вычисления коэффициентов матриц дискретизованных уравнений (4), (5), так как каждая внутренняя грань входит в два элемента, а каждое внутреннее ребро в несколько элементов.

§ 2. Решение дискретизованных уравнений

Рассмотрим интегральный оператор, стоящий в правой части (I):

$$A(\bar{m}) = - \frac{\nabla_{\bar{a}}}{4\pi} \left[\int_G (\bar{m}(\bar{x}), \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|}) dv_{\bar{x}} \right] \quad (12)$$

Имеет место следующая теорема [3]:

Теорема I. Оператор A ограничен с $\|A\|_G = 1$. Оператор A самосопряжен. Для оператора A имеет место неравенство

$$(A(\bar{m}), \bar{m})_G \geq 0.$$

Из теоремы I следует, что существуют $\bar{m}(\bar{x})$, на которых оператор $A(\bar{m})$ зануляется. Если дискретный аналог оператора A в (4), (5) сохраняет это свойство, то при больших значениях магнитной проницаемости системы (4), (5) становятся плохо обусловленными.

Если $\text{div}(\bar{m}(\bar{x})) \equiv 0$, и $\bar{m}(\bar{x})$ ортогонально внешней нормали $\bar{n}(\bar{x})$ на границе DG , тогда $A(\bar{m}) \equiv 0$.

Оказывается, во многих случаях дискретный аналог Λ обладает такими же нулевыми собственными векторами. Для простоты рассмотрим случай, когда область G разбивается на тетраэдры ($G = \bigcup_{i=1}^N G_i$). Пусть $\{P_j\}$ — совокупность вершин всех тетраэдров G_i . Пусть $\{\tilde{P}_j\}$ — внутренние вершины, а $\{\tilde{P}_k\}$ — граничные вершины. Определим функцию $\varphi(x)$, непрерывную на G и линейную на каждом тетраэдре G_k . Пусть φ_k — значение $\varphi(\bar{x})$ в вершине \tilde{P}_k . Потребуем, чтобы $\varphi(\tilde{P}_k) = 0$ для любой граничной вершины.

Рассмотрим следующую вектор-функцию $\bar{M}(x)$:

$$\bar{M}(\bar{x}) = \text{Rot}(\bar{e} \varphi(\bar{x})) \quad (I3)$$

где $\bar{e} \equiv \text{const}$.

Очевидно, $\bar{M}(\bar{x})$ — постоянна на каждом G_k . Имеет место теорема:

Теорема 2. Оператор $\Lambda(\bar{M})$ из (I2) тождественно равен нулю для $\bar{M}(\bar{x})$ из (I3).

Доказательство. Пусть \bar{M}_k — значения $\bar{M}(\bar{x})$ на G_k . Из (I2) следует

$$\Lambda(\bar{M}) = \sum_{k=1}^N \frac{\nabla \bar{a}}{4\pi} \int_{G_k} (\bar{M}_k, \nabla \bar{a} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|}) dv_{\bar{x}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \oint_{DG_k} (\bar{M}_k, d\bar{s}_x) \nabla \bar{x} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \quad (I4)$$

Пусть S_i — внутренняя грань разбиения G . Пусть k грани $S_i (P_{j1}, P_{j2}, P_{j3})$ прилегают тетраэдры $G_{i1} (\tilde{P}_{j1}, \tilde{P}_{j2}, \tilde{P}_{j3}, \tilde{P}_{j4})$ и $G_{i2} (\tilde{P}_{j1}, \tilde{P}_{j2}, \tilde{P}_{j3}, \tilde{P}_{j5})$ (рис. I).

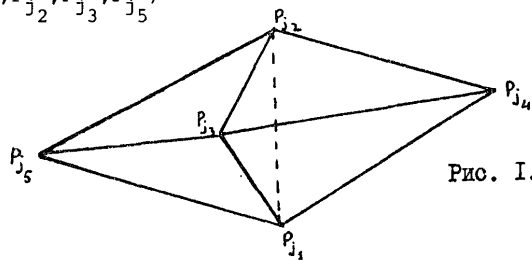


Рис. I. Пример расположения внутренней грани.

Пусть \bar{n} — внешняя нормаль к S_i в G_{i1} , тогда $-\bar{n}$ будет внешней нормалью к S_i в G_{i2} . Интеграл по S_i , входящий в (I4), равен

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S_i} (\bar{n}, (\bar{M}_{i1} - \bar{M}_{i2})) \nabla \bar{x} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} dS_{\bar{x}} \quad (I5)$$

Покажем, что $(\bar{n}, (\bar{M}_{i1} - \bar{M}_{i2})) = 0$.

Введем декартову систему координат, связанную с гранью S_i . Пусть оси Ox, Oy лежат в S_i , а ось Oz направлена по \bar{n} . Из непрерывности $\varphi(\bar{x})$ и линейности в каждом G_k следует, что в G_{i1} $\varphi(\bar{x})$ можно представить в виде

$$\varphi(x) = a_0 + x a_x + y a_y + z a_z \quad (I6)$$

Аналогично в G_{i2} $\varphi(x)$ представляется в виде

$$\varphi(x) = a_0 + x a_x + y a_y + z a_z \quad (I7)$$

Из (I6), (I7) следует

$$\bar{M}_{i1} - \bar{M}_{i2} = [\bar{e} \times \bar{n} (a_{z1} - a_{z2})] \quad ,$$

и, очевидно, $(\bar{M}_{i1} - \bar{M}_{i2}, \bar{n}) = 0$.

Из условия постоянства $\varphi(x)$ на границе G для каждой граничной S_k аналогично показывается ортогональность внешней нормали \bar{n} для этой грани к соответствующему ей \bar{M}_{ik} . Теорема 2 доказана.

Отсюда следует, что в случае разбиения G на тетраэдры интегральные операторы в правой части (4), (5) имеют по крайней мере 3 L нулевых собственных значений, где L — количество внутренних вершин разбиения G .

Обобщение теоремы 2 на случай разбиения G на многогранники более сложной формы затруднительно. Покажем, что существуют \bar{M} , такие, что $\Lambda(\bar{M})$ из (I2) тождественно равен нулю в случае разбиения G на треугольные призмы. Пусть G для простоты состоит из 4 призм с образующими параллельные оси Oy (рис. 2).

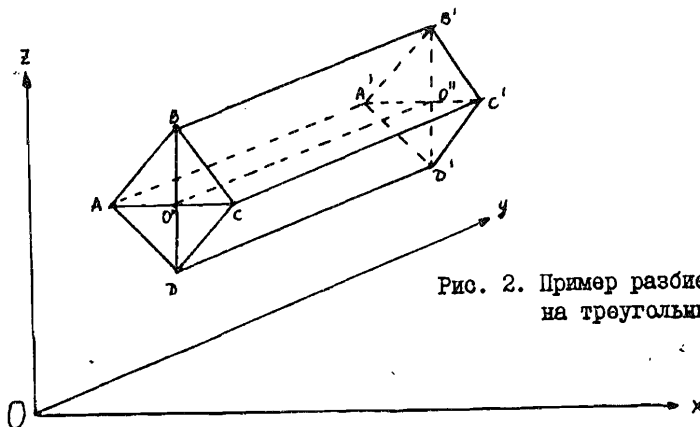


Рис. 2. Пример разбиения области на треугольные призмы.

Пусть $\varphi(\bar{x})$ тождественно равна 1 на ребре oo'' и 0 на ребрах aa' , bb' , cc' , dd' и линейна в каждой из 4 призм. Пусть вектор \bar{e} параллелен оси oy . Тогда если в качестве $\bar{m}(\bar{x})$ взять $\bar{m} = [\bar{e} \Delta \varphi]$, то $A(\bar{m}) \neq 0$. Отсюда следует, что при больших значениях μ в рассмотренных случаях дискретизованные системы (4), (5) плохо обусловлены.

Введём следующие обозначения:

$$\hat{B} = (\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_N)^T$$

$$\hat{M} = (\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_N)^T$$

$$\hat{H}^S = (H^S(a_1), H^S(a_2), \dots, H^S(a_N))^T$$

$$\tilde{M} = \left(\frac{\bar{M}_1}{\mu(|\bar{M}_1|)^{-1}}, \frac{\bar{M}_2}{\mu(|\bar{M}_2|)^{-1}}, \dots, \frac{\bar{M}_N}{\mu(|\bar{M}_N|)^{-1}} \right)^T.$$

Тогда систему (4) можно записать в виде

$$\tilde{M} = \hat{H}^S + [A]\hat{M}. \quad (18)$$

Аналогично систему (5) можно записать в виде

$$\frac{\hat{B}}{\mu_0} = \hat{H}^S + ([E] + [A])\hat{M}, \quad (19)$$

где $[E]$ — единичная матрица.

В предположении ограниченности магнитного момента \bar{m} в /4/ доказывается теорема существования решения дискретизованных систем (4), (5).

Для решения (19) использовался итерационный процесс из /5/:

$$\hat{B}_{k+1} = \mu_0 (\hat{H}^S + ([E] + [A])\hat{M}_k) \quad (20)$$

$$\hat{M}_0 = \bar{0} \quad k=0, 1, 2, \dots, N.$$

§ 3. Численные эксперименты

Данная методика использовалась для создания комплекса программ расчета трехмерных магнитоэстатических полей. Расчеты проводились для дипольных магнитных систем, имеющих две плоскости симметрии поля и одну плоскость антисимметрии с токовыми обмотками типа "ведстед" /6/. В качестве базисных элементов брались треугольные призмы. На рис. 3, 4 приведено сравнение результатов расчета по данной методике с расчетами по пакету программ "GFUN3D".

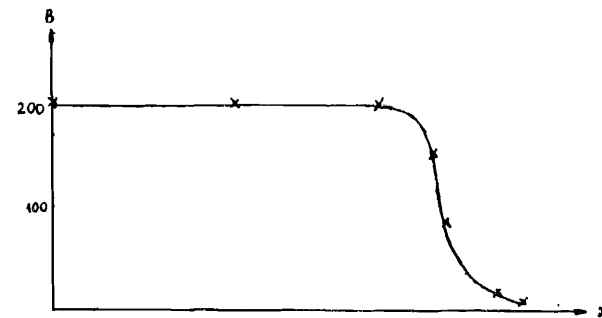


Рис. 3.
x- расчеты по GFUN3D.

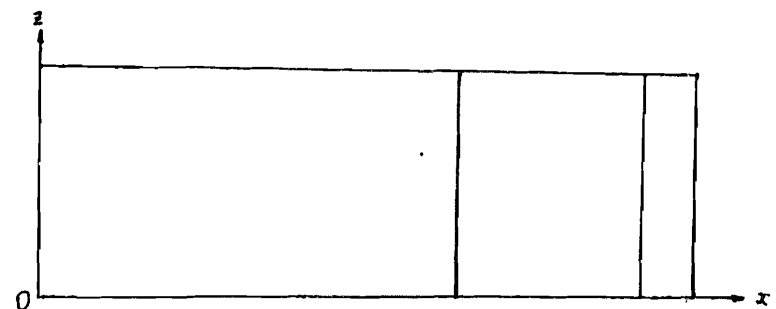
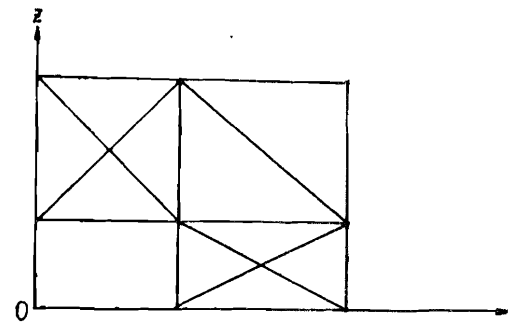


Рис. 4.
Использованные способы разбиения ярма магнита на треугольные призмы.

Проводились также модельные расчеты дипольного магнита при различных разбиениях ядра магнита. В таблице приведены время центрального и периферийного процессоров ЭВМ сдс-6500.

Таблица

Число элементов разбиения	Число точек перерасчета поля	Время центрального процессора сдс-6500 (с)	Время периферийного процессора сдс-6500 (с)
30	30	201	229
100	40	1264	413
120	110	2037	433

Автор выражает благодарность профессору Е.П.Жидкову за поддержку во время выполнения работы, В.Д.Кравцову и О.И.Кудашеву за стимулирующие дискуссии.

Литература

1. Trowbridge C.W. et al. GFUN3D User GUIDE, RL-76-029/A.
2. Akishin P.G., Vorozhtsov S.B., Zhidkov E.P. JINR, E9-11859, Dubna, 1978.
3. Friedman M.J. Mathematical Study of the Nonlinear Singular Integral Magnetic Field Equation. SIAM. J. Appl. Math. Vol.39, 1980, pp.14-20.
4. Акишин П.Г., Жидков Е.П. ОИЯИ, PII-81-826, Дубна, 1981.
5. Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. ОИЯИ, PII-85-552, Дубна, 1985.
6. Борисовская З.В., Ворожцов С.Б., Дударева Т.Н. ОИЯИ, 9-81-304, Дубна, 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 июля 1986 года.

Акишин П.Г. P11-86-522
Об одной программной реализации GFUN-метода

Исследуются вопросы вычисления коэффициентов матриц, возникающие при дискретизации интегральных уравнений магнитостатики в трехмерном случае. Доказывается существование нулевых собственных векторов у дискретизованного оператора. Получено совпадение расчетов поля у дипольного магнита по данной методике с расчетами по программе GFUN3D. Метод может быть рекомендован для широкого класса трехмерных задач магнитостатики.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Akishin P.G. P11-86-522
About One Programming Realization of GFUN Method

Some problems arising in the process of discretization three-dimensional integral equations of magnetostatics are investigated. The theorem about the existence of zero eigenvector of discretization operator is proved. The results of calculating fields of dipole magnet are in good agreement with calculations by GFUN3D program. The method could be recommended for a wide class of three-dimensional problems of magnetostatics.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986