

**сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна**

P11-86-333

Е.П.Жидков, Г.Е.Мазуркевич, Б.Н.Хоромский

**ЭКОНОМИЧНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД УЧЕТА
КРАЕВОГО УСЛОВИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ
ПРИ РЕШЕНИИ**

**ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ МАГНИТОСТАТИКИ
НА ОСНОВЕ СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦИАЛА**

Учет пространственных симметрий.

Модельные расчеты

1986

Настоящая работа является продолжением статьи ^{/1/}. Здесь используются введенные в ^{/1/} обозначения.

В §§1,2 построен алгоритм учета пространственных симметрий вектора неизвестных алгебраической системы /1.2/ из работы ^{/1/} с сохранением оптимизирующих свойств развитого в ^{/1/} итерационного процесса решения этой системы. Например, при использовании трех плоскостей симметрии размерность вектора неизвестных уменьшается в 8 раз, а среднее время на выполнение одной внешней итерации сокращается в 6-10 раз по сравнению с общим случаем. Проблема заключается в том, что при естественном суммировании матричных блоков, в соответствии с симметриями решения, нарушается блочно-теплицева структура матриц K_h и L_h , что в свою очередь не позволяет до конца использовать уменьшение размерности задачи при умножении этих матриц на вектор. Поэтому, хотя формально массив неизвестных уменьшается в 8 раз, итерации реализуются на подпространстве сеточных функций несколько большей размерности.

Для решения возникающей системы алгебраических уравнений используется блочный метод Зейделя. Получена оценка скорости сходимости итераций на основе свойства строгого диагонального преобладания матрицы системы /§3/. В §4 приведены результаты тестовых расчетов по программе BIESM3, реализующей предложенный алгоритм, а также по программе BIEGM3, предназначенной для общего случая. Далее представлены данные о комплексе программ IDSM3, в котором реализован многосеточный итерационный процесс разделения области для учета краевого условия на бесконечности в пространственных задачах магнитостатики. На каждом шаге внешних итераций используется алгоритм BIESM3. Приводятся результаты расчета модельных краевых задач в неограниченной области. В частности, для определения решения такой задачи на прямоугольной сетке размерности $32 \times 32 \times 32$ /с двойной точностью/ при значении магнитной проницаемости $\mu = 10$, вне сеточной области требуется около $T = 20$ мин счетного времени ЭВМ ЕС-1061 при относительной точности расчета 10^{-3} .

§1. ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА МАТРИЦ K_h И L_h

Рассмотрим инвариантные подпространства матрицы K_h , существование которых связано с симметриями поверхности Γ .

Пусть $E_{x,\omega}$, $E_{y,\omega}$, $E_{z,\omega}$ есть подпространства сеточных функций, определенных на сеточной области $\Gamma_h = \{\mu_{kl}^r\}$ ^{/1/}, сим-

метричных ($\omega = +1$) либо антисимметричных ($\omega = -1$) относительно плоскостей $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ соответственно /см. рис.1а/ /1/. Справедлива

Лемма 1. Операторы K_h и L_h имеют следующие инвариантные подпространства при $\omega = \pm 1$

$$a/ E_{a,\omega}, \quad a = x, y, z;$$

$$б/ E_{a,\omega} \cap E_{\beta,\omega}, \quad a \neq \beta, \quad a, \beta = x, y, z;$$

$$в/ E_{x,\omega} \cap E_{y,\omega} \cap E_{z,\omega}.$$

Докажем, например, утверждение а/ для $u \in E_{x,\omega}$. Остальные случаи рассматриваются аналогично с учетом структуры матрицы K_h из /3.1/ работы /1/. В силу представления

$$E_{x,\omega} = E^1 \oplus \omega E^1 \oplus E_{x,\omega}^3 \oplus E_{x,\omega}^4 \oplus E_{x,\omega}^5 \oplus E_{x,\omega}^6,$$

где E^s - подпространства сеточных функций на Γ^s , $s = 1 \div 6$, вектор $u \in E_{x,\omega}$ имеет вид

$$u = (u^1, \omega u^1, u^3, u^4, u^5, u^6)^T; \quad u^i \in E_{x,\omega}^i, \quad i = 3 \div 6;$$

$$u^i = (u_1^i, \dots, u_p^i)^T,$$

$$u_j^i = (u_{j1}^i, \dots, u_{jq}^i)^T = (u_{j1}^i, \dots, u_{jq/2}^i, \omega u_{jq/2}^i, \dots, \omega u_{j1}^i)^T,$$

$$j = 1 \div p, \quad i = 3 \div 6.$$

Рассмотрим произведение $y = K_h u$, $y = (y^1, \dots, y^6)$. Векторы $y^1 \in E^1$, $y^2 \in E^2$ определяются формулами:

$$y^1 = \omega_x K_{12} u^1 + K_{13} u^3 + T_1 K_{13} u^4 + G_1^T K_{13} u^5 + T_1' G_1^T K_{13} u^6,$$

$$y^2 = K_{12} u^1 + K_{13} T_2 u^3 + T_1 K_{13} T_2 u^4 + G_1^T K_{13} T_2 u^5 + T_1' G_1^T K_{13} T_2 u^6.$$

Заметив, что

$$T_2 u^i = (E_q' u_1^i, \dots, E_q' u_p^i)^T, \quad E_q' u_j^i = \omega_x u_j^i, \quad j = 1 \div p, \quad i = 3 \div 6,$$

получаем для каждого слагаемого из второй суммы при $i = 3 \div 6$ соотношения вида $BT_2 u^i = \omega_x B u^i$, откуда следует $y^2 = \omega_x y^1$. Вектор y^3 определяется формулой

$$y^3 = (K_{31} + \omega_x T_3' K_{31}) u^1 + K_{34} u^4 + K_{35} u^5 + TK_{35} u^6.$$

Рассмотрим каждое из слагаемых. Матрицу $K_{31} + \omega_x T_3' K_{31}$ можно представить в блочном виде

$$K_{31} + \omega_x T_3' K_{31} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix}, \quad /1.1/$$

где A_i - матрицы размерности $p^2 \times q$, имеющие структуру

$$A_i = \begin{bmatrix} a_i \\ \vdots \\ \omega_x E_{q/2}' a_i \end{bmatrix}, \quad i = 1 \div p, \quad /1.2/$$

где a_i - матрица размерности $p^2 \times \frac{q}{2}$. Используя структуру /1.1/, /1.2/, получаем

$$(K_{31} + \omega_x T_3' K_{31}) u^1 \in E_{x,\omega}^3.$$

Представив K_{34} в виде

$$K_{34} = \{A_{|k-\ell|+1}\}, \quad k = 1 \div p, \quad \ell = 1 \div p,$$

$$A_k = \begin{array}{ccc} a_k^1 & | & a_k^2 \\ \vdots & | & \vdots \\ \vdots & | & \vdots \\ E_{q/2}' a_k^2 E_{q/2}' & | & E_{q/2}' a_k^1 E_{q/2}' \end{array} \quad k = 1 \div p, \quad /1.3/$$

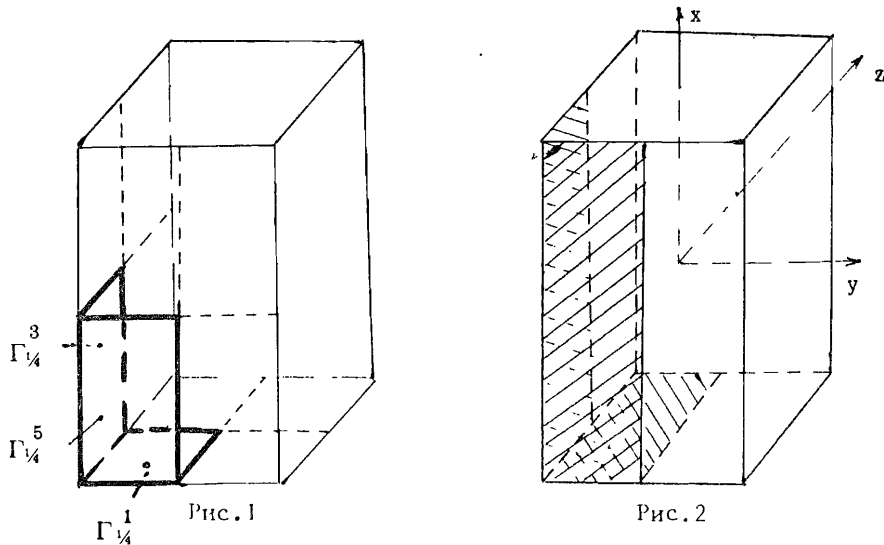
получаем $K_{34} u^4 \in E_{x,\omega}^3$. Блоки матрицы K_{35} имеют структуру /1.3/, в силу чего $K_{35} u^5 \in E_{x,\omega}^3$, $TK_{35} u^6 \in E_{x,\omega}^3$.

Из приведенных формул вытекает $y^3 \in E_{x,\omega}$. Аналогично устанавливаются остальные включения $y^i \in E_{x,\omega}^i$, $i = 4 \div 6$, чем и завершается доказательство пункта а/. Лемма доказана.

Пусть искомое решение принадлежит подпространству

$$u \in E_{x,\omega_x} \cap E_{y,\omega_y} \cap E_{z,\omega_z}. \quad /1.4/$$

Для уменьшения размерности системы /2.1/ из работы /1/ разобьем грани 1,3,5 на четыре одинаковые части $\Gamma_{1/4}^i$ /рис.1/, так что $\bigcup_{i=1}^4 \Gamma_{1/4}^i = \Gamma^i$, $i = 1, 3, 5$, и введем обозначения для подпространств функций, определенных на $\Gamma_{1/4}^i$: $e^1, e^3, e^5, e^{135} = e^1 \oplus e^3 \oplus e^5$.



Тогда в силу представления

$$E_{x,\omega_x} \cap E_{y,\omega_y} \cap E_{z,\omega_z} = e^{135} \oplus \omega_x e^{135} \oplus \omega_y e^{135} \oplus \omega_z e^{135} \oplus \omega_x \omega_y e^{135} \oplus \omega_x \omega_z e^{135} \oplus \omega_y \omega_z e^{135} \oplus \omega_x \omega_y \omega_z e^{135}$$

можно определить матрицы K_h^α, L_h^α , где индекс $\alpha = 1 \div 8$ определяет номер тройки параметров $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ такие, что решение системы /1.2/1/ на классе функций /1.4/ будет эквивалентно задаче

$$(E + K_h^\alpha)u^\alpha = L_h^\alpha v^\alpha \equiv \Psi^\alpha; u^\alpha, v^\alpha \in e^{135} \quad /1.5/$$

Замечание 1. Произвольную функцию u на Γ_h можно разложить в сумму симметричных и антисимметричных

$$u = \sum_{\beta} u_{\beta}, \beta \equiv (\omega_x, \omega_y, \omega_z), u_{\beta} \in E_{x,\omega_x} \cap E_{y,\omega_y} \cap E_{z,\omega_z},$$

поэтому общее решение задачи /1.2/1/ можно получить, решив восемь задач /1.5/ размерности $N_{\Gamma}/8$.

§2. АЛГОРИТМ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ K_h^α И L_h^α НА ВЕКТОР

Матрицы K_h^α и L_h^α имеют сходную структуру, причем в них нельзя выделить теплицевы блоки, что лежало в основе экономичного

алгоритма умножения K_h и L_h на вектор. Поэтому непосредственное решение редуцированной системы /1.5/ размерности $N_{\Gamma}/8$ ведет к значительному снижению эффективности алгоритма.

В программе BIESM3 используется система уравнений размерности $N_{\Gamma}/4$, алгебраически эквивалентная /1.5/, но с блочно-теплицевой структурой:

$$(E + \bar{K}_h)u = \bar{L}_h v \equiv \Psi, \quad /2.1/$$

$$u, v \in e^1 \oplus \omega_i e^1 \oplus e^3 \oplus \omega_j e^3 \oplus e^5 \oplus \omega_k e^5 \equiv e'_{135},$$

где величины $\omega_i, \omega_j, \omega_k$ определяются способом умножения блоков матриц на соответствующий вектор, и будут определены далее. При формировании матриц K_h и L_h учитываются пространственные симметрии лишь относительно одной плоскости $/y = 0$ на первой и пятой грани и $z = 0$ на третьей грани/. На рис.2 заштрихованы части граней, являющихся областью определения операторов K_h и L_h . Рассмотрим более подробно матрицу K_h , хотя все сказанное непосредственно относится и к матрице L_h . Согласно области определения /2.1/, матрица \bar{K}_h имеет блочную структуру

$$\bar{K}_h = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ K_4 & K_5 & K_6 \\ K_7 & K_8 & K_9 \end{bmatrix}. \quad /2.2/$$

Блоки K_1, K_5, K_6, K_8, K_9 определяются формулами

$$k_i^{(m-1)q_i + \ell, (n-1)q_i + k} = \gamma_{n, |k-\ell|+1}^m,$$

где при $i = 1, q_i = p; m, n = 1 \div p/2; k, \ell = 1 \div p$, а при $i = 5, 6, 8, 9, q_i = q, m, n = 1 \div p/2; k, \ell = 1 \div q$. При $i = 1 \gamma_{nk}^m \equiv (a_r)_nk^m$, где массив a_r задается соотношениями

$$(a_r)_{k\ell}^j = \omega_x A_{|k-j|+1, \ell} + \omega_y \omega_x A_{|p-j|+1-k|+1, \ell} \quad /2.3/$$

$$j, k = 1 \div p/2, \ell = 1 \div p.$$

В свою очередь массив $A_{k\ell}$ определяется в /2.2/ работы /1/. При $i = 5, 9$ имеем $\gamma_{nk}^m \equiv (A_r^i)_{nk}^m$, где A_r^i выражается формулами

$$(A_r^i)_{k\ell}^j = \omega_i^1 \bar{A}_{|k-j|+1, \ell} + \omega_i^2 \omega_i^1 \bar{A}_{|p-j|+1-k|+1, \ell} \quad /2.4/$$

$$j, k = 1 \div p/2, \ell = 1 \div q;$$

$$\omega_i^1 = \begin{cases} \omega_y, & i = 5 \\ \omega_z, & i = 9 \end{cases} \quad \omega_i^2 = \begin{cases} \omega_z, & i = 5 \\ \omega_y, & i = 9 \end{cases}.$$

в которых \bar{A}_{kl}^i определяется из соотношения /2.3/ /1/. При $i = 6, 8$ полагаем $\gamma_{nk}^m = (B_r^i)_{nk}^m$, где

$$(B_r^i)_{kl}^j = B_{kl}^j + \omega_i^1 B_{kl}^{p-j+1} + \omega_i^2 (B_{p-k+1, \ell}^j + \omega_i^1 B_{p-k+1, \ell}^{p-j+1}),$$

$$j, k = 1 \div p/2, \quad \ell = 1 \div q;$$

$$\omega_i^1 = \begin{cases} \omega_z, & i = 6 \\ \omega_y, & i = 8 \end{cases} \quad \omega_i^2 = \begin{cases} \omega_y, & i = 6 \\ \omega_z, & i = 8 \end{cases}, \quad /2.5/$$

а B_{kl}^j определяются из /2.4/ /1/. Элементы блоков K_2 и K_3 находим из следующих соотношений:

$$k_i^{(m-1)p+\ell, (n-1)\frac{q}{2}+k} = (b_r^i)_{k, |\ell-n|+1}^m$$

$$m = 1 \div p/2, \quad k = 1 \div q/2, \quad \ell, n = 1 \div p;$$

$$(b_r^i)_{kl}^j = b_{kl}^j + \omega_i^1 b_{kl}^{p-j+1} + \omega_x (b_{q-k+1, \ell}^j + \omega_i^1 b_{q-k+1, \ell}^{p-j+1}),$$

/2.6/

$$j = 1 \div p/2, \quad k = 1 \div q/2, \quad \ell = 1 \div p,$$

$$\omega_i^1 = \begin{cases} \omega_y, & i = 2 \\ \omega_z, & i = 3 \end{cases}.$$

Массив b_{kl}^j определен в /2.5/ работы /1/. Элементы блоков K_4 и K_7 задаются формулами

$$k_i^{(\ell-1)\frac{q}{2}+m, (n-1)p+k} = (\beta_r^i)_{n, |\ell-k|+1}^m$$

$$m = 1 \div q/2, \quad n = 1 \div p/2, \quad \ell, k = 1 \div p;$$

$$(\beta_r^i)_{kl}^j = \beta_{kl}^j + \omega_x \beta_{kl}^{q-j+1} + \omega_i^2 (\beta_{p-k+1, \ell}^j + \omega_x \beta_{p-k+1, \ell}^{q-j+1}),$$

$$j = 1 \div q/2, \quad k = 1 \div p/2, \quad \ell = 1 \div p;$$

$$\omega_i^2 = \begin{cases} \omega_y, & i = 4 \\ \omega_z, & i = 7 \end{cases}, \quad /2.7/$$

где элементы β_{kl}^j определены в /2.6/ /1/.

Сохраняя обозначения из /1/, формулы для умножения матрицы \bar{K}_h на вектор можно записать следующим образом: блоки K_i , $i = 1, 5, 9, 6, 8$ умножаются на вектор по формулам

$$\vec{y}_j^r = \sum_{k=1}^{p/2} [\gamma_{kl}^j] \vec{u}_k^s, \quad j = 1 \div p/2;$$

$$i = 1, \quad r = s = 1, \quad y^r, u^s \in e^1 \oplus \omega_z e^1;$$

$$\left. \begin{aligned} i = 5, \quad r = s = 3 \\ i = 9, \quad r = s = 5 \end{aligned} \right\} y^r, u^s \in e^r \oplus \omega_x e^r;$$

$$\left. \begin{aligned} i = 6, \quad r = 3, \quad s = 5 \\ i = 8, \quad r = 5, \quad s = 3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} u^s \in e^s \oplus \omega_x e^s; \\ y^r \in e^r \oplus \omega_x e^r; \end{aligned}$$

при $i = 2, 3$ - по формулам

$$\kappa_i = \sum_{k=1}^{p/2} [(b_r^i)_{kl}^j] u_k^s, \quad j = 1 \div p/2;$$

$$i = 2, \quad \kappa_i \equiv \vec{y}_1^1, \quad s = 3, \quad u^s \in e^s \oplus \omega_z e^s, \quad y^1 \in e^1 \oplus \omega_y e^1;$$

$$i = 3, \quad \kappa_i \equiv y_1^1, \quad s = 5, \quad u^s \in e^s \oplus \omega_y e^s, \quad y^1 \in e^1 \oplus \omega_z e^1.$$

При $i = 4, 7$ умножение выполняется согласно выражениям

$$\vec{y}_j^r = \sum_{k=1}^{p/2} [(\beta_r^i)_{kl}^j] \kappa_k, \quad i = 1 \div q/2;$$

$$i = 4, \quad \kappa_i \equiv u_k^1, \quad r = 3, \quad u^1 \in e^1 \oplus \omega_z e^1, \quad y^r \in e^r \oplus \omega_y e^r,$$

$$i = 7, \quad \kappa_i \equiv u_k^1, \quad r = 5, \quad u^1 \in e^1 \oplus \omega_y e^1, \quad y^r \in e^r \oplus \omega_z e^r,$$

Приведенные здесь выражения для элементов матрицы \bar{K}_h , а также формула умножения блоков этой матрицы на вектор могут быть непосредственно использованы при программировании алгоритма. Это замечание относится и к работе [1], где рассмотрена матрица K_h .

§3. ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ /2.2/

Для решения линейной системы /2.1/ используем итерационный процесс на последовательности сгущающихся сеток, аналогично общему случаю [3, 1]. Решение задачи при фиксированных p и q осуществляем блочным методом Зейделя на основе представления /2.2/:

$$B(U^{n+1} - U^n) = -(AU^n - f), U^n \in e'_{135}$$

$$B = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ K_4 & K_5 & 0 \\ K_7 & K_8 & K_9 \end{bmatrix} \quad A = E + \bar{K}_h, f = \Psi. \quad /3.1/$$

Обозначим через k_{kl}^{ij} элементы матрицы $\bar{K}_h = \{k_{ij}\}$, так что $K_{ij} = \{k_{kl}^{ij}\}$, $k = 1 \div K_i$; $l = 1 \div L_j$; $i, j = 1 \div 3$. При анализе сходимости процесса /3.1/ используется

Лемма 2. Матрица $E + \bar{K}_h$ является матрицей со строгим диагональным преобладанием.

Доказательство основано на свойствах матрицы $K_h \geq 0$ и $K_h u_1 = u_1$, $u_1 = (1, \dots, 1)^T$. Рассмотрим произвольную /например, первую/ строку матрицы K_h . Для нее справедливо соотношение

$$\sum_{i,l} k_{kl}^{ji} = \sum_{i=1}^{p^2} a_i + \sum_{i=1}^{pq} (b_i + c_i + d_i + e_i) = 1.$$

где через a_i , b_i , c_i , d_i , $e_i > 0$ обозначены элементы блоков в соответствии с /2.1/. Для одноименной строки матрицы $E + \bar{K}_h$ элементы которой выражаются через элементы матрицы K_h по формулам /2.3/-/2.7/, оценим сумму модулей недиагональных элементов:

$$\sum_{i=2}^{p^2/2-1} |\omega_x a_i + \omega_y \omega_x a_{pp-i+1}| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{pq/2} |b_i + \omega_y c_i + \omega_x (d_{pq-i+1} + \omega_y c_{pq-i+1})| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{pq/2} |d_i + \omega_z e_i + \omega_x (d_{pq-i+1} + \omega_z e_{pq-i+1})| \leq$$

$$\leq \sum_{i=2}^{p^2-1} a_i + \sum_{i=1}^{pq} (b_i + c_i + d_i + e_i) = 1 - a_1 - a_{pp}.$$

Здесь знак равенства имеет место только в случае, когда в суммах под знаком модулей стоят только положительные элементы. В свою очередь диагональный элемент определяется величиной $1 + \omega_x a_1 + \omega_x \omega_y a_{pp}$, что и доказывает лемму.

Отметим, что из леммы 2 непосредственно вытекает сходимость итерационного процесса /3.1/ /см., например, [2]/. Скорость сходимости оценивается аналогично случаю поточечного метода Зейделя [3]. Приведем точную формулировку.

Лемма 3. Для процесса /3.1/ при $f = 0$ справедлива оценка

$$\|U^{n+1}\| < r \|U^n\|, \|U\| = \max_{i \leq 3} \max_{k \leq K_i} |u_i^k|, U = (u_1, \dots, u_3),$$

где $r = \max_{i,k} r_{ik}$,

$$r_{ik} = |k_{kk}^{ii}|^{-1} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^{L_j} |k_{kl}^{ij}| < 1$$

$$l \neq k \text{ при } i = j.$$

В задачах магнитостатики наиболее распространенными являются два случая: $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 1$ /случай квадруполь/ и $\omega_x = -1$, $\omega_y = \omega_z = 1$ /случай диполь/.

Следствие. В случае $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 1$ скорость сходимости итерационного процесса /3.1/ оценивается величиной

$$r^+ = \frac{1 - a_1 - a_{pp}}{1 + a_1 + a_{pp}}, \quad /3.2/$$

а в случае $\omega_x = -1$, $\omega_y = \omega_z = 1$ величиной

$$r^- = \frac{1 - a_1 - a_{pp} - \epsilon}{1 + \omega_x a_1 + \omega_y \omega_x a_{pp}}, \quad /3.3/$$

где для числа ϵ справедлива оценка $2(a_1 + a_{pp})r^+ \ll \epsilon < 1 - a_1 - a_{pp}$.

Из /3.2/, /3.3/ следует, что для диполя скорость сходимости итераций выше, чем для квадруполь.

§4. РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТОВЫХ РАСЧЕТОВ
ПО ПРОГРАММАМ ВIEGM3 И ВIESM3

Итерационные процессы /3.1/ из /1/ /общий случай/ и /3.1/ решения задачи /1.2/ из /1/ реализованы в виде Фортран-программ ВIEGM3 и ВIESM3 соответственно. Ряд характеристик первой из них приведен в работе /1/. В обоих случаях используется многосеточная организация расчетов, где параметры сеточных областей w_k задаются формулами $p_k = 2^k p_0$, $q_k = 2^k q_0$, $k = 0, 1, \dots, M$ и используется кусочно-постоянная интерполяция решений, полученных на сетке w_k при построении начального приближения на сетке w_{k+1} .

Приведем результаты расчетов с двойной точностью на ЭВМ ЕС-1061. Использовалась кубическая область /с ребром $a = 9.0$ /, для которой, как отмечалось, сходимость итераций самая медленная в рассмотренном классе параллелепипедов. Результаты для общего случая соответствуют последовательности из 5 сеток с $p_0 = 1, q_0 = 4$ и $p_4 = 16, q_4 = 64$ при абсолютной точности расчетов $\epsilon = 10^{-4}$. В симметричном случае использовались три сетки с $p_0 = 4, q_0 = 16, p_2 = 16, q_2 = 64$, а выход из итераций производился при относительной точности $\epsilon = 10^{-4}$.

В качестве тестовой использовалась гармоническая функция

$$u_1(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{-1/2} \quad /4.1/$$

для общего случая и для симметрий типа $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 1$. При наличии одной плоскости антисимметрии выбиралась функция

$$u_2(x, y, z) = u_1(x, y, z, x_0, 0, 0) - u_1(x, y, z, -x_0, 0, 0). \quad /4.2/$$

$x_0 > 0$

В табл.1 представлены время счета /в секундах/ и число итераций на всех основных этапах работы тестируемых программ при решении внешней задачи Неймана для функции /4.1/.

Теоретические оценки числа операций, необходимых для умножения матриц K_h и L_h на вектор, а также для реализации одного итерационного процесса в общем случае, даны в §4 работы /1/. Аналогичные оценки для трех плоскостей симметрии приведены в табл.2 с точностью до величин порядка $O(p^2 + q^2)$. Из этой таблицы видно, что трудоемкость умножения матриц K_h и L_h на вектор при учете трех плоскостей симметрии примерно в 10 раз меньше, чем в общем случае. Некоторое отличие данных из табл.1 /для реальных расчетов/ от теоретических оценок при уменьшении числа глобальных итераций на заданной сетке объясняется особенностями программной реализации алгоритма ВIESM3.

При многократном решении систем /1.2/ /1/ и /2.1/ с различными правыми частями на сетке $16 \times 16 \times 64$ время решения единичной задачи составляет около 6 мин в симметричном случае и около 27 мин в общем случае с относительной точностью $\epsilon = 10^{-8}$. Учи-

Таблица 1

	Формирование матрицы K_h	Формирование матрицы L_h	Вычисление правой части $\psi = \psi_x^* \psi_y^* \psi_z^*$	Число итераций N	Решение системы T	Время на одну итерацию T/N	Погрешность решения
4x4x16	1,659	1,203	0,329	8	6,143	0,768	$0,135 \cdot 10^{-2}$
	1,646	1,160	4,283	4	28,972	7,263	$0,136 \cdot 10^{-2}$
8x8x32	12,649	8,593	2,486	5	33,433	6,686	$0,63 \cdot 10^{-3}$
	12,613	8,633	32,626	3	160,146	53,360	$0,65 \cdot 10^{-3}$
16x16x64	99,452	65,563	20,396	4	331,043	82,76	$0,27 \cdot 10^{-3}$
	112,740	65,220	290,133	3	1312,456	437,48	$0,27 \cdot 10^{-3}$

G - общий случай, S - случай трех плоскостей симметрии.

Таблица 2

Умножение мат- риц K_h, L_h на вектор	Общий случай	Симметричный случай
	$2p^3 \ln p + 12p^2 q \ln q +$ $+ 16p^2 q \ln p$	$\frac{1}{4} p^3 \ln p + p^2 q \ln p +$ $+ p^2 q \ln q$
Итерационный процесс	$[16p^2 q \ln p + 8p^2 q \ln q +$ $+ n_{CG}(2p^3 \ln p + 4p^2 q \ln q)] n_c$	$\frac{1}{4} p^3 \ln p + \frac{1}{2} p^2 q \ln p +$ $+ \frac{3}{4} p^2 q \ln q + n_c [p^2 q \ln p +$ $+ \frac{p^2}{2} q \ln q + n_{CG}(\frac{p^3}{4} \ln p +$ $+ \frac{p^2}{2} q \ln q)]$

тывая, что трудоемкость одной итерации при переходе от сетки w_k к w_{k+1} возрастает приблизительно в 8 раз, можно сделать вывод о том, что счетное время на сетке $32 \times 32 \times 128$ при учете симметрий составит около 48 мин.

Зависимость скорости сходимости итераций от величины $\eta = b/a$ в случае $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 1$ аналогична соответствующей зависимости в общем случае /см. §3 /: для куба самая медленная скорость сходимости $r_{UG}^s = 0,25$; $r_{UG}^s = 0,1$, а при увеличении или уменьшении величины η в обе стороны от $\eta = 1$ она возрастает. При наличии антисимметрии, например, $\omega_x = -1$, скорость сходимости также повышается ($r_{UG}^s < 0,2$).

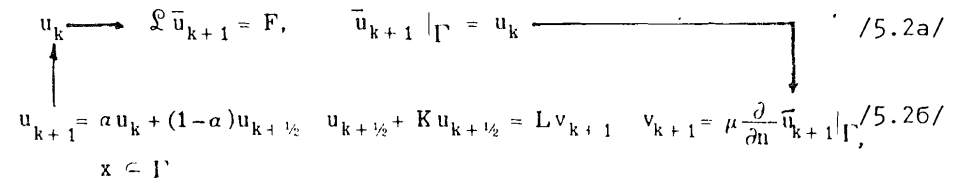
О справедливости разложения погрешности $u_h = u^* + c_1(p)h + O(h^2)$ для проведенных расчетов свидетельствуют данные табл.1. При этом точность экстраполированных по формуле $u_R = 2 \cdot u_k - u_{k-1}$ решений на сетках $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ превосходит точность решения u_{k+1} , $k = 2, 3, 4$, что означает, по крайней мере, восьмикратное уменьшение вычислительной работы /при достижении одинаковой точности/ в результате использования экстраполяции по Ричардсону

§5. ПРИЛОЖЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ВЕСМЗ И ВЕСМЗ
В ЗАДАЧАХ МАГНИТОСТАТИКИ

Как отмечалось в /1.4/, экономичные алгоритмы решения ГИУ могут быть использованы для ограничения области исследования при расчете пространственных задач магнитостатики на основе скалярного потенциала /одного или нескольких/. Для этого используется параллелепипед $\Pi_{(a,b)}$ минимальных размеров, содержащий область ферромагнетика, внутри которого ставится краевая задача для квазилинейного эллиптического уравнения с краевым условием интегрального типа на границе $\Gamma = \delta \Pi$

$$\mathcal{L}u = F, x \in \Pi; u + Ku + L \frac{\partial u}{\partial n} = 0, x \in \Gamma', \quad /5.1/$$

где интегральные операторы K и L определены в §1 /1/, а вся информация о геометрии ферромагнетика и токовых областях содержится в первом из уравнений /5.1/. Итерационный алгоритм решения системы /5.1/ реализуется по схеме



где μ - значение магнитной проницаемости среды на границе Γ' , а α - параметр релаксации.

Приведем характеристики комплекса программ IDSM3, реализующего итерационный процесс /5.2/ на последовательности сгущающихся сеток, в котором для решения проблемы /5.26/ используется программа ВЕСМЗ в зависимости от заданных симметрий. В рамках комплекса программ IDSM3 описание конфигураций различных магнитостатических или электростатических систем сводится лишь к изменению функционального наполнения блока /5.2а/, предназначенного для решения задачи Дирихле для уравнения $\mathcal{L}u = F$ внутри области Π , без изменения внешнего итерационного процесса.

Модельные расчеты по программе IDSM3 проводились для системы уравнений

$$-\Delta u_1 = \rho(m), \quad m \in \Pi_{(a,b)}$$

$$-\text{div } \mu \text{grad } u_2 = 0, \quad m \in R^3 / \Pi, \quad \mu = \text{const}, \quad /5.3/$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = \mu \frac{\partial u_2}{\partial n}, \quad m \in \Gamma', \quad u_2(\infty) = 0,$$

$$\rho(m) = \begin{cases} C(m), & m \in \Pi_1 = \{m: |x|, |y|, \leq a_1; z \leq b_1\} \\ 0, & m \in \mathbb{R}^3/\Pi_1, a_1 < a, b_1 < b. \end{cases}$$

С учетом симметрий типа $\omega_x = -1, \omega_y = \omega_z = 1$. В табл.3 приведены результаты по сходимости итераций /5.2/ при $a = 0,5; b = 1,5; a_1 = 0,5 a, b_1 = 0,5 b$,

$$C(m) = \begin{cases} 100, & x > 0 \\ -100, & x < 0 \end{cases}$$

на последовательности сеток $w_k, k = 1, 2, \dots, K_{\max}$ с параметрами $p_k = p_1 \cdot 2^{k+1}, q_k = q_1 \cdot 2^{k+1}, p_1 = 1, q_1 = 1$. Параметр релаксации, согласно /5/, равен $\alpha = (1 + \mu)^{-1}$. Используется следующий критерий выхода из внешних итераций в /5.2/ на сетке w_k .

$$\|U^{n+1} - U^n\|_{L_2(\Gamma)} \leq \epsilon^k \|U_1^{n+1}\|_{L_2(\Pi)},$$

где K - номер сетки, причем $\epsilon^{K_{\max}} = \epsilon_{FIN}$. Проведено сравнение с точным решением задачи /5.3/ при $\mu = 1$.

$$U^*(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Pi_1} \frac{C(p)}{|M-p|} dp; \int_{\Pi_1} C(p) dp = 0,$$

вычисленным на границе Γ простым интегрированием при $a = b = 1$.

В табл.3 также приведены величины $\Delta^{(k)} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \delta_i^k$, определяемые на сетке w_k , где

$$\delta_i^k = |U^*(M_i) - U_{h_k}(M_i)|, M_i \in \Gamma,$$

$$M_1 = (0,5; 0,25; 0,25), M_2 = (0,25; 0,5; 0,25),$$

$$M_3 = (0,25; 0,25; 0,5),$$

а также погрешности $\Delta_R^{(k-1,k)}$, вычисленные по той же формуле для экстраполированных по Ричардсону решений $U_R = 2U_k - U_{k-1}$. Отметим, что при $\mu = 1$ скорость сходимости альтернирующего процесса /5.2/ определяется величиной γ^n , где $\gamma = 0,5$, а в целом хорошо описывается формулой $\gamma(\mu) = (1 + \mu)^{-1}$ /5/.

Для аппроксимации дифференциального оператора внутри области Π используем семиточечную разностную схему порядка $O(h^2)$, где $h = \max(h_1, h_2)$, а сеточную задачу решаем методом SOR с оптимальным выбором итерационного параметра. При этом точность ре-

Таблица 3

	$a = 1, b = 3, \epsilon_{FIN} = 10^{-3}$		$a = b = 1; \mu = 1, \epsilon_{FIN} = 10^{-8}$			
$w_k; k = 1 \div 4$	$\mu = 100$	$\mu = 10$	$\mu = 1$	ITG	$\Delta^{(k)}$	$\Delta_R^{(k-1,k)}$
4x4x4	1	2	5	4	0,0331	-
8x8x8	1	2	5	4	0,0399	-
16x16x16	1	2	6	4	0,0195	0,001
32x32x32	1	3	-	4	0,0089	0,0017
Γ	740	1256	377	1921	-	-

шения всей проблемы на последней сетке также может быть доведена до $O(h^2)$, если использовать экстраполяцию Ричардсона /см. табл.3/. Хотя асимптотическое число операций для метода SOR на одной сетке составляет $O(h^{-4} \ln h^{-1})$, а для ГИУ, согласно табл.2, только $O(h^{-3} \ln h^{-1})$, однако на рассмотренных достаточно "грубых" сетках время решения ГИУ в несколько раз превосходит соответствующее время для сеточной задачи. При решении квазилинейных уравнений, по-видимому, эти времена станут близкими.

Для сложных конфигураций ферромагнетика дифференциальная задача в области Π может быть решена и методом МКЭ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные аналитические оценки и численные эксперименты свидетельствуют о том, что комплекс программ VIEGM3, VIESM3, IDSM3, предназначенный для точного учета краевых условий на бесконечности при решении пространственных задач магнитостатики на основе скалярного потенциала /одного или нескольких/, является весьма универсальным и экономичным. Алгоритм, на наш взгляд, достаточно удачно сочетает достоинства метода МКР /или МКЭ/ с методом ГИУ, т.к., с одной стороны, задача в дифференциальной постановке рассматривается лишь в минимальной пространственной области Π , содержащей среду с ферромагнетиком, а с другой, - ГИУ для используемых вспомогательных поверхностей допускает эффективное численное решение, с асимптотически даже меньшими затратами, чем для сеточной задачи внутри параллелепипеда.

Высокая скорость сходимости итерационных процедур связана со свойством неотрицательности и строгого диагонального преобладания матриц возникающих линейных систем, позволяющими при-

менять достаточно простые и экономичные алгоритмы в сочетании с их реализацией на последовательности сеток. Эффективная реализация одного шага внутренней итерации основана на использовании блочно-теплицевой структуры матриц и быстрого алгоритма умножения Т-матрицы на вектор. Оптимизация ресурсов памяти ЭВМ, необходимых для хранения информации о матрицах K_h и L_h , основана на использовании как симметрий границы Γ , так и параллельных структур.

К этому следует добавить и хорошие возможности для распараллеливания алгоритмов решения ГИУ данного типа на многопроцессорных вычислительных системах /1/.

Отметим, что при использовании МКР для решения проблемы /5.2а/, созданный комплекс программ наиболее удобен в случае систем со ступенчатой конфигурацией магнитов. Кроме того, он предназначен и для решения внешних краевых задач для гармонических функций в области сложной формы.

Авторы выражают благодарность И.П.Юдину за полезное обсуждение вопросов, связанных с приложениями разработанных алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жидков Е.П. и др. ОИЯИ, P11-86-230, Дубна, 1986.
2. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. "Наука", М., 1984, 318 с.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. "Наука", М., 1978.
4. Егоров А.В., Жидков Е.П. и др. ОИЯИ, P11-85-37, Дубна, 1985.
5. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, P11-83-261, Дубна, 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 мая 1986 года.

Жидков Е.П. и др. P11-86-333
Экономичный численный метод учета краевого условия на бесконечности при решении пространственных задач магнитостатики на основе скалярного потенциала. Учет пространственных симметрий. Модельные расчеты

Построен экономичный алгоритм учета пространственных симметрий при решении граничного интегрального уравнения для гармонической функции, определенного на границе параллелепипеда. На основе этого алгоритма и метода деления области создан комплекс программ, предназначенный для точного учета краевого условия на бесконечности в пространственных задачах магнитостатики. Реализован итерационный процесс на последовательности сгущающихся сеток. Приводятся результаты расчетов, дающие представление об основных вычислительных характеристиках созданных программ, на примере решения модельных задач. Рассмотрена сеточная область размерности $32 \times 32 \times 32$.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод авторов

Zhidkov E.P. et al. P11-86-333
The Economical numerical method for accounting Infinity Boundary Condition in Spatial Problems of Magnitostatics solved Using Scalar Potential. The Account of Spatial Symmetries. Model Calculations

The economical algorithm for accounting spatial symmetries of the integral equation solution defined on the parallelepiped's boundary has been built. Using this algorithm and the region division method the set of programmes for the precise account of the infinity boundary condition in spatial problems of magnitostatics has been designed. The iteration process on the sequence of degenerating grids has been used. The shown results of numerical calculations on the grid $32 \times 32 \times 32$ for model problems give the idea about main characteristics of the written programmes.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986