сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-86-415

Т.Жанлав, Е.П.Жидков

ПРИМЕНЕНИЕ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ПО РИЧАРДСОНУ К КУБИЧЕСКИМ СПЛАЙНАМ

1986

Как известно, экстраполяция приближений на последовательности сеток позволяет получить более точное приближение и в настоящее время широко применяется для различных задач /I,2/. В данной работе рассматривается метод экстраполяции по Ричардсону для кубических сплайнов с последующим применением его к решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

I. Пусть $\overset{\circ}{S}(x)$ - кубический интерполяционный сплайн на сетке Δ_{N_o}: $a=x_0^\circ < x_1^\circ < \ldots < x_{N_o}^\circ = b$ для достаточно гладкой функции $u(x)$. Считаем, что сетка Δ_{N_o} равномерна с шагом $h_o = (b-a)/N_o$. Дополняя сетку Δ_{N_o} точками $x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0^\circ$, $x_{N_o}^\circ < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3}$ /3/, представим сплайн в виде разложения по базису /3/:

$$S^\circ(x) = \sum_{j=-1}^{N_o+1} \alpha_j^\circ \, B_j(x) \quad , \tag{I}$$

где $B_j(x)$ - базисные B-сплайны. Для коэффициентов представления (I) справедливо

$$\alpha_i^\circ = S_i^\circ - \frac{h^2}{6} S_i^{\circ\prime\prime} = , \quad i=0,1,\ldots,N_o \tag{2}$$

$$= u_i - \frac{h^2}{6} S_i^{\circ\prime\prime} .$$

Условия интерполяции дают уравнения

$$\alpha_{i-1}^\circ + 4\alpha_i^\circ + \alpha_{i+1}^\circ = 6u_i \ , \quad i=0,1,\ldots,N_o . \tag{3}$$

Предполагается, что заданы краевые условия одного из типов I-IУ /3/. Известно, что $S_i^{\circ\prime\prime}$ аппроксимирует u_i'' с точностью $O(h^2)$. Поэтому из (2),(3) ясно, что для достаточно гладкой функции $u(x)$ решение уравнения (3) можно искать в виде

$$\alpha_i^\circ = \sum_{j=0}^{\ell} h^{2j} u_i^{2j} d_j + O(h^{2\ell+2}) \ , \quad \ell \geqslant 0 \tag{4}$$

$$i=0,1,\ldots,N_o$$

Подставляя (4) в уравнение (3) и отбрасывая член $O(h^{2\ell_o+2})$, получим систему для неизвестных коэффициентов d_j :

$$
\left.\begin{aligned}
&6d_o = 6\\
&d_o + 6d_1 = 0\\
&2\left(\tfrac{1}{4!}d_o + \tfrac{1}{2!}d_1\right) + 6d_2 = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&2\left(\tfrac{1}{(2\ell)!}d_o + \tfrac{1}{(2(\ell-1))!}d_1 + \ldots + \tfrac{1}{2!}d_{\ell-1}\right) + 6d_\ell = 0
\end{aligned}\right\} . \qquad (5)
$$

Определитель этой системы равен $\Delta = 6^{\ell+1} \neq 0$, и поэтому она имеет единственное решение. При этом решение определяется явным образом, начиная с первого уравнения

$$
d_o = 1,\ d_1 = -\frac{1}{6},\ d_2 = \frac{1}{72},\ d_3 = -\frac{1}{2160},\ d_4 = -\frac{17}{9\cdot 8!}\ \ldots\ldots ,
$$

и тем самым мы имеем

$$
\alpha_i^o = u_i - \frac{h^2}{6}u_i'' + \frac{h^4}{72}u_i^{\mathrm{iv}} - \frac{h^6}{3\cdot 6!}u_i^{\mathrm{vi}} + \frac{17h^8}{9\cdot 8!}u_i^{\mathrm{viii}} + \ldots . \qquad (6)
$$

$$
i = 0, 1, \ldots, N_o .
$$

Аналогичная формула имеет место и для коэффициентов локально-аппроксимационного кубического сплайна [3,4]:

$$
\hat{\alpha}_i = \frac{1}{6}(8u_i - u_{i-1} - u_{i+1}) = u_i - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\ell} \frac{h^{2k}}{(2k)!}u_i^{(2k)} + O(h^{2\ell+2}) ; \qquad (6')
$$

$$
i = 1, 2, \ldots, N_{o-1} .
$$

А для коэффициентов квазиинтерполяционного кубического сплайна имеет место [4]

$$
\tilde{\alpha}_i = u_i - \frac{h^2}{6}u_i'' , \quad i = 0, 1, \ldots, N_o . \qquad (7)
$$

Из формул (6), (6'), (7) следуют некоторые известные соотношения для сплайнов. В частности, связи между коэффициентами этих сплайнов выражаются формулой

$$
\frac{\hat{\alpha}_i + \alpha_i}{2} = \tilde{\alpha}_i + O(h^6) , \quad i = 1, 2, \ldots, N_{o-1} .
$$

Рассмотрим теперь последовательность вложенных друг в друга сеток Δ_{N_n} с шагами $h_n = h/2^n$, $n = 0, 1, \ldots$. Ясно, что узлы основной сетки Δ_{N_o} являются общими для всех сеток Δ_{N_n}. Пусть $S^n(x)$ – последовательность интерполяционных кубических сплайнов на сетке Δ_{N_n} для функции $u(x)$. Представим их в виде (I)

$$
S^n(x) = \sum_{j=-1}^{N_n+1} \alpha_j^n B_j(x) , \quad n = 0, 1, \ldots . \qquad (8)
$$

Формула (4), очевидно, справедлива и для этих сплайнов, т.е.

$$
\alpha_i^n = \sum_{j=0}^{\ell} h_n^{2j} u_i^{(2j)} d_j + O(h_n^{2\ell+2}) , \quad n = 0, 1, \ldots \ell \qquad (9)
$$

$$
i = 0, 1, \ldots, N_o .
$$

Из (9) видно, что хотя α_i^n аппроксимирует u_i с точностью $O(h_n^2)$, оказывается возможным приблизить функцию с помощью их линейной комбинации с более высоким порядком точности. Действительно, умножая (9) на некоторое число γ_n и суммируя результаты по n от 0 до ℓ, получим

$$
\sum_{n=0}^{\ell} \gamma_n \alpha_i^n = \sum_{j=0}^{\ell} u_i^{(2j)} d_j \Big(\sum_{n=0}^{\ell} h_n^{2j} \gamma_n \Big) + O(h_n^{2\ell+2}) . \qquad (10)
$$

Выберем γ_n таким, чтобы выполнялись соотношения

$$
\sum_{n=0}^{\ell} \gamma_n = 1 , \quad \sum_{n=0}^{\ell} h_n^{2j} \gamma_n = 0 , \quad j = 1, 2, \ldots, \ell . \qquad (11)
$$

Как известно, система (II) разрешима, в частности, при $h_n = h/2^n$, ее решение дается в таблице I при некоторых различных ℓ [2].

Таблица I

ℓ	γ_0	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
I	-I/3	4/3			
2	I/45	-4/9	64/45		
3	-I/2835	4/I35	-64/I35	4096/2835	
4	I/722925	-4/8305	64/2025	-4096/8505	I048576/722925
параметры	h	h/2	h/4	h/8	h/16

В результате мы имеем формулу

$$
u_i = \sum_{n=0}^{\ell} \gamma_n \alpha_i^n + O(h_o^{2\ell+2}) , \quad i = 0, 1, \ldots, N_o . \qquad (12)
$$

Из (I2) ясно, что коэффициенты интерполяционных сплайнов представляют самостоятельный интерес с точки зрения аппроксимации функции, хотя сами сплайны точно дают значения функции в узлах сетки.

Аналогичная процедура экстраполяции по Ричардсону имеет место для коэффициентов квазиинтерполяционных и локально-аппроксимационных кубических сплайнов. А именно справедливы

$$u_i = \frac{4}{3}\tilde{\alpha}_i^1 - \frac{1}{3}\tilde{\alpha}_i^o, \quad i=0,1,\dots,N_o, \qquad (13)$$

$$u_i = \sum_{n=0}^{\ell} \gamma_n \hat{\alpha}_i^n + O(h_o^{2\ell+2}), \quad i=1,\dots,N_o-1, \qquad (14)$$

где γ_n – решение системы (11).

Можно аппроксимировать четные производные функции $u(x)$ в узловых точках сетки с помощью процедуры Ричардсона. Имеют место формулы:

$$u_i^{(2S)} = \frac{1}{h_o^{2S}\, d_{2S}} \sum_{n=0}^{\ell} \bar{\gamma}_n \alpha_i^n + O(h^{2(\ell-S)+2}), \quad S=1,2,\dots \ell, \quad i=0,1,\dots,N_o \qquad (15)$$

$$u_i^{(2S)} = -\frac{3(2S)!}{h_o^{2S}} \sum_{n=0}^{\ell} \bar{\gamma}_n \hat{\alpha}_i^n + O(h^{2(\ell-S)+2}), \quad S=1,2,\dots,\ell, \quad i=1,\dots,N_o-1, \qquad (16)$$

где $\bar{\gamma}_n$ – решение системы

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\ell} \bar{\gamma}_n h_n^{2j} = 0, \quad j=0,1,\dots,S-1,S+1,\dots,\ell \\ &\sum_{n=0}^{\ell} \bar{\gamma}_n h_n^{2S} = h_o^{2S} \end{aligned}\right\}. \qquad (17)$$

Очевидно, система (17), как и (11), имеет единственное решение. Из формул (14), (16) можно получить некоторые формулы приближения функции $u(x)$ и ее четных производных. Приведем некоторые из них:

1) $\ell = 1$ $\quad u_i = \frac{1}{6}\left[-u_{i-2} + 4(u_{i-1} + u_{i+1}) - u_{i+2}\right] + O(h^4)$,

2) $\ell = 2$ $\quad u_i = \frac{1}{90}\left[u_{i-4} - 20(u_{i-2} + u_{i+2}) + 64(u_{i-1} + u_{i+1}) + u_{i+4}\right] + O(h^6)$,

$$u_i'' = \frac{u_{i-4} - 17(u_{i-2} + u_{i+2}) + 16(u_{i-1} + u_{i+1}) + u_{i+4}}{6h^2} + O(h^4),$$

$$u_i^{IV} = \frac{u_{i-4} - 5(u_{i-2} + u_{i+2}) + 4(u_{i-1} + u_{i+1}) + u_{i+4}}{15h^4} + O(h^2).$$

Экстраполяция по Ричардсону осуществима и для многомерных сплайнов. Например, бикубический сплайн класса $C^2(\Omega)$ на прямоугольнике Ω представим в виде [3]

$$S(x,y) = \sum_{k=-1}^{N_o+1} \sum_{r=-1}^{M_o+1} b_{kr}\, B_k(x)\, \bar{B}_r(y).$$

Для равномерной сетки имеет место формула

$$b_{ij} = S_{ij} - \frac{h_o^2}{6} D^{20} S_{ij} - \frac{\ell_o^2}{6} D^{02} S_{ij} + \frac{\ell_o^2 h_o^2}{36} D^{22} S_{ij},$$

где h_o, ℓ_o – шаги сеток по x и y соответственно. Отсюда ясно, что для b_{ij} имеет место формула, аналогичная (4).

2. На практике часто применяется кубический сплайн для численного решения как обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнений в частных производных. Применение метода сплайн-коллокаций [3] для уравнений второго порядка обычно дает приближение, точность которого имеет второй порядок. В качестве примера рассмотрим краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &Lu = u'' + p(x)u'(x) + q(x)u = f(x), \quad x \in (a,b) \\ &\ell_1 u = \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \gamma_1 \\ &\ell_2 u = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_2 \end{aligned}\right\}, \qquad (18)$$

где $q(x) \le q < 0$, $\beta_1 \le 0$, $\beta_2 \ge 0$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. В этом случае существует единственное решение задачи (18). Ясно, что если $f(x)$, $g(x) \in C^r$, $p \in C^{r+1}$, то $u(x) \in C^{r+2}[a,b]$. Приближенное решение задачи (18) ищется в виде кубического сплайна (1), и требуется выполнение равенства

$$\left.\begin{aligned} &L\overset{o}{S}_i = f_i \qquad i = 0,1,\dots,N_o \\ &\ell_1 S^o(a) = \gamma_1, \quad \ell_2 S^o(b) = \gamma_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (19)$$

Как известно [3], решение задачи (19) существует при достаточно малых шагах h_i, и имеет место сходимость приближенного решения к точному со скоростью $O(h^2)$, т.е.

$$\| S^o - u \|_{C[a,b]} = O(h_o^2), \qquad (20)$$

которая немедленно вытекает из соотношений

$$|\alpha_i^o - u_i| = O(h_o^2) \quad i=0,1,\dots,N_o.$$

Задача (19), по сути, есть разностная схема относительно коэффициентов α_j^o. Нетрудно видеть, что при достаточно гладких функциях p, q и f выполнены все условия теоремы 2.2 [2] для задач (18), (19), и, следовательно, для коэффициентов α_j^o справедливо разложение по четным степеням h_o. Таким образом, мы имеем возможность применения экстраполяции по Ричардсону. Например, на двух сетках с шагами $h_n = h/2^n$, $n=0,1$ решим задачу (19):

$$
\left.\begin{aligned}
&LS_i^n = f_i \qquad i=0,1,\dots,N_n \\
&\ell_1 S^n(a) = \gamma_1 \qquad \ell_2 S^n(b) = \gamma_2
\end{aligned}\right\} \quad n=0,1 \tag{2I}
$$

и составим линейную комбинацию величин α_i^o, α_i^1 :

$$\alpha_i = \frac{4}{3}\alpha_i^1 - \frac{1}{3}\alpha_i^o \qquad i=0,\dots,N_o .$$

Тогда по теореме 2.3 /2/ справедлива оценка

$$|\alpha_i - u_i| \leqslant Ch^4 ,$$

которая имеет место, если $f,g \in C^4[a,b]$, $p \in C^5[a,b]$.

Построим теперь кубический сплайн на сетке ΔN_o, удовлетворяющий условиям

$$
\left.\begin{aligned}
&\tilde{S}(x_i) = \tilde{u}_i = \frac{4}{3}\alpha_i^1 - \frac{1}{3}\alpha_i^o \qquad i=0,1,\dots,N_o \\
&\ell_1\tilde{S}(a) = \gamma_1 \qquad \ell_2\tilde{S}(b) = \gamma_2
\end{aligned}\right\}. \tag{22}
$$

Очевидно, такой сплайн существует и единствен.

Покажем, что

$$\|\tilde{S}(x) - u(x)\|_{C[a,b]} = O(h^4). \tag{23}$$

Для доказательства используем многочленное представление сплайна /3/:

$$\tilde{S}(x) = \tilde{u}_i(1-t) + \tilde{u}_{i+1}t - \frac{h^2 t(1-t)}{6}\left[(2-t)\tilde{M}_i + (1+t)\tilde{M}_{i+1}\right], \; x\in[x_i, x_{i+1}]$$

$$t = (x-x_i)/h_i \in [0,1] ,$$

где $\tilde{M}_i$ удовлетворяют системе

$$
\left.\begin{aligned}
&2\tilde{M}_o + \tilde{M}_1 = -\frac{6}{h\beta_1}\left[\gamma_1 - \alpha_1\tilde{u}_o - \beta_1\frac{\tilde{u}_1-\tilde{u}_o}{h}\right], \quad \beta_1 \neq 0 \\
&\tilde{M}_{i-1} + 4\tilde{M}_i + \tilde{M}_{i+1} = 6\frac{\tilde{u}_{i+1} - 2\tilde{u}_i + \tilde{u}_{i-1}}{h^2} \\
&\tilde{M}_{N_o-1} + 2\tilde{M}_{N_o} = \frac{6}{h\beta_2}\left[\gamma_2 - \alpha_2\tilde{u}_{N_o} - \beta_2\frac{\tilde{u}_{N_o}-\tilde{u}_{N_o-1}}{h}\right], \quad \beta_2 \neq 0
\end{aligned}\right\}. \tag{24}
$$

Очевидно, что интерполяционный кубический сплайн записывается в виде

$$S(x) = u_i(1-t) + tu_{i+1} - \frac{h^2 t(1-t)}{6}\left[(2-t)M_i + (1+t)M_{i+1}\right] \quad x\in[x_i, x_{i+1}].$$

При этом M_i удовлетворяет системе, аналогичной (24), в которой вместо величин с волной стоят величины без волны. С учетом того, что матрица A системы (24) обратима и $\|A^{-1}\| \lesssim 1$, получаем

$$|M_i - \tilde{M}_i| = O(h^2) \quad , i=0,\dots,N_o . \tag{25}$$

Следовательно,

$$\|\tilde{S}(x) - S(x)\|_C = O(h^4).$$

Применяя неравенство треугольника, с учетом погрешности интерполяции /3/, получаем

$$\|\tilde{S} - u\|_C \leqslant \|\tilde{S} - S\|_C + \|S - u\| = O(h^4).$$

Если хотя бы один из коэффициентов β_1, β_2 в краевом условии равен нулю, то вместо краевых условий в (22) можно взять краевые условия типа IУ /3/, и тем самым переходим к (25).

3. Численные эксперименты

Для иллюстрации эффекта уточнения приближенного решения рассмотрим задачу /2/

$$
\left.\begin{aligned}
&u'' + \frac{1}{1+x}u' - \frac{x}{1+x}u = -\frac{1+x^2+x^3}{(1+x)^3} , \quad x\in(0,1) \\
&u(0) - u'(0) = -1, \quad 2u(1) + u'(1) = 5/4
\end{aligned}\right\}.
$$

Точное решение задачи имеет вид $u(x) = x/(1+x)$.

Приведем таблицу максимальных погрешностей в узлах сетки.

Таблица 2

h	Максимальная погрешность решения задачи (2I) $\Delta(h)$	Максимальная погрешность экстраполяционного решения (2I')		
		$\Delta(h,h/2)$	$\Delta(h,h/2,h/4)$	$\Delta(h,h/2,h/4,h/8)$
0,I	$5{,}29270\cdot I0^{-3}$	$3{,}29466\cdot I0^{-7}$	$4{,}49835\cdot I0^{-I0}$	$I{,}032796\cdot I0^{-I3}$
0,05	$I{,}3233I\cdot I0^{-3}$	$2{,}07I337\cdot I0^{-7}$	$7{,}I3034\cdot I0^{-I2}$	
0,025	$3{,}30837\cdot I0^{-4}$	$I{,}29653\cdot I0^{-8}$		
0,0I25	$8{,}27098\cdot I0^{-5}$			

Литература

I. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. "Наука", М., I977.
2. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. "Наука", М., I979.
3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. "Наука", М., I980.
4. Жанлав Т. В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып.87). ИМ СО АН СССР, Новосибирск, I98I, с.3.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 июня I986 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Жанлав Т., Жидков Е.П. Р11-86-415
Применение экстраполяции по Ричардсону к кубическим сплайнам

Показано, что метод экстраполяции по Ричардсону работает для коэффициентов В-представления кубических интерполяционных сплайнов, определенных на последовательности сеток. Результат применен при уточнении сплайнового решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод авторов

Zhanlav T., Zhidkov E.P. P11-86-415
Application of the Extrapolation of Richardson to Cubic Splines

It is shown that the extrapolation method of Richardson works for the coefficients of B-representation of cubic interpolation splines defined on the sequence of grids. The result is applied to heighten the accuracy of the spline solution of boundary value problems for ordinary differential equations of the second order.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986