86-504

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р11-86-504

Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов*

О СВОЙСТВАХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОСОБЕННЫМИ ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫМИ, ЛЕНТОЧНЫМИ И КВАЗИТРЕХДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

Свойства матриц, обратных к квазитрехдиагональным

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

* ИЯИ АН УзССР, Ташкент

1986

Введение

Настоящая работа является продолжением серии работ[1÷3] и содержит обобщения ранее полученных в[2,3] результатов на случай квазитрехдиагональных матриц.

Необходимость такого исследования продиктована многими приложениями. Этот аппарат используется, как уже неоднократно отмечалось (например, в[4,5,6]), для повышения эффективности вычислительных методов кинематического анализа информации в физике высоких энергий. Кроме того, системы линейных уравнений с матрицами квазитрехдиагонального вида появляются при использовании разностных методов для решения различных типов краевых задач. Обширная информация по этому вопросу имеется, например, в монографии[7]. Разновидностью квазитрехдиагональных матриц являются так называемые ленточные матрицы и особенно пятидиагональные. С ними сталкиваются не только при численных решениях краевых задач, но и при решении задачи сплайн-аппроксимации, например,[8-10] и другие.

Поэтому в литературе имеется довольно обширный набор сведений о свойствах этих операторов. Однако потребности практики приводят к необходимости проведения дополнительных исследований в этом разделе вычислительной алгебры, достаточно назвать, например,[11]. Многие из полезных, известных уже результатов можно найти в таких монографиях, например*, как[12-14].

Ниже будут доказаны некоторые из результатов, которые, по-видимому, дополнят уже известные в оригинальной и обзорной литературе.

* Мы, естественно, не преследуем цель привести всю известную библиографию по обсуждаемому вопросу, поскольку настоящая статья не претендует на обзорный характер.

I. Свойства матриц, обратных к неособенным квазитрехдиагональным, с отличными от нуля квазиминорами

Итак, пусть матрица C (I.I) – неособенная квазитрехдиагональная, такая, что все ее элементы – блоки $\{q_i\}_{i=1}^m$, $\{r_i, p_i\}_{i=2}^m$ есть квадратные неособенные подматрицы.

$$C = \begin{pmatrix} q_1 & r_2 & & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & & p_m & q_m \end{pmatrix}, \qquad \text{(I.I)}$$

представим C в виде** $C=C'\cdot D$:

$$C=(C'D)=\begin{pmatrix} E & r_2^* & & & & \\ p_2^* & E & r_3^* & & & \\ & p_3^* & E & r_4^* & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & p_{m-1}^* & E & r_m^* \\ & & & & p_m^* & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 & & & & \\ & q_2 & & & \\ & & q_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & q_{m-1} & \\ & & & & & q_m \end{pmatrix}, \qquad \text{(I.2)}$$

где $\{p_k^*=p_k\, q_{k-1}^{-1}\}_{k=2}^m$, $\{r_k^*=r_k\, q_k^{-1}\}_{k=2}^m$. (I.2′)

Поскольку $\{q_i\}_{i=1}^m$, $\{p_i, r_i\}_{i=2}^m$ – неособенные квадратные матрицы одинаковых размерностей, следовательно, $\{p_i^*, r_i^*\}_{i=2}^m$, E – единичная матрица, тоже неособенные квадратные матрицы одинаковых размерностей. Справедлива следующая

Теорема I. Если C'-неособенная квазитрехдиагональная матрица вида (I.2), (I,2′), все подматрицы-блоки $\{r_i^*, p_i^*, E\}_{i=2}^m$ которой неособенны, а также неособенны все квазиминоры у C', тогда для ее обратной матрицы $B=(C')^{-1}$ справедливо представление

** Здесь и везде далее рассматривается именно правая факторизация C.

$$
B_{ij} = \begin{cases} (-E)^{i+j}\cdot B_{ii}\cdot\alpha_i^{-1}\alpha_j\cdot\prod\limits_{k=j+1}^{i} p_k^{*}, & i \geq j \\ (-E)^{i+j}\cdot B_{ii}\cdot\beta_i^{-1}\cdot\beta_j\cdot\prod\limits_{k=i+1}^{j} r_k^{*}, & i \leq j \\ B_{ii}, \quad i=j. \end{cases} \tag{I.3}
$$

Здесь $B_{ii} = \left[(\alpha_i^{-1}\cdot\alpha_{i+1}) + (\beta_i^{-1}\beta_{i-1}) - E\right]^{-1}, \quad i=1,2,\dots,m,$ (I.4)

где

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i - \alpha_{i-1}(p_i^{*}\cdot r_i^{*}), \quad \alpha_1=\alpha_2=E, \quad i=2,3,\dots,m, \tag{I.5}$$

$$\beta_{i-1} = \beta_i - \beta_{i+1}(r_{i+1}^{*}\cdot p_{i+1}^{*}), \quad \beta_m=\beta_{m-1}=E, \quad i=m-1,\dots,1, \tag{I.6}$$

а $\{p_i^{*}\}_{i=2}^{m}$, $\{r_i^{*}\}_{i=2}^{m}$ определены (I.2)'.

<u>Доказательство</u>. Для доказательства*) справедливости представления $(C')^{-1}$ (I.3)÷(I.6) обратной матрицы проверим, удовлетворяет ли $B(1.3)$ основному равенству

$$(C')^{-1} = B$$

$$C'\cdot B = E. \tag{*}$$

Проверка равенства (*), как и в скалярном случае /I/, эквивалентна выполнению систем равенств:

$$B_{ij+1}\cdot p_{j+1}^{*} + B_{ij}\cdot E + B_{ij-1}\cdot r_j^{*} = \mathcal{O}, \quad 1 \leq i < j+1 \leq m,$$

$$B_{ii-1}\cdot r_i^{*} + B_{ii}\cdot E + B_{ii+1}\cdot p_{i+1}^{*} = E, \quad 1 \leq i=j \leq m, \tag{I.7}$$

$$B_{ij-1}\cdot r_j^{*} + B_{ij}\cdot E + B_{ij+1}p_{j+1}^{*} = \mathcal{O}, \quad 1 \leq j-1 < i \leq m$$

где E – единичная, $\mathcal{O}$ –нулевая матрицы, размерности которых совпадают с размерностями $\{r_i^{*}, \; p_i^{*}\}_{i=2}^{m}$.

Подставим выражение для B_{ij}, т.е. для элементов верхнего треугольника обратной матрицы $B(1.3)$ в первую систему равенств (I.7).

*) Представление (I.3) получить весьма сложно, исходя из техники, использованной нами ранее /I,2/ для скалярного случая, в силу некоммутативности умножения матриц. Оно было получено нами, исходя из "метода аналогий", как это было уже ранее отмечено в /3/.

Итак, имеем для $i < j+1$

$$\left[(-E)^{i+(j+1)}\cdot B_{ii}\cdot\beta_i^{-1}\cdot\beta_{j+1}\cdot\prod_{k=i+1}^{j+1} r_k^{*}\right]\cdot p_{j+1}^{*} + \left[(-E)^{i+j}B_{ii}\cdot\beta_i^{-1}\cdot\beta_j\cdot\prod_{k=i+1}^{j} r_k^{*}\right]\cdot E +$$

$$+ \left[(-E)^{i+(j-1)}\cdot B_{ii}\beta_i^{-1}\beta_{j-1}\cdot\prod_{k=i+1}^{j-1} r_k^{*}\right]\cdot r_j^{*} = \mathcal{O}.$$

Эти равенства, очевидно, эквивалентны равенствам

$$-\beta_{j+1}\cdot\left[\prod_{k=i+1}^{j+1} r_k^{*}\right]\cdot p_{j+1}^{*} + \beta_j\cdot\left[\prod_{k=i+1}^{j} r_k^{*}\right] - \beta_{j-1}\cdot\left[\prod_{k=i+1}^{j-1} r_k^{*}\right]\cdot r_j^{*} = \mathcal{O}, \tag{I.8}$$

в силу неособенности $(-E)^{i+j}\cdot B_{ii}\cdot\beta_i^{-1}$ при любых i и j из интервалов $1 \leq i < j+1 \leq m$. Но условие (I.8), очевидно, будет также справедливо, если вместо j подставить i. Другими словами, равенства (I.8) будут справедливыми для всех наддиагональных элементов обратной матрицы, т.е. B_{ii+1}. Итак, из $\frac{m^2-m}{2}$ равенств (I.8) выделим ($m-1$) равенств

$$\beta_{i+1}\cdot\left[\prod_{k=i+1}^{i+1} r_k^{*}\right]\cdot p_{i+1}^{*} = \beta_i\left[\prod_{k=i+1}^{i} r_k^{*}\right] - \beta_{i-1}\left[\prod_{k=i+1}^{i-1} r_k^{*}\right]\cdot r_i^{*}, \tag{I.9}$$

для всех индексов i, удовлетворяющих условию $1 \leq i < i+1 \leq m$ (другими словами, для всех $1 \leq i+1 \leq m$). Если теперь воспользоваться определением произведений

$$\prod_{k=q}^{\ell} p_k^{*} = \begin{cases} E, & \text{если } \ell < q \\ (p_\ell^{*}\, p_{\ell-1}^{*}\cdots p_q^{*}), & \text{если } \ell \geq q, \end{cases} \tag{I.10}$$

$$\prod_{k=q}^{\ell} r_k^{*} = \begin{cases} E, & \text{если } \ell < q \\ (r_q^{*}\, r_{q+1}^{*}\cdots r_\ell^{*}), & \text{если } \ell \geq q, \end{cases}$$

то вместо (I.9) получаем ($m-1$) равенство

$$\beta_{i-1} = \beta_i - \beta_{i+1}\cdot(r_{i+1}^{*}\, p_{i+1}^{*}), \quad 1 \leq i \leq m-1. \tag{I.11}$$

Подставим теперь в третью систему равенств (I.7) вместо элементов нижнего треугольника матрицы B их выражения из (I.3). Итак, для $j-1 < i$ имеем

$$\left[(-E)^{i+(j-1)}B_{ii}\cdot\alpha_i^{-1}\cdot\alpha_{j-1}\cdot\prod_{k=j}^{i}p_k^*\right]\cdot r_j^* + \left[(-E)^{i+j}B_{ii}\cdot\alpha_i^{-1}\cdot\alpha_j\cdot\prod_{k=j+1}^{i}p_k^*\right]\cdot E \; + \qquad (I.12)$$

$$+\left[(-E)^{i+(j+1)}B_{ii}\cdot\alpha_i^{-1}\cdot\alpha_{j+1}\cdot\prod_{k=j+2}^{i}p_k^*\right]\cdot p_{j+1}^* = \emptyset \quad ,$$

для всех i и j, удовлетворяющих неравенствам $1\le j-1<i\le m$.
Эти равенства, очевидно, эквивалентны равенствам

$$-\alpha_{j-1}\cdot\left[\prod_{k=j}^{i}p_k^*\right]\cdot r_j^*+\alpha_j\cdot\prod_{k=j+1}^{i}p_k^*-\alpha_{j+1}\cdot\left[\prod_{k=j+2}^{i}p_k^*\right]\cdot p_{j+1}^*=\emptyset, \qquad (I.13)$$

в силу неособенности матриц $(-E)^{i+j}B_{ii}\cdot\alpha_i^{-1}$ при любых i и j из интервалов $1\le j-1<i\le m$. Аналогично тому, как поступили выше, из $(\frac{m^2-m}{2})$ равенств (I.13) оставим только ($m-1$) равенство, положив $i=j$, т.е. для нижней поддиагонали матрицы B . При этом , воспользовавшись (I.10), получаем

$$\alpha_{i+1}=\alpha_i-\alpha_{i-1}\cdot(p_i^*\, r_i^*) \quad , \quad 2\le i\le m \; . \qquad (I.14)$$

Процессы (I.II) и (I.14) вычисления последовательностей матриц $\{\beta_i,\alpha_i\}$ в схемах без обращения итеративных элементов можно было бы считать заданными, если бы нам были известны граничные условия (α_1 , α_2) и (β_m , β_{m-1}). Причем, как видим, эти процессы будут устойчивыми, если $\{\|p_i^*\, r_i^*\|\le 1 \; , \; \|r_{i+1}^*\, p_{i+1}^*\|\le 1\}$.
Теперь, подставив в средние (m) равенств в (I.7) вместо B_{ii-1} и B_{ii+1} их выражения из представления (I.3), получаем

$$\left[(-E)^{i+(i-1)}B_{ii}\cdot\alpha_i^{-1}\alpha_{i-1}\cdot\prod_{k=i}^{i}p_k^*\right]\cdot r_i^* + B_{ii}\cdot E \; +$$

$$+\left[(-E)^{i+(i+1)}B_{ii}\cdot\beta_i^{-1}\cdot\beta_{i+1}\cdot\prod_{k=i+1}^{i+1}r_k^*\right]\cdot p_{i+1}^* = E \; .$$

Перепишем эти равенства с учетом (I.10) в виде

$$B_{ii}\left[E-(\alpha_i^{-1}\alpha_{i-1})\cdot(p_i^*r_i^*)-(\beta_i^{-1}\beta_{i+1})\cdot(r_{i+1}^*p_{i+1}^*)\right] = E, \quad i=2,3,\dots,m-1 \, . \qquad (I.15)$$

Воспользовавшись теперь (I.II), (I.14) и ассоциативностью матричных умножений из (I.15), получаем

$$B_{ii}\left[\alpha_i^{-1}\alpha_{i+1}+\beta_i^{-1}\beta_{i-1}-E\right] = E, \quad i=2,3,\dots,m-1 \; . \qquad (I.16)$$

Поскольку в (I.7) $B_{10}=\emptyset=B_{mm+1}$ (можно положить), то система равенств (I.16) должна быть дополнена еще двумя равенствами

$$\begin{aligned} &B_{11}+B_{12}\cdot p_2^* = E \quad , \; i=1 \\ &B_{mm+1}\cdot r_m^* + B_{mm} = E \; , \quad i=m \; . \end{aligned} \qquad (I.17)$$

Если теперь в равенствах (I.17) воспользоваться (I.7), то вместе с системой ($m-2$) равенств (I.16) они составляют систему (m) равенств

$$\begin{aligned} &B_{11}\cdot\left[E-(\beta_1^{-1}\cdot\beta_2)\cdot(r_2^*\cdot p_2^*)\right]=E_1 \quad , \quad i=1 \\ &B_{ii}\cdot\left[(\alpha_i^{-1}\cdot\alpha_{i+1})+(\beta_i^{-1}\cdot\beta_{i-1})-E\right]=E_i \; , \quad i=2,3,\dots,m-1 \\ &B_{mm}\cdot\left[E-(\alpha_m^{-1}\cdot\alpha_{m-1})\cdot(p_m^*\cdot r_m^*)\right]=E_m \quad , \end{aligned} \qquad (I.18)$$

где будем пока что считать все матрицы $\{E_i=E\}_{i=1}^{m}$. Отметим также, что последовательности матриц $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$, входящие в равенства (I.18), определяются равенствами (I.II), (I.14). Итак, задачу определения оператора B (I.3), обратного к C' , можно было бы считать решенной, если бы были заданы матрицы (α_2,α_1) и (β_m , β_{m-1}). Перепишем систему (m) равенств (I.18), а также ($m-1$) равенств (I.II) и (I.14) в другом виде, воспользовавшись предположением теоремы о неособенности всех главных квазиминоров B , из которого следует неособенность матриц $\{B_{ii},\alpha_i,\beta_i\}_{i=1}^{m}$, а также равенства (I.II) при $i=1$ и равенства (I.14) при $i=m$:

$$\begin{aligned} &B_{11}\cdot(\beta_1^{-1}\beta_0) = E_1 \; , \; i=1 \\ &B_{ii}\cdot\left[(\alpha_i^{-1}\alpha_{i+1})+(\beta_i^{-1}\beta_{i-1})-E\right]=E_i \; , \; i=2,3,\dots,m-1 \\ &B_{mm}\cdot(\alpha_m^{-1}\alpha_{m+1})=E_m \quad , \quad i=m \; . \end{aligned} \qquad (I.19)$$

Очевидно, также справедливы вычислительные процессы

$$\begin{aligned} &\alpha_i^{-1}\alpha_{i+1} = E-(\alpha_i^{-1}\alpha_{i-1})\cdot(p_i^*\cdot r_i^*) \quad , \quad i=2,3,\dots m \\ &\beta_i^{-1}\beta_{i-1} = E-(\beta_i^{-1}\cdot\beta_{i+1})\cdot(r_{i+1}^*\cdot p_{i+1}^*) \; , \quad i=m-1,\dots,1 \; . \end{aligned} \qquad (I.20)$$

Эти системы равенств можно переписать более компактно в виде

$$\begin{aligned} &B_{11}\cdot(G_0)=E_1 \; , \quad i=1 \\ &B_{ii}\left[\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E\right]=E_i \; , \quad i=2,3,\dots,m-1 \\ &B_{mm}\cdot(\Lambda_{m+1}) = E_m \; , \quad i=m \quad , \end{aligned} \qquad (I.21)$$

где G_i и Λ_i определяются как

$$\Lambda_{i+1}=E-\Lambda_i^{-1}\cdot(p_i^*\cdot r_i^*)\ ,\quad i=2,3,\dots,m$$
$$G_{i-1}=E-G_i^{-1}\cdot(r_{i+1}^*\cdot p_{i+1}^*)\ ,\quad i=m-1,m-2,\dots,1, \tag{I.22}$$

где обозначили

$$\{G_i=\beta_{i+1}^{-1}\cdot\beta_i\}_{i=0}^{m-1}\ ,\quad \{\Lambda_i=\alpha_{i-1}^{-1}\cdot\alpha_i\}_{i=2}^{m+1}\ . \tag{I.23}$$

Итак, четыре неизвестные граничные матрицы (α_2,α_1) и (β_m,β_{m-1}) свели к двум неизвестным граничным матрицам Λ_2 и G_{m-1} , которые не должны по определению быть особенными в силу условия теоремы о неособенности всех главных миноров матрицы B .

Замечание I. Поскольку для B справедливо представление (I.3), то для неособенности всех главных квазиминоров B, очевидно, достаточно, чтобы были неособенными $\{B_{ii},\Lambda_i,G_i\}$, поскольку $\{p_i^*,r_i^*\}$ -неособенные квадратные матрицы по условию теоремы. С другой стороны, если все $\{B_{ii}\}_{i=1}^m$ и все $\{G_i\}_{i=1}^{m-1}$, а также все $\{\Lambda_i\}_{i=2}^{m+1}$ - неособенны, то согласно (I.2I) должны быть неособенными матрицы G_0 , $\{\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E\}_{i=2}^{m-1}$, Λ_{m+1} . Кроме того, эти матрицы ограничены в силу ограниченности матриц $\{B_{ii}\}_{i=1}^m$. Отметим, наконец, следующий факт. Для того, чтобы сохранять единообразную запись для системы равенств относительно B_{ii} (I.2I), аналогичную ($m-2$) средним равенствам, следует задать $\Lambda_2=E=G_{m-1}$. Откуда следует, что в процессах (I.II) и (I.I4) следует также задать $\alpha_1=E=\alpha_2$, $\beta_m=E=\beta_{m-1}$. Таким образом, завершили доказательства теоремы.

Рассмотрим теперь более подробно матрицы

$(\alpha_i^{-1}\cdot\alpha_j)$ и $(\beta_i^{-1}\cdot\beta_j)$.

Для $j\le i$ имеем

$$\alpha_i^{-1}\alpha_j=(\alpha_i^{-1}\alpha_{i-1})\cdot(\alpha_{i-1}^{-1}\cdot\alpha_{i-2})\dots(\alpha_{j+2}^{-1}\cdot\alpha_{j+1})\cdot(\alpha_{j+1}^{-1}\cdot\alpha_j)=$$
$$=\Lambda_i^{-1}\Lambda_{i-1}^{-1}\ \dots\ \Lambda_{j+2}^{-1}\cdot\Lambda_{j+1}^{-1}=\prod_{k=j+1}^{i}\Lambda_k^{-1}\ ,$$

с учетом обозначения (I.23).

А также с учетом (I.23) для $j\ge i$ имеем

$$\beta_i^{-1}\cdot\beta_j=(\beta_i^{-1}\cdot\beta_{i+1})\cdot(\beta_{i+1}^{-1}\cdot\beta_{i+2})\ \dots\ (\beta_{j-2}^{-1}\cdot\beta_{j-1})\cdot(\beta_{j-1}^{-1}\cdot\beta_j)=$$
$$=G_i^{-1}G_{i+1}^{-1}\ \dots\ G_{j-1}^{-1}=\prod_{k=i+1}^{j}G_{k-1}^{-1}\ .$$

Итак, определили матрицы

$$\alpha_i^{-1}\cdot\alpha_j=\prod_{k=j+1}^{i}\Lambda_k^{-1}=\begin{cases}\Lambda_i^{-1}\Lambda_{i-1}^{-1}\dots\Lambda_{j+2}^{-1}\cdot\Lambda_{j+1}^{-1}\ , & \text{если } j<i\le m\ ,\\ E\ , & \text{если } j\ge i\ ,\end{cases} \tag{I.24}$$

$$\beta_i^{-1}\cdot\beta_j=\prod_{k=i+1}^{j}G_{k-1}^{-1}=\begin{cases}G_i^{-1}\cdot G_{i+1}^{-1}\ \dots\ G_{j-1}^{-1}\ , & \text{если } i<j\le m\\ E\ , & \text{если } i\ge j\ .\end{cases} \tag{I.25}$$

Теперь, воспользовавшись теоремой I и введенными выше (I.2)', (I.24) и (I.25) обозначениями, можно сформулировать для матриц вида (I.I) следующий результат.

Теорема 2. Если C- неособенная квазитрехдиагональная матрица общего вида

$$C=\begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & \\ \multicolumn{5}{c}{\text{-------------------}} \\ & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & p_m & q_m \end{bmatrix} \tag{I.26}$$

с неособенными квадратными матрицами $\{q_1,q_i,r_i,p_i\}_{i=2}^m$ – одинаковых размерностей, все главные квазиминоры которой отличны от нуля, то матрица, обратная к C, т.е. $B=C^{-1}$, может быть представлена в виде

$$B_{ij}=\begin{cases}(-E)^{i+j}B_{ii}\cdot\prod\limits_{k=j+1}^{i}\Lambda_k^{-1}\cdot\prod\limits_{k=j+1}^{i}(p_k\cdot q_{k-1}^{-1})\ , & j\le i\le m\ ,\\ (-E)^{i+j}B_{ii}\cdot\prod\limits_{k=i+1}^{j}G_{k-1}^{-1}\cdot\prod\limits_{k=i+1}^{j}(r_k\cdot q_k^{-1})\ , & i\le j\le m\ ,\\ B_{ii}\ , & i=j\end{cases} \tag{I.27}$$

где $$B_{ii}=q_i^{-1}\left[\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E\right]^{-1} \tag{I.28}$$

– диагональные блоки-матрицы у $B=C^{-1}$,

$$\Lambda_{i+1}=E-\Lambda_i^{-1}\cdot\gamma_i\ ;\ \Lambda_2=E;\ \gamma_i=(p_i\cdot q_{i-1}^{-1})\cdot(r_i\cdot q_i^{-1})\ ,\quad i=2,\dots,m\ , \tag{I.29}$$

$$G_{i-1}=E-G_i^{-1}\tilde{\gamma}_i\ ;\ G_{m-1}=E;\ \tilde{\gamma}_i=(r_{i+1}\cdot q_{i+1}^{-1})\cdot(p_{i+1}\cdot q_i^{-1})\ ,\quad i=m-1,\dots,1 \tag{I.30}$$

где G_i и Λ_i определяются как

$$\Lambda_{i+1}=E-\Lambda_i^{-1}\cdot(p_i^*\cdot r_i^*),\quad i=2,3,\dots,m$$
$$G_{i-1}=E-G_i^{-1}\cdot(r_{i+1}^*\cdot p_{i+1}^*),\quad i=m-1,m-2,\dots,1, \qquad (I.22)$$

где обозначили

$$\{G_i=\beta_{i+1}^{-1}\cdot\beta_i\}_{i=0}^{m-1},\quad \{\Lambda_i=\alpha_{i-1}^{-1}\cdot\alpha_i\}_{i=2}^{m+1}. \qquad (I.23)$$

Итак, четыре неизвестные граничные матрицы (α_2,α_1) и (β_m,β_{m-1}) свели к двум неизвестным граничным матрицам Λ_2 и G_{m-1}, которые не должны по определению быть особенными в силу условия теоремы о неособенности всех главных миноров матрицы B.

<u>Замечание I</u>. Поскольку для B справедливо представление (I.3), то для неособенности всех главных квазиминоров B, очевидно, достаточно, чтобы были неособенными $\{B_{ii},\Lambda_i,G_i\}$, поскольку $\{p_i^*, r_i^*\}$ -неособенные квадратные матрицы по условию теоремы. С другой стороны, если все $\{B_{ii}\}_{i=1}^m$ и все $\{G_i\}_{i=1}^{m-1}$, а также все $\{\Lambda_i\}_{i=2}^{m+1}$ - неособенны, то согласно (I.2I) должны быть неособенными матрицы G_0, $\{\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E\}_{i=2}^{m-1}$, Λ_{m+1}. Кроме того, эти матрицы ограничены в силу ограниченности матриц $\{B_{ii}\}_{i=1}^m$. Отметим, наконец, следующий факт. Для того, чтобы сохранять единообразную запись для системы равенств относительно B_{ii} (I.2I), аналогичную ($m-2$) средним равенствам, следует задать $\Lambda_2=E=G_{m-1}$. Откуда следует, что в процессах (I.II) и (I.I4) следует также задать $\alpha_1=E=\alpha_2$, $\beta_m=E=\beta_{m-1}$. Таким образом, <u>завершили доказательства теоремы</u>.

Рассмотрим теперь более подробно матрицы

$$(\alpha_i^{-1}\cdot\alpha_j) \quad \text{и} \quad (\beta_i^{-1}\cdot\beta_j).$$

Для $j\le i$ имеем

$$\alpha_i^{-1}\alpha_j=(\alpha_i^{-1}\alpha_{i-1})\cdot(\alpha_{i-1}^{-1}\cdot\alpha_{i-2})\dots(\alpha_{j+2}^{-1}\cdot\alpha_{j+1})\cdot(\alpha_{j+1}^{-1}\cdot\alpha_j)=$$
$$=\Lambda_i^{-1}\Lambda_{i-1}^{-1}\dots\Lambda_{j+2}^{-1}\cdot\Lambda_{j+1}^{-1}=\prod_{k=j+1}^{i}\Lambda_k^{-1},$$
с учетом обозначения (I.23).

А также с учетом (I.23) для $j\ge i$ имеем

$$\beta_i^{-1}\cdot\beta_j=(\beta_i^{-1}\cdot\beta_{i+1})\cdot(\beta_{i+1}^{-1}\cdot\beta_{i+2})\dots(\beta_{j-2}^{-1}\cdot\beta_{j-1})\cdot(\beta_{j-1}^{-1}\cdot\beta_j)=$$
$$=G_i^{-1}G_{i+1}^{-1}\dots G_{j-1}^{-1}=\prod_{k=i+1}^{j}G_{k-1}^{-1}.$$

Итак, определили матрицы

$$\alpha_i^{-1}\cdot\alpha_j=\prod_{k=j+1}^{i}\Lambda_k^{-1}=\begin{cases}\Lambda_i^{-1}\Lambda_{i-1}^{-1}\dots\Lambda_{j+2}^{-1}\cdot\Lambda_{j+1}^{-1}, & \text{если } j<i\le m,\\ E, & \text{если } j\ge i,\end{cases} \qquad (I.24)$$

$$\beta_i^{-1}\cdot\beta_j=\prod_{k=i+1}^{j}G_{k-1}^{-1}=\begin{cases}G_i^{-1}\cdot G_{i+1}^{-1}\dots G_{j-1}^{-1}, & \text{если } i<j\le m\\ E, & \text{если } i\ge j.\end{cases} \qquad (I.25)$$

Теперь, воспользовавшись теоремой I и введенными выше (I.2)', (I.24) и (I.25) обозначениями, можно сформулировать для матриц вида (I.I) следующий результат.

<u>Теорема 2</u>. Если C- неособенная квазитрехдиагональная матрица общего вида

$$C=\begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & p_m & q_m \end{bmatrix} \qquad (I.26)$$

с неособенными квадратными матрицами $\{q_1,q_i,r_i,p_i\}_{i=2}^m$ - одинаковых размерностей, все главные квазиминоры которой отличны от нуля, то матрица, обратная к C, т.е. $B=C^{-1}$, может быть представлена в виде

$$B_{ij}=\begin{cases}(-E)^{i+j}B_{ii}\cdot\prod_{k=j+1}^{i}\Lambda_k^{-1}\cdot\prod_{k=j+1}^{i}(p_k\cdot q_{k-1}^{-1}), & j\le i\le m,\\ (-E)^{i+j}B_{ii}\cdot\prod_{k=j+1}^{j}\cdot G_{k-1}^{-1}\cdot\prod_{k=i+1}^{j}(r_k\cdot q_k^{-1}), & i\le j\le m,\\ B_{ii}, & i=j,\end{cases} \qquad (I.27)$$

где
$$B_{ii}=q_i^{-1}\left[\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E\right]^{-1} \qquad (I.28)$$

- диагональные блоки-матрицы у $B=C^{-1}$,

$$\Lambda_{i+1}=E-\Lambda_i^{-1}\cdot\gamma_i;\quad \Lambda_2=E;\quad \gamma_i=(p_i\cdot q_{i-1}^{-1})\cdot(r_i\cdot q_i^{-1}),\quad i=2,\dots,m, \qquad (I.29)$$

$$G_{i-1}=E-G_i^{-1}\cdot\tilde{\gamma}_i;\quad G_{m-1}=E;\quad \tilde{\gamma}_i=(r_{i+1}\cdot q_{i+1}^{-1})\cdot(p_{i+1}\cdot q_i^{-1}),\quad i=m-1,\dots,1 \qquad (I.30)$$

$$\prod_{k=j+1}^{i} \Lambda_k^{-1} = \begin{cases} \Lambda_i^{-1} \cdot \Lambda_{i-1}^{-1} \ldots \Lambda_{j+1}^{-1}, & \text{если } j < i \leq m, \\ E, & \text{если } j \geq i \end{cases} \tag{I.31}$$

$$\prod_{k=i+1}^{j} G_{k-1}^{-1} = \begin{cases} G_i^{-1} \cdot G_{i+1}^{-1} \ldots G_{j-1}^{-1}, & \text{если } i < j \leq m, \\ E, & \text{если } i \geq j \end{cases} \tag{I.32}$$

$$\prod_{k=j+1}^{i} (p_k \cdot q_{k-1}^{-1}) = \begin{cases} (p_i \cdot q_{i-1}^{-1}) \cdot (p_{i-1} \cdot q_{i-2}^{-1}) \ldots (p_{j+1} \cdot q_j^{-1}), & \text{если } j < i \leq m, \\ E, & \text{если } i \leq j, \end{cases} \tag{I.33}$$

$$\prod_{k=i+1}^{j} (r_k \cdot q_k^{-1}) = \begin{cases} (r_{i+1} \cdot q_{i+1}^{-1}) \cdot (r_{i+2} \cdot q_{i+2}^{-1}) \ldots \cdot (r_j \cdot q_j^{-1}), & \text{если } i < j \leq m \\ E, & \text{если } j \leq i. \end{cases} \tag{I.34}$$

Доказательство этой теоремы, как видим, основано на использовании результатов теоремы I и факторизации (I.2), поэтому мы на нем не останавливаемся.

2. Свойства матриц, обратных к неособенным квазитрехдиагональным, некоторые из квазиминоров которых обращаются в нуль

Продолжая исследования, снимем ограничения (как это было проделано в /2/ для скалярного случая), связанные с неособенностью всех главных квазиминоров B, что оговаривалось особо в теоремах I и 2. Следует также отметить, что подобное ограничение содержится во всех известных нам результатах других авторов, например /II/. Как уже отмечалось выше, в замечании I это ограничение привело к требованию неособенности матриц $\{B_{ii}, \Lambda_i, G_i\}_{i=1}^{m}$.

Итак, для $B=C^{-1}$ имеем представление (I.27)÷(I.34), когда все квазиминоры C (I.26) и, следовательно, B (I.27) неособенные. С учетом (I.29), (I.30) представим B_{ii} в виде

$$B_{ii} = q_i^{-1} \cdot \left[E - \Lambda_i^{-1} \cdot \gamma_i + E - G_i^{-1} \cdot \tilde{\gamma}_i - E\right]^{-1} = q_i^{-1} \cdot \left[\Lambda_i^{-1} \cdot (\Lambda_i - \gamma_i) - G_i^{-1} \cdot \tilde{\gamma}_i\right]^{-1} =$$

$$= q_i^{-1} \cdot \left[\Lambda_i^{-1} \cdot \Lambda_i \cdot \Lambda_{i+1} - G_i^{-1} \cdot \tilde{\gamma}_i\right]^{-1} = q_i^{-1} \cdot \left[\Lambda_{i+1} - G_i^{-1} \cdot \tilde{\gamma}_i\right]^{-1} =$$

$$= q_i^{-1} \cdot \left[G_i \cdot \Lambda_{i+1} - \tilde{\gamma}_i\right]^{-1} \cdot G_i,$$

а с другой стороны, то же самое B_{ii} можем представить как

$$B_{ii} = q_i^{-1} \cdot \left[E - \Lambda_i^{-1} \cdot \gamma_i + E - G_i^{-1} \cdot \tilde{\gamma}_i - E\right]^{-1} = q_i^{-1} \cdot \left[E - G_i^{-1} \cdot \tilde{\gamma}_i - \Lambda_i^{-1} \cdot \gamma_i\right]^{-1} =$$

$$= q_i^{-1} \cdot \left[G_i^{-1} \cdot (G_i - \tilde{\gamma}_i) - \Lambda_i^{-1} \cdot \gamma_i\right]^{-1} = q_i^{-1} \cdot \left[G_i^{-1} \cdot G_i \cdot G_{i-1} - \Lambda_i^{-1} \cdot \gamma_i\right]^{-1} =$$

$$= q_i^{-1} \cdot \left[G_{i-1} - \Lambda_i^{-1} \cdot \gamma_i\right]^{-1} = q_i^{-1} \cdot \left[\Lambda_i \cdot G_{i-1} - \gamma_i\right]^{-1} \cdot \Lambda_i.$$

Итак, для B_{ii} мы имеем два представления:

$$B_{ii} = q_i^{-1} \cdot \left[G_i \cdot \Lambda_{i+1} - \tilde{\gamma}_i\right]^{-1} \cdot G_i, \quad i=1,2,\ldots,m, \tag{2.I}$$

$$B_{ii} = q_i^{-1} \cdot \left[\Lambda_i \cdot G_{i-1} - \gamma_i\right]^{-1} \cdot \Lambda_i, \quad i=1,2,\ldots,m. \tag{2.2}$$

Докажем следующий факт.

Лемма I. Пусть $\{B_{ii}, G_i, \Lambda_i\}$ – ограниченные матрицы, которые определены выше в (I.28), (I.29), (I.30). Тогда справедливы следующие утверждения:

I) Если G_i или Λ_i – особенные, то B_{ii} – особенная.

2) Если Λ_i – особенная, то Λ_{i-1} – неособенная и Λ_{i-1}^{-1} – ограниченная матрица.

3) Если G_i – особенная, то G_{i+1} – неособенная и G_{i+1}^{-1} – ограниченная матрица.

Доказательство утверждения I) следует из двойственных представлений (2.I) и (2.2), т.е.

$$q_i^{-1} \cdot \left[\Lambda_i \cdot G_{i-1} - \gamma_i\right]^{-1} \cdot \Lambda_i = B_{ii} = q_i^{-1} \cdot \left[G_i \cdot \Lambda_{i+1} - \tilde{\gamma}_i\right]^{-1} \cdot G_i.$$

А для доказательства утверждений 2) и 3) перепишем процессы (I.29) и (I.30) в виде

$$\Lambda_i = E - \Lambda_{i-1}^{-1} \cdot \gamma_{i-1}, \tag{2.3}$$

$$G_i = E - G_{i+1}^{-1} \cdot \tilde{\gamma}_{i+1}. \tag{2.4}$$

Пусть Λ_i – особенная матрица. Тогда, как следует из (2.3), Λ_{i-1} должна быть неособенной матрицей, поскольку Λ_i по условию леммы – ограниченная. Следовательно, в (2.3) Λ_{i-1}^{-1} – ограниченная, т.е.

$$\|\Lambda_i\| = \|E - \Lambda_{i-1}^{-1} \cdot \gamma_{i-1}\| \leq 1 + \|\Lambda_{i-1}^{-1}\| \cdot \|\gamma_{i-1}\| \leq \text{const},$$

следовательно, $\|\Lambda_{i-1}^{-1}\| \leq \widetilde{\text{const}}$.

Пусть теперь G_i - особенная. Из (2.4) следует, что G_{i+1} должна быть неособенной, поскольку по условию леммы G_i -ограниченная. Тогда из (2.4) имеем

$$\|G_i\| = \|E-G_{i+1}^{-1}\cdot\tilde{\gamma}_{i+1}\| \le 1+\|G_{i+1}^{-1}\|\cdot\|\gamma_{i+1}\| \le \text{const} ,$$

отсюда следует, что $\|G_{i+1}^{-1}\| \le \widetilde{\text{const}}$. Лемма I доказана.

Покажем теперь, что если B_{ii}-особенные блоки-матрицы у $B=C^{-1}$, т.е. Λ_i - особенная или G_i-особенная, то $B_{i+1\ i+1}$ и $B_{i-1\ i-1}$ одновременно особенными быть не могут. Пусть по-прежнему являются неособенными и ограниченными все матрицы $\{B_{ii}, \Lambda_i, G_i\}$. Тогда представления (2.I) и (2.2) можно переписать в виде

$$\left[G_i\cdot\Lambda_{i+1}-\tilde{\gamma}_i\right]\cdot q_i\cdot B_{ii} = G_i \quad , \tag{2.5}$$

$$\left[\Lambda_i\cdot G_{i-1}-\gamma_i\right]\cdot q_i\cdot B_{ii} = \Lambda_i \ . \tag{2.6}$$

Тогда для элементов-блоков $B_{i+1\ i+1}$ и $B_{i-1\ i-1}$, исходя из (2.5),(2.6), будем иметь следующие представления:

$$\left[G_{i+1}\cdot\Lambda_{i+2}-\tilde{\gamma}_{i+1}\right]\cdot q_{i+1}\cdot B_{i+1\ i+1} = G_{i+1} , \tag{2.7}$$

$$\left[G_{i-1}\cdot\Lambda_i - \tilde{\gamma}_{i-1}\right]\cdot q_{i-1}\cdot B_{i-1\ i-1} = G_{i-1} , \tag{2.8}$$

$$\left[\Lambda_{i+1}\cdot G_i - \gamma_{i+1}\right]\cdot q_{i+1}\cdot B_{i+1\ i+1} = \Lambda_{i+1} , \tag{2.9}$$

$$\left[\Lambda_{i-1}\cdot G_{i-2}-\gamma_{i-1}\right]\cdot q_{i-1}\cdot B_{i-1\ i-1} = \Lambda_{i-1} \ . \tag{2.I0}$$

Пусть теперь G_i -неособенная, а Λ_i - особенная. Следовательно, в силу леммы I B_{ii}- особенная, а Λ_{i-1} -неособенная матрицы, и Λ_{i-1}^{-1} - ограниченная. Тогда в силу неособенности Λ_{i-1} (2.I0) мы можем переписать в виде

$$\Lambda_{i-1}^{-1}\cdot\left[\Lambda_{i-1}\cdot G_{i-2}-\gamma_{i-1}\right]\cdot q_{i-1}\cdot B_{i-1\ i-1} = E \ . \tag{2.II}$$

Воспользуемся теперь ограниченностью матриц $\{\Lambda_{i-1}^{-1}, E, B_{i-1\ i-1}\}$ в (2.II).(Ограниченность всех диагональных матриц-блоков B_{ii} - предполагается по условию существования ограниченного оператора B, обратного к C). Следовательно, в силу сказанных выше утверждений и справедливости равенства (2.II) матрицы $\left[\Lambda_{i-1}\cdot G_{i-2}-\gamma_{i-1}\right]\cdot q_{i-1}$ ограничены. Тогда,применяя теорему Банаха/I5/ к равенствам (2.II), приходим к выводу, что существует и ограничен обратный оператор $q_{i-1}^{-1}\cdot\left[\Lambda_{i-1}\cdot G_{i-2}-\gamma_{i-1}\right]^{-1}$, поскольку оператор Λ_{i-1} неособенный. Следовательно, оператор $B_{i-1 i-1}$ согласно (2.II) является неособенным.

Пусть теперь Λ_i - неособенная матрица, а G_i - особенная. Тогда, также в силу леммы I, B_{ii} - особенная, G_{i+1} - неособенная, G_{i+1}^{-1}- ограниченная матрицы. В силу неособенности G_{i+1} , равенства (2.7) перепишем в виде

$$G_{i+1}^{-1}\cdot\left[G_{i+1}\cdot\Lambda_{i+2}-\tilde{\gamma}_{i+1}\right]\cdot q_{i+1}\cdot B_{i+1 i+1} = E \ . \tag{2.I2}$$

Если воспользоваться ограниченностью $\{G_{i+1}^{-1}, B_{i+1 i+1}, E\}$ в (2.I2), то приходим к выводу, что матрицы $\left[G_{i+1}\cdot\Lambda_{i+2}-\tilde{\gamma}_{i+1}\right]\cdot q_{i+1}$ являются ограниченными. Теперь, аналогично тому, как поступили выше, применяем теорему Банаха к (2.I2) и убеждаемся, что существует и ограничен обратный оператор $q_{i+1}^{-1}\cdot\left[G_{i+1}\cdot\Lambda_{i+2}-\tilde{\gamma}_{i+1}\right]^{-1}$.

Следовательно, B_{i+1i+1} является неособенной матрицей. Итак, мы показали, что если B_{ii} -особенная, в силу особенности любой из матриц Λ_i или G_i , то не могут быть одновременно особенными B_{i+1i+1} и B_{i-1i-1} матрицы.

Далее, в случае, когда $\{B_{ii}, \Lambda_i, G_i\}$ -неособенные и ограниченные, исходя из (I.27) в теореме 2, для $i < j = i+1$ имеем

$$B_{ii+1} = (-E)^{i+i+1}\cdot B_{ii}\cdot\prod_{k=i+1}^{i+1} G_{k-1}^{-1}\cdot\prod_{k=i+1}^{i+1}(r_k\cdot q_k^{-1}) = (-E)\cdot B_{ii}\cdot G_i^{-1}\cdot(r_{i+1}\cdot q_{i+1}^{-1}) \ . \tag{2.I3}$$

И для $i > j = i-1$ аналогично имеем

$$B_{ii-1} = (-E)^{i+i-1}\cdot B_{ii}\cdot\prod_{k=i}^{i}\Lambda_k^{-1}\cdot\prod_{k=i}^{i}(p_k\cdot q_{k-1}^{-1}) = (-E)\cdot B_{ii}\cdot\Lambda_i^{-1}\cdot(p_i\cdot q_{i-1}^{-1}) \ . \tag{2.I4}$$

Учитывая (2.I), (2.2) в (2.I3) и (2.I4), получим другие выражения для B_{ii+1} и B_{ii-1} :

$$B_{ii+1} = (-E)\cdot B_{ii}\cdot G_i^{-1}\cdot(r_{i+1}\cdot q_{i+1}^{-1}) = (-E)\cdot q_i^{-1}\cdot\left[G_i\cdot\Lambda_{i+1}-\tilde{\gamma}_i\right]^{-1}\cdot(r_{i+1}\cdot q_{i+1}^{-1}) , \tag{2.I5}$$

$$B_{ii-1} = (-E)\cdot B_{ii}\cdot\Lambda_i^{-1}\cdot(p_i\cdot q_{i-1}^{-1}) = (-E)\cdot q_i^{-1}\cdot\left[\Lambda_i\cdot G_{i-1}-\gamma_i\right]^{-1}(p_i\cdot q_{i-1}^{-1}) \ . \tag{2.I6}$$

Пусть теперь G_i-особенная, а Λ_i -неособенная матрицы.Следовательно, B_{ii} -особенная,но в этом случае в силу ограниченности B_{ii}, Λ_i, G_i из (2.5) получим,что матрица $\left[G_i\cdot\Lambda_{i+1}-\tilde{\gamma}_i\right]\cdot q_i$ ограниченная и неособенная. Если бы $\left[G_i\cdot\Lambda_{i+1}-\tilde{\gamma}_i\right]\cdot q_i$ была особенной, то оператор B_{ii} в соответствии с (2.5) был бы неограниченным.

Теперь пусть Λ_i - особенная, а G_i - неособенная матрицы. Следовательно, B_{ii} особенная. Но в силу ограниченности B_{ii}, Λ_i, G_i из (2.6) получим аналогично предыдущему случаю, что матрицы $[\Lambda_i \cdot G_{i-1} - \gamma_i] \cdot q_i$ ограниченные и неособенные. Следовательно, в соответствии с теоремой Банаха, примененной к операторным уравнениям (2.5) и (2.6), получим, что существуют и ограничены обратные матрицы $q_i^{-1} \cdot [\Lambda_i \cdot G_{i-1} - \gamma_i]^{-1}$ и $q_i^{-1} \cdot [G_i \cdot \Lambda_{i+1} - \tilde{\gamma}_i]^{-1}$.

Отсюда и из равенств (2.I5) и (2.I6) следует, что B_{ii+1} и B_{ii-1} неособенные матрицы.

Отметим далее, что с учетом (2.I), (2.2), когда матрицы B_{ii}, Λ_i, G_i - неособенные и ограниченные, из (I.27) в теореме 2 имеем следующие выражения для B_{ij}:

$$B_{ij} \overset{i \geq j}{=\!=} (-E)^{i+j} \cdot q_i^{-1} \cdot \left[G_i \cdot \Lambda_{i+1} - \tilde{\gamma}_i \right]^{-1} \cdot G_i \cdot \prod_{k=j+1}^{i} \Lambda_k^{-1} \cdot \prod_{k=j+1}^{i} (p_k \cdot q_{k-1}^{-1}) \,, \tag{2.I7}$$

$$B_{ij} \overset{i \leq j}{=\!=} (-E)^{i+j} \cdot q_i^{-1} \cdot \left[\Lambda_i \cdot G_{i-1} - \gamma_i \right]^{-1} \cdot \Lambda_i \cdot \prod_{k=i+1}^{j} G_{k-1}^{-1} \cdot \prod_{k=i+1}^{j} (r_k \cdot q_k^{-1}) \,.$$

Теперь, как видно из (2.I7), если Λ_i -особенная, а G_i - неособенная матрицы, следовательно, B_{ii} - особенная матрица, то B_{ij} (при $j \geq i$) и B_{ki} (при $k \geq i$) являются особенными матрицами. Аналогично этому будут также особенными матрицы B_{ij} (при $i \geq j$) и B_{ki} (при $k \leq i$), если будет особенной матрица G_i и неособенной Λ_i (а следовательно, B_{ii} - особенная матрица). Таким образом, опираясь на лемму I, выше мы доказали фактически следующий важный результат.

Лемма 2.

I). Если Λ_i - неособенная, а G_i - особенная, то B_{ii} - особенная матрица, но $B_{ii+1} = (-E) \cdot q_i^{-1} \cdot [G_i \cdot \Lambda_{i+1} - \tilde{\gamma}_i]^{-1} \cdot (r_{i+1} \cdot q_{i+1}^{-1})$ - неособенная, а B_{ij} (при $j \geq i$) и B_{ki} (при $k \leq i$) особенные матрицы.

2). Если Λ_i - особенная, а G_i - неособенная, то B_{ii} - особенная матрица, но $B_{ii-1} = (-E) \cdot q_i^{-1} \cdot [\Lambda_i \cdot G_{i-1} - \gamma_i]^{-1} \cdot (p_i \cdot q_{i-1}^{-1})$ -неособенная, а B_{ij} (при $i \leq j$) и B_{ki} (при $k \geq i$) - особенные матрицы.

3). Если B_{ii} -особенная матрица (Λ_i -особенная или G_i - особенная матрица), то матрицы B_{i+1i+1} и B_{i-1i-1} одновременно особенными быть не могут.

Далее (I.27) в теореме 2 для $i \leq j$ представим, если $\{B_{ii}$, Λ_i, $G_i\}$ - неособенные матрицы, в виде

$$B_{ij} = (-E)^{i+j} \cdot B_{ii} \cdot \prod_{k=i+1}^{j} G_{k-1}^{-1} \cdot \prod_{k=i+1}^{j} (r_k \cdot q_k^{-1}) = \left[(-E) \cdot B_{ii} \cdot G_i^{-1} \cdot (r_{i+1} \cdot q_{i+1}^{-1}) \right] \cdot \tag{2.I8}$$

$$\cdot (-E)^{(i+j-1)} \cdot (r_{i+1} \cdot q_{i+1}^{-1})^{-1} \cdot \prod_{k=i+2}^{j} G_{k-1}^{-1} \cdot \prod_{k=i+1}^{j} (r_k \cdot q_k^{-1}) \,, \quad i \leq j$$

и аналогично

$$B_{ij} = (-E)^{i+j} \cdot B_{ii} \cdot \prod_{k=j+1}^{i} \Lambda_k^{-1} \cdot \prod_{k=j+1}^{i} (p_k \cdot q_{k-1}^{-1}) = \left[(-E) \cdot B_{ii} \cdot \Lambda_i^{-1} \cdot (p_i \cdot q_{i-1}^{-1}) \right] \cdot \tag{2.I9}$$

$$\cdot (-E)^{i+j-1} \cdot (p_i \cdot q_{i-1}^{-1})^{-1} \cdot \prod_{k=j+1}^{i-1} \Lambda_k^{-1} \cdot \prod_{k=j+1}^{i} (p_k \cdot q_{k-1}^{-1}) \,, \text{ при } i \geq j \,.$$

Пусть теперь в (2.I8) B_{ii} - особенная матрица из-за G_i -особенной (в силу представления (2.I)), но Λ_i - неособенная матрица. Воспользуемся в (2.I8) выражением (2.I) для B_{ii} и учтем пункт I) леммы 2. Тогда

$$B_{ij} \overset{i \leq j}{=\!=} (-E) \cdot q_i^{-1} \cdot \left[G_i \cdot \Lambda_{i+1} - \tilde{\gamma}_i \right]^{-1} \cdot (-E)^{i+j-1} \cdot \prod_{k=i+2}^{j} G_{k-1}^{-1} \cdot \prod_{k=i+1}^{j} (r_k \cdot q_k^{-1}) = \tag{2.20}$$

$$= B_{ii+1} \cdot (-E)^{i+j-1} \cdot (r_{i+1} \cdot q_{i+1}^{-1})^{-1} \cdot \prod_{k=i+2}^{j} G_{k-1}^{-1} \cdot \prod_{k=i+1}^{j} (r_k \cdot q_k^{-1}) \,.$$

Пусть в (2.I9) Λ_i -особенная, а G_i -неособенная матрицы, следовательно, B_{ii} - особенная матрица из-за Λ_i -особенной. Тогда, воспользовавшись (2.2) и леммой 2 (пункт 2)) в представлении (2.I9), будем иметь

$$B_{ij} \overset{j \leq i}{=\!=} (-E) \cdot q_i^{-1} \cdot \left[\Lambda_i \cdot G_{i-1} - \gamma_i \right]^{-1} \cdot (-E)^{i+j-1} \cdot \prod_{k=j+1}^{i-1} \Lambda_k^{-1} \cdot \prod_{k=j+1}^{i} (p_k \cdot q_{k-1}^{-1}) = \tag{2.2I}$$

$$= B_{ii-1} \cdot (-E)^{i+j-1} \cdot (p_i \cdot q_{i-1}^{-1})^{-1} \cdot \prod_{k=j+1}^{i-1} \Lambda_k^{-1} \cdot \prod_{k=j+1}^{i} (p_k \cdot q_{k-1}^{-1}) \,.$$

Итак, с учетом лемм I и 2 и представлений (2.20) и (2.2I) мы фактически можем сформулировать теорему, которая является обобщением теоремы 2 на случай, когда некоторые квазиминоры матрицы C (I.26) обращаются в нуль.

Теорема 3. Пусть C -неособенная квазидиагональная матрица вида (I.26), матрицы-блоки $\{q_i\}_{i=1}^{m}$, $\{r_i, p_i\}_{i=2}^{m}$ которой имеют одинаковые размерности и являются неособенными, тогда матрицы-блоки $B_{ij} = (C^{-1})_{ij}$ представляются в виде:

$$
B_{ii} \overset{i=j}{=} \begin{cases} q_i^{-1}\cdot(\Lambda_{i+1} + G_{i-1} - E)^{-1}, & \text{если}^{*)}\ \Lambda_i \text{ и } G_i \text{ – неособенные матрицы,} \\ q_i^{-1}\cdot(G_i\cdot\Lambda_{i+1} - \tilde{\gamma}_i)^{-1}\cdot G_i, & \text{если } G_i\text{-особенная } (B_{ii}\text{ -особенная}), \text{ но } \Lambda_i \text{ –неособенная матрица,} \quad (2.22) \\ q_i^{-1}\cdot(\Lambda_i\cdot G_{i-1} - \gamma_i)^{-1}\cdot\Lambda_i, & \text{если } G_i \text{ – неособенная} (B_{ii}\text{-особенная}), \text{ но } \Lambda_i \text{ – особенная матрица;} \end{cases}
$$

$$
B_{ij} = \begin{cases} (-E)^{i+j}\cdot B_{ii}\cdot\prod_{k=j+1}^{i}\Lambda_k^{-1}\cdot\prod_{k=j+1}^{i}(p_k\cdot q_{k-1}^{-1}), & \text{если } j\le i,\ \Lambda_i \text{ и } G_i\text{ – неособенные матрицы} \Longrightarrow B_{ii}\text{ – неособенная матрица,} \quad (2.23) \\ (-E)^{i+j}\cdot B_{ii}\cdot\prod_{k=i+1}^{j} G_{k-1}^{-1}\cdot\prod_{k=i+1}^{j}(r_k\cdot q_k^{-1}), & \text{если } j\ge i,\ \Lambda_i \text{ и } G_i\text{ – неособенные матрицы} \Longrightarrow B_{ii}\text{ – неособенная матрица;} \end{cases}
$$

$$
B_{ij} = \begin{cases} \{(-E)\cdot q_i^{-1}\cdot[G_i\cdot\Lambda_{i+1} - \tilde{\gamma}_i]^{-1}\}\cdot(-E)^{i+j-1}\cdot\prod_{k=i+2}^{j} G_{k-1}^{-1}\cdot\prod_{k=i+1}^{j}(r_k\cdot q_k^{-1}), & \text{если } i+1\le j\le m \text{ и } \Lambda_i \text{ – неособенная, } G_i \text{ –особенная} \Longrightarrow B_{ii}\text{-особенная матрица,} \\ (-E)^{i+j}\cdot B_{ii}\cdot\prod_{k=i+1}^{j} G_{k-1}^{-1}\cdot\prod_{k=i+1}^{j}(r_k\cdot q_k^{-1}), & \text{если } i\le j \text{ и } \Lambda_i\text{- особенная, } G_i \text{ –любая неособенная} \Longrightarrow B_{ii}\text{-особенная матрица,} \quad (2.24) \\ (-E)^{i+j}\cdot B_{ii}\cdot\prod_{k=j+1}^{i}\Lambda_k^{-1}\cdot\prod_{k=j+1}^{i}(p_k\cdot q_{k-1}^{-1}), & \text{если } i\ge j \text{ и } G_i\text{- особенная, } \Lambda_i \text{ – любая неособенная} \Longrightarrow B_{ii}\text{-особенная матрица,} \\ \{(-E)\cdot q_i^{-1}\cdot[\Lambda_i\cdot G_{i-1} - \gamma_i]^{-1}\}\cdot(-E)^{i+j-1}\cdot\prod_{k=j+1}^{i-1}\Lambda_k^{-1}\cdot\prod_{k=j+1}^{i}(p_k\cdot q_{k-1}^{-1}), & \text{если } j+1\le i\le m \text{ и } G_i\text{-неособенная, } \Lambda_i\text{ -особенная} \Longrightarrow B_{ii}\text{- особенная матрица ,} \end{cases}
$$

*) B_{ii} может быть вычислено в случае, когда Λ_i и G_i -неособенные, также и по любой из формул $(2.22)_{2)}$ или $(2.22)_{3)}$.

где $\Lambda_{i+1}=E-\Lambda_i^{-1}\cdot\gamma_i$, $\Lambda_2=E$, $\gamma_i=(p_i\cdot q_{i-1}^{-1})\cdot(r_i\cdot q_i^{-1})$, $i=2,3,\dots,m$

$$
G_{i-1}=E-G_i^{-1}\cdot\tilde{\gamma}_i,\quad G_{m-1}=E,\quad \tilde{\gamma}_i=(r_{i+1}\cdot q_{i+1}^{-1})\cdot(p_{i+1}\cdot q_i^{-1}),\quad i=m-1,\dots,1. \qquad (2.25)
$$

А также:

Если Λ_k - особенная матрица, то $\Lambda_{k+2}=E-(\Lambda_k-\gamma_k)^{-1}\cdot\Lambda_k\cdot\gamma_{k+1}$, (2.26) $\det(\Lambda_k-\gamma_k)\neq 0$, Λ_{k+1} - не определена, но зато определено произведение $\Lambda_k\cdot\Lambda_{k+1}=\Lambda_k-\gamma_k$, $k=2,\dots,m$, $\det(\Lambda_{k-1})\neq 0$ и Λ_{k-1} - определена в (2.25) .

Если G_k - особенная матрица, то $G_{k-2}=E-(G_k-\tilde{\gamma}_k)^{-1}\cdot G_k\cdot\tilde{\gamma}_{k-1}$, (2.27) $\det(G_k-\tilde{\gamma}_k)\neq 0$, G_{k-1} - не определена, но зато определено произведение $G_k\cdot G_{k-1}=G_k-\tilde{\gamma}_k$, $k=m-1,\dots,1$, $\det(G_{k+1})\neq 0$ G_{k+1} - определено в (2.25) .

Доказательство теоремы, как уже показано выше, в основном нами уже выполнено и основано на доказательствах теоремы 2, а также лемм I и 2. Остается лишь выполнить некоторый анализ, являющийся следствием особенности квазиминоров у B (2.24). Отметим предварительно, что в случае нулевых квазиминоров у матрицы C (I.26) вычисление диагональных блоков B_{ii} (2.22) не представляет трудностей по следующим причинам. Если оператор C (I.26) не вырожден, то одновременно вырожденными Λ_i и G_i при любых i быть не могут (на этом факте мы остановимся особо в следующей работе). Следовательно, если Λ_i - вырожденная матрица, а G_i -невырожденная, то вычисление B_{ii} осуществляется по формулам $(2.22)_3)$. При этом оператор $(\Lambda_i\cdot G_{i-1}-\gamma_i)$, как уже показывали выше, определен*), ограничен и неособенный. Аналогичная ситуация имеется и в случае, когда Λ_i-невырожденная, а G_i - вырожденная матрицы. На самом деле, в этом случае B_{ii} определяем по $(2.22)_{2)}$, поскольку G_i - определен по (2.25). В силу невырожденности Λ_i определен и ограничен Λ_{i+1} , как показывали уже выше, оператор $(G_i\cdot\Lambda_{i+1}-\tilde{\gamma}_i)$ - ограничен и неособенный. Отметим также, что те же самые операторы ($G_i\cdot\Lambda_{i+1}-\tilde{\gamma}_i$) и $(\Lambda_i\cdot G_{i-1}-\gamma_i)$ входят в определение элементов-блоков B_{ij} (2.24), когда либо G_i либо Λ_i - особенные матрицы. И, как видели выше, в этом случае при вычислении B_{ij} (2.24) никаких проблем из-за этого нет.

Итак, нам осталось для завершения доказательства теоремы обосновать (2.26) и (2.27), а также способ вычисления $\prod_{k=j+1}^{i-1,i}\Lambda_k^{-1}$ и $\prod_{k=i+2,i+1}^{j} G_k^{-1}$. Отметим предварительно, что согласно только что приведенному выше анализу элементы-блоки B_{ii} однозначно вычисляются

*) Поскольку G_i -неособенный, то G_{i-1} определен в соответствии с (2.25).

как в случае неособенных $\{\Lambda_i, G_i\}$, так и в случае, когда некоторые из них являются особенными матрицами и при этом являются ограниченными операторами, если будут определены Λ_{k+2} и G_{k-2} в случае особенных Λ_k и G_k соответственно.

Далее элементы-блоки B_{ij} (2.23) также однозначно вычисляются и ограничены, если $\{G_i$ и $\Lambda_i\}$ – неособенные операторы. Исходя из определения элементов-блоков B_{ij} (2.24) в случае, когда некоторые из матриц $\{G_k, \Lambda_k\}$ – особенные, видим, что они выражаются через ограниченные операторы $\{B_{ii}, [G_i \cdot \Lambda_{i+1} - \tilde{\gamma}_i]^{-1}, [\Lambda_i \cdot G_{i-1} - \gamma_i]^{-1}, q_i^{-1}, \prod\limits_{k=i+1}^{j} (r_k \cdot q_k^{-1})$ и $\prod\limits_{k=j+1}^{i} (p_k \cdot q_{k-1}^{-1})\}$, а также произведения операторов $\prod\limits_{k=i+2}^{j} G_{k-1}^{-1} = \prod\limits_{k=i+1}^{j-1} G_k^{-1}$, $\prod\limits_{k=i+1}^{j} G_{k-1}^{-1} = \prod\limits_{k=i}^{j-1} G_k^{-1}$, $\prod\limits_{k=j+1}^{i-1} \Lambda_k^{-1}$, $\prod\limits_{k=j+1}^{i} \Lambda_k^{-1}$, которые должны быть ограниченными, в силу требования ограниченности элементов-блоков B_{ij}. Как видим из определения указанных произведений операторов (I.32) и (I.3I), они будут ограниченными, если $\{G_k^{-1}\}_{k=i+1,i}^{j-1}$ и $\{\Lambda_k^{-1}\}_{k=j+1}^{i-1,i}$ -обратные операторы при любом k из указанных интервалов ограничены, что соответствует случаю (2.23). Однако в случае (2.24), т.е. когда некоторые из Λ_k и G_k в указанных выше интервалах изменения индекса k оказываются особенными, указанные произведения нуждаются в доопределении, в силу неограниченности Λ_k^{-1} и G_k^{-1}, чтобы матрицы B_{ij} (2.24) оставались бы ограниченными.

Итак, рассмотрим более подробно в случае особенности любой из Λ_k и G_k -матриц эти произведения операторов

$$\prod_{k=i}^{j-1} G_k^{-1}, \text{ если } i \le j, \tag{2.28}$$

$$\prod_{k=i+1}^{j-1} G_k^{-1}, \text{ если } i+1 \le j, \tag{2.28$'$}$$

$$\prod_{k=j+1}^{i} \Lambda_k^{-1}, \text{ если } j \le i, \tag{2.29}$$

$$\prod_{k=j+1}^{i-1} \Lambda_k^{-1}, \text{ если } j+1 \le i. \tag{2.29$'$}$$

Для любого $i=j$ и $i+1=j$, если в указанных произведениях (2.28) и (2.28)$'$ особенной является только матрица G_i, эти произведения в соответствии с определениями (I.32) равны тождественному оператору E, т.е. в соответствии с (2.24), (I.34) $B_{ij}=B_{ii}$ или $B_{ij}=B_{ii+1}$, которые ограничены и однозначно определимы, как показано ранее. Аналогичная ситуация возникает и когда $j=i$ в (2.29) и $i=j+1$ в (2.29)$'$, т.к. B_{ii} и B_{ii-1} также определены. Таким образом, когда в указанных произведениях имеется лишь по одному

сомножителю и он особенный, то никаких проблем не возникает. Не возникает также никаких проблем, когда в указанных произведениях по одному неособенному сомножителю. На самом деле, при $j=i+1$ из (2.28) имеем $\prod\limits_{k=i}^{i} G_k^{-1} = G_i^{-1}$, но тогда в соответствии с (2.24) Λ_i -особенная, а G_i -неособенная. Либо при $j=i-1$ из (2.29) имеем $\prod\limits_{k=i}^{i} \Lambda_k^{-1} = \Lambda_i^{-1}$, но в соответствии с (2.24) тогда G_i -особенная, а Λ_i – неособенная.

Пусть теперь в указанных произведениях (2.28)÷(2.29) больше чем по одному сомножителю, среди которых есть обратные к вырожденным операторам. Как видим, из этих произведений в подобном случае достаточно проанализировать лишь произведения

$$\prod_{k=i}^{j-1} G_k^{-1} \quad \text{и} \quad \prod_{k=j+1}^{i} \Lambda_k^{-1}. \tag{2.30}$$

Как было показано в лемме I, если оператор Λ_k ограниченный и вырожденный при ограниченном B_{kk}, то Λ_{k-1} – ограниченный не вырожденный. С другой стороны, в соответствии с (2.25) оператор Λ_{k+1} в этом случае будет неограниченным (из-за неограниченности Λ_k^{-1}), если его определять в соответствии с процессом (2.25). Другими словами, процесс определения $\{\Lambda_k\}$ (2.25) "прерывается" из-за невозможности определить Λ_{k+1}, что создает известные трудности при его вычислениях на ЭВМ. Но эту трудность легко преодолеть из-за того, что нам нужен не сам оператор Λ_k^{-1}, а произведение $\prod\limits_{k=j+1}^{i} \Lambda_k^{-1}$, а также оператор Λ_{k+2}, чтобы продолжить процесс (2.25). Поэтому представим процесс (2.25) для $\{\Lambda_k\}$ в виде

$$\Lambda_k \cdot \Lambda_{k+1} = \Lambda_k - \gamma_k. \tag{2.3I}$$

Из (2.3I) следует, что, несмотря на то, что не удается явно определить Λ_{k+1}, но произведение $\Lambda_k \cdot \Lambda_{k+1}$ есть ограниченный оператор, в силу ограниченности Λ_k и γ_k $\Lambda_{k+1}^{-1} \cdot \Lambda_k^{-1} = (\Lambda_k - \gamma_k)^{-1}$ – есть ограниченный обратный оператор из-за ограниченности B_{ij}.

В соответствии с определением (I.3I) имеем

$$\prod_{k=j+1}^{i} \Lambda_k^{-1} = \Lambda_i^{-1} \cdot \Lambda_{i-1}^{-1} \cdot \Lambda_{i-2}^{-1} \dots \Lambda_{j+3}^{-1} \cdot \Lambda_{j+2}^{-1} \cdot \Lambda_{j+1}^{-1}, \text{ если } i > j. \tag{2.32}$$

Теперь, проводя аналогичное рассуждение, как и выше для последовательности $\{G_k\}$, процесс (2.25) представим в виде

$$G_k \cdot G_{k-1} = G_k - \tilde{\gamma}_k. \tag{2.33}$$

Из (2.33) также следует, что, несмотря на то, что не удается явно определить G_{k-1}, но произведение $G_k \cdot G_{k-1}$ есть ограниченный оператор, в силу ограниченности G_k и $\tilde{\gamma}_k$ существует ограниченный обратный $G_{k-1}^{-1} \cdot G_k^{-1} = (G_k - \tilde{\gamma}_k)^{-1}$ из-за ограниченности B_{ij}. В соответствии с определением (I.32) имеем

$$\prod_{k=i}^{j-1} G_k^{-1} = G_i^{-1} \cdot G_{i+1}^{-1} \cdot G_{i+2}^{-1} \cdots G_{j-3}^{-1} \cdot G_{j-2}^{-1} \cdot G_{j-1}^{-1}, \text{ если } i < j. \tag{2.34}$$

Далее отметим, что входящие в произведения (2.32) и (2.34) в соответствии с определениями (I.3I) и (I.32) последние члены последовательностей $\{\Lambda_k\}$ и $\{G_k\}$ (т.е. Λ_i и G_i) не могут быть особенными в силу (2.24).

В противном случае произведения $\prod_{k=j+1}^{i} \Lambda_k^{-1}$ и $\prod_{k=i}^{j-1} G_k^{-1}$ были бы неограниченными, а это, в свою очередь, противоречило бы ограниченности B_{ij} (2.24). И в силу леммы I в произведениях (2.32) и (2.34) три соседних члена последовательности $\{\Lambda_k\}$ и $\{G_k\}$ тоже особенными быть не могут. Из этих рассуждений следует, что произведения (2.32) и (2.34) мы можем всегда определить, воспользовавшись (2.3I) и (2.33), в случае, когда встречаются особенные матрицы Λ_k и G_k независимо от того, будут особенными или неособенными Λ_{j+1} и G_{j-1} в (2.32) и (2.34).

Итак, в завершение доказательства теоремы покажем справедливость представлений (2.26) для Λ_{k+2} и (2.27) для G_{k-2}. В случае особенного Λ_k -оператора, как уже показывали выше, Λ_{k-1} - неособенный и ограниченный и определяется по (2.25). Для операторов Λ_{k+2} и Λ_{k+1} будем иметь в соответствии с (2.3I)

$$\Lambda_{k+1} \cdot \Lambda_{k+2} = \Lambda_{k+1} - \gamma_{k+1} \overset{(2.25)}{=\!=} (E - \Lambda_k^{-1} \gamma_k) - \gamma_{k+1} = \Lambda_k^{-1} \cdot \left[(\Lambda_k - \gamma_k) - \Lambda_k \gamma_{k+1} \right].$$

Откуда получаем

$$\Lambda_k \cdot \Lambda_{k+1} \cdot \Lambda_{k+2} = (\Lambda_k - \gamma_k) - \Lambda_k \gamma_{k+1}. \tag{2.35}$$

Аналогично для последовательности $\{G_k\}$ получаем, если G_k - особенная матрица, то

$$G_k \cdot G_{k-1} \cdot G_{k-2} = (G_k - \tilde{\gamma}_k) - G_k \cdot \tilde{\gamma}_{k-1}. \tag{2.36}$$

Если теперь воспользоваться в (2.35) определением (2.3I), а в (2.36) определением (2.33), то получаем в силу

$$\det(\Lambda_k - \gamma_k) \neq 0 \quad \text{и} \quad \det(G_k - \tilde{\gamma}_k) \neq 0$$

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_{k+2} &= E - (\Lambda_k - \gamma_k)^{-1} \cdot \Lambda_k \gamma_{k+1} \quad \text{и} \\ G_{k-2} &= E - (G_k - \tilde{\gamma}_k)^{-1} \cdot G_k \tilde{\gamma}_{k-1}. \end{aligned}\right. \tag{2.37}$$

Итак, требованию ограниченности элементов-блоков B_{ij} (2.24) привело к определению ограниченных матриц Λ_{k+2} и G_{k-2} (2.37), когда Λ_k и G_k - особенные, а также определению произведений (2.3I) и (2.33), хотя сами Λ_{k+1} и G_{k-1} в этом случае не определены в соответствии с процессами (2.25). Доказательство теоремы 3 завершено.

Замечание 2. Из результатов, полученных в данной работе, следуют (как можно это установить) результаты для скалярного случая /I-3/ (кроме теоремы 7 в /2/). Теорема 7 в /2/, таким образом, характерна только для скалярного случая.

Замечание 3. При численной реализации алгоритма, следующего из доказанной выше теоремы 3, на ЭВМ диагональные блоки-матрицы $\{B_{ii}\}_{i=1}^{m}$ вычисляются устойчиво к ошибкам округления на ЭВМ при $\{\|\gamma_k\| \leq 1$ и $\|\tilde{\gamma}_k\| \leq 1\}_{k=2}^{m}$. Ошибки в вычислении B_{ij} при $i \neq j$ не превосходят ошибок B_{ii}, если

$$\left\| \prod_{k=j+1}^{i} \Lambda_k^{-1} \cdot \prod_{k=j+1}^{i} (p_k \cdot q_{k-1}^{-1}) \right\| \overset{i>j}{\leq} 1 \quad \text{и} \quad \left\| \prod_{k=i+1}^{j} G_{k-1}^{-1} \cdot \prod_{k=i+1}^{j} (r_k \cdot q_k^{-1}) \right\| \overset{j>i}{\leq} 1 \tag{2.38}$$

для (2.23). Аналогичные утверждения легко получаются и для случая особенных квазиминоров из (2.24). Очевидно, условию (2.38) удовлетворяют все матрицы с диагональным преобладанием, составляющие подмножество всех рассматриваемых нами матриц вида (I.26).

Заключение

Основной целью настоящей работы, как уже отмечали выше, было обобщение теорем , полученных в /2,3/ на случай квазитрехдиагональных матриц. В результате доказаны теоремы I,2 и 3, в которых подробным образом анализируется структура операторов, обратных к квазитрехдиагональным. Особое место занимает теорема 3, в которой, по-видимому впервые, предложена компактная устойчивая схема обращения квазитрехдиагональных операторов, некоторые из квазиминоров которых обращаются в нуль.

Авторы искренне признательны члену-корреспонденту АН СССР Н.Н.Говоруну за поддержку настоящего цикла работ.

Литература

I. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, PII-85-304, Дубна, I985.
2. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, PII-85-488, Дубна, I985.

3. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, PII-85-489, Дубна, I985.
4. Будагов Ю.А., Емельяненко Г.А., Одинцов В.Г., ОИЯИ, PI0-9950, Дубна, I976.
5. Zhigunow V.P., Sokolov S.N. Sov. J. Part. Nucl.,1982, v.13, No.5,p.1024-1069.
6. Paseaud C.,Morellet P. L.A.L. Rappart No.1227, Orsay, 1970 .
7. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. "Наука", М., I978.
8. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректных задач. М., МГУ, I974.
9. Гребенников А.И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. Изд-во МГУ, М., I983.
I0. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики, "Наука", Новосибирск, I973.
II. Rizvi S. A.H.Inverses of quasitridiagonal matrices. "Linear Algebra and Appl.", 56, p. 177-184, 1984.
I2. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. М., "Наука", I984.
I3. Джордж А., Лю Дж. Численные решения больших разреженных систем уравнений (пер. с анг. Х.Д.Икрамова), "Мир", М., I984.
I4. Дж.Х.Уилкинсон. Алгебраическая проблема собственных значений. "Наука", М., I970.
I5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. "Наука", М., I98I.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 июля I986 года.

Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. P11-86-504

О свойствах систем линейных уравнений с неособенными трехдиагональными, ленточными и квазитрехдиагональными матрицами. Свойства матриц, обратных к квазитрехдиагональным

Изложены основные результаты обобщения нетрадиционного подхода /1-3/ к изучению свойств операторов, обратных к трехдиагональным, на случай операторов квазитрехдиагональной структуры. Получены компактные устойчивые схемы обращения таких операторов как в случае всех отличных от нуля квазиминоров, так и в случае, когда некоторые из квазиминоров обращаются в нуль.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Emelyanenko G.A., Rakhmonov T.T. P11-86-504

On the Properties of Systems of Linear Equations with Non-Singular Tridiagonal, Band and Quasitridiagonal Matrices. The Properties of Inverse Matrices to Quasitridiagonal Ones

The main results on generalization of non-traditional approach to the investigation of the properties of inverse operators to tridiagonal in the quasitridiagonal case is given. The compact stable schemes of inversion of such operators both in the case of all nonzero quasiminors and in the case when some of the quasiminors becomes zero are obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986