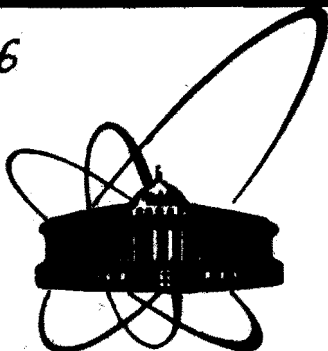


86-230

Ж 696



СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P11-86-230

Е.П.Жидков, Г.Е.Мазуркевич, Б.Н.Хоромский

ЭКОНОМИЧНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД  
УЧЕТА КРАЕВОГО УСЛОВИЯ  
НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ  
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ  
МАГНИТОСТАТИКИ НА ОСНОВЕ  
СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦИАЛА.

Общий случай

1986

Численный анализ полей нелинейных магнитных систем сводится к решению уравнения Максвелла при заданных условиях на бесконечности. В работах <sup>1,2/</sup> и далее в <sup>3,4/</sup> показано, что одним из экономичных подходов к решению этой проблемы при использовании скалярного  $\lambda$  в случае  $x$ -,  $y$ - или  $z$ -геометрий - векторного/ потенциала <sup>5/</sup> является сведение ее к краевой задаче для одной скалярной функции внутри некоторого параллелепипеда  $\Pi$  /либо цилиндра или шара/, содержащего область ферромагнетика, со специальным граничным условием интегрального типа на поверхности  $\Gamma$  этого параллелепипеда. Такое условие точно учитывает поведение решения на бесконечности и, по существу, реализует вариант метода разделения области, когда одна из подобластей неограничена. Вопросы разделения конечной области отражены в <sup>6/</sup> и цитируемой там литературе.

Итерационный метод решения поставленной краевой задачи сводится на каждом шаге к решению: а/ задачи Дирихле внутри параллелепипеда для квазилинейного эллиптического уравнения дивергентного типа, б/ граничного интегрального уравнения /ГИУ/ вида

$$u + Ku = \Psi(s), \quad s \in \Gamma, \quad /1/$$

на поверхности  $\Gamma$ , где  $Ku$  - потенциал двойного слоя на этой поверхности с плотностью  $u(s)$ ,  $s \in \Gamma$ .

Эффективная реализация такого процесса предполагает, естественно, что алгоритм решения проблемы "б" по числу арифметических действий и затратам памяти ЭВМ не превосходит по порядку необходимые ресурсы для решения проблемы "а". Суть этого требования состоит в том, что при решении пространственных краевых задач методами ГИУ порядок возникающей алгебраической системы с плотной матрицей составляет  $O(N^2)$ , требуемая память  $O(N^4)$ , а число операций может изменяться от  $O(N^4 \ln N)$  до  $O(N^6)$  в зависимости от метода решения системы / $N$  - среднее число неизвестных по одной переменной/. В свою очередь для сеточных методов требуемая память составляет  $O(N^3)$ , а число операций изменяется от  $O(N^3 \ln^2 N)$  до  $O(N^4 \ln N)$  <sup>7/</sup>. Именно эти обстоятельства привели авторов <sup>7,8/</sup> к заключению, что решение пространственных интегральных уравнений в общем случае является весьма трудоемкой задачей.

Важным достоинством подхода, развитого в <sup>2-4/</sup> и настоящей работе, является то, что здесь, с одной стороны, предложенный алгоритм решения ГИУ для специальных поверхностей /цилиндра, параллелепипеда/ по требуемой памяти не превосходит, а по быст-

родействию асимптотически даже превышает соответствующие характеристики для сеточных методов, а с другой стороны, использования лишь этих простейших вспомогательных поверхностей достаточно для точного учета краевого условия на бесконечности в рамках дифференциальной постановки задачи, если использовать процесс итераций по подобластям, скорость сходимости которого не зависит от шага дискретизации.

$V^{3,4/}$  был построен и реализован в виде фортран-программы алгоритм решения проблемы "1б" для случая, когда область  $\Pi$  является кубом, с использованием массива порядка  $4n^3$ , дающий возможность решения возникающей алгебраической системы порядка  $n_1$  за  $O(n^3 \ln n) \cdot \ln \epsilon^{-1}$  арифметических действий с точностью  $\epsilon$ , где  $n_1 = 6n^2$ , а  $n$  - число узлов квадратной сетки вдоль ребра куба. Однако во многих практически интересных задачах использование в качестве вспомогательной границы поверхности куба приводит к слишком большим дополнительным затратам вычислительных ресурсов /в тех случаях, когда объем, ограниченный выпуклой оболочкой ферромагнетика, значительно меньше объема куба/. В связи с этим в настоящей работе проведено дальнейшее развитие алгоритма как в плане ускорения сходимости итерационного процесса, так и усложнения геометрии области. Реализован в виде комплекса программ ВЕЕГМЗ и теоретически обоснован итерационный блочный попеременно-треугольный /ПТМ/ метод /или метод расщепления/ на последовательности сеток решения задачи /1/ для случая параллелепипеда  $\Pi = \{p \in R^3 : |x| \leq a, |y| \leq a, |z| \leq b\}$  с квадратным сечением. Установлены некоторые свойства матрицы системы линейных алгебраических уравнений для ГИУ.

В итоге асимптотическая скорость сходимости для глобальных итераций на последовательности сеток не превосходит величины  $\bar{\Gamma} = 0,1$  для указанного класса параллелепипедов и не зависит от шага дискретизации. Экономичная реализация внутренних итераций на основе метода сопряженных градиентов (CG) осуществляется с помощью FFT в силу блочно-теплицевой структуры матрицы, аппроксимирующей оператор  $K$ . Необходимый массив для однократного решения задачи /1/ составляет  $Q_1 = 3p^2q + O(p^2 + q^2)$ , а при многократном решении с различными правыми частями  $Q_2 = 6p^2q + O(p^2 + q^2)$ , где  $p$  - число точек сетки на торцевом ребре при равномерном разбиении, а  $q$  - число точек на боковом ребре. При этом размерность вектора неизвестных и правых частей есть  $N_{\Gamma} = 2p(p + 2q)$  и, следовательно, матричный массив, необходимый для решения задачи без оптимизации, составил бы  $N_{\Gamma}^2 = 4p^2(p + 2q)^2$  при однократном и  $2 \cdot N_{\Gamma}^2$  при многократном решении системы. Число арифметических действий для решения задачи определяется величиной  $O(p^2q \ln q + n_{\epsilon} p^2(p \ln p + q \ln q))$ , где  $n_{\epsilon}^{-1}$  - число глобальных итераций ( $n_{\epsilon} = \ln \epsilon \cdot [\ln \bar{\Gamma}]^{-1}$ ),  $\epsilon$  - требуемая точность. Например, при  $p = 16$ ,  $q = 64$  и размерности вектора неизвестных  $N_{\Gamma} = 2p(p + 2q) = 4608$  для  $\epsilon = 10^{-3}$  время решения системы на ЭВМ ЕС-1061 составляет  $T \approx 15$  мин при исполь-

зовании четырех вспомогательных сеток, и, таким образом, алгоритм может быть практически применен при решении пространственных задач магнитостатики. В разделе 5 настоящей работы отмечены возможности для распараллеливания построенного алгоритма и оценивается коэффициент ускорения при использовании его в расчетах на многопроцессорных вычислительных системах.

Экономичный алгоритм учета симметрий решения будет изложен в следующей работе. Там же будут приведены результаты численных экспериментов по сходимости итерационного процесса разделения области для модельной задачи, когда внутри области  $\Pi$  решается уравнение Пуассона. Дальнейшая разработка алгоритма предполагает развитие функционального наполнения блока решения проблемы "1а" с целью учета геометрии и нелинейных свойств ферромагнетика.

Реализованный алгоритм может быть непосредственно применен для решения внешней задачи Дирихле, если решение искать в виде потенциала двойного слоя:

$$u(\xi) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_s} \frac{1}{r(\xi, s)} \mu(s) ds,$$

так как для плотности потенциала  $\mu(s)$  справедливо уравнение  $(E - K)\mu(s) = \frac{1}{2\pi\gamma(s)} u(s)$ ,  $s \in \Gamma$ ,  $\gamma(s)$  - известная функция.

Алгоритм также применим для решения внешних задач Дирихле и Неймана для области  $\Omega$  с достаточно произвольной границей, если использовать разделение области  $\Omega = \Pi_1 \cup (\Omega \setminus \Pi_1)$ , где  $\Pi_1$  - область, внешняя по отношению к  $\Pi$ , то есть  $\Pi \cap \Pi_1 = R^3$ , а  $\Pi_1 \subset \Omega$ . При этом достаточно решать задачу в области  $\Omega \setminus \Pi_1$  сеточным методом для краевого условия интегрального типа на границе  $\Pi_1$ .

Отметим, что в случае двух пространственных переменных для учета краевого условия на бесконечности могут быть использованы искусственные краевые условия /9/.

## 1. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ГИУ, ПОГРЕШНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ

Пусть  $\Omega_e$  - область, внешняя по отношению к  $\Pi$ , так что  $\Pi \cup \Gamma \cup \Omega_e = R^3$  и для решения задачи Неймана в области  $\Omega_e$  используется ГИУ /1/, где

$$Ku = \int_{\Gamma} K(M, P) u(P) d\sigma_P = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r_{MP}^2} u(P) d\sigma_P,$$

$$\Psi \equiv Lv = \int_{\Gamma} L(M, P) v(P) d\sigma_P = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r_{MP}} v(P) d\sigma_P,$$

здесь  $v(P) = \partial/\partial n u(P)|_{\Gamma}$  - производная по внутренней относительно  $\Omega_0$  нормали, а уравнение /1/ определено для всех точек  $M \in \Gamma$ , кроме ребер /либо предполагаем, что  $\Gamma$  - поверхность Ляпунова, геометрически близкая к поверхности параллелепипеда/.

Дискретизацию уравнения /1/ проводим, аналогично /3/, на основе кусочно-постоянной интерполяции и коллокации. Поверхность  $\Gamma$  параллелепипеда  $\Pi$  разобьем на элементарные носители: квадраты на торцевых гранях, прямоугольники на боковых. Введем обозначения:  $\{\Delta S_{kl}^r\}$ ,  $r = 1 \div 6$ ,  $k = 1 \div p$ ,  $\ell = 1 \div q_r$ . Здесь  $r$  определяет номер грани в соответствии с рис.1а, а  $k$  и  $\ell$  - нумерацию на гранях согласно рис.1б.

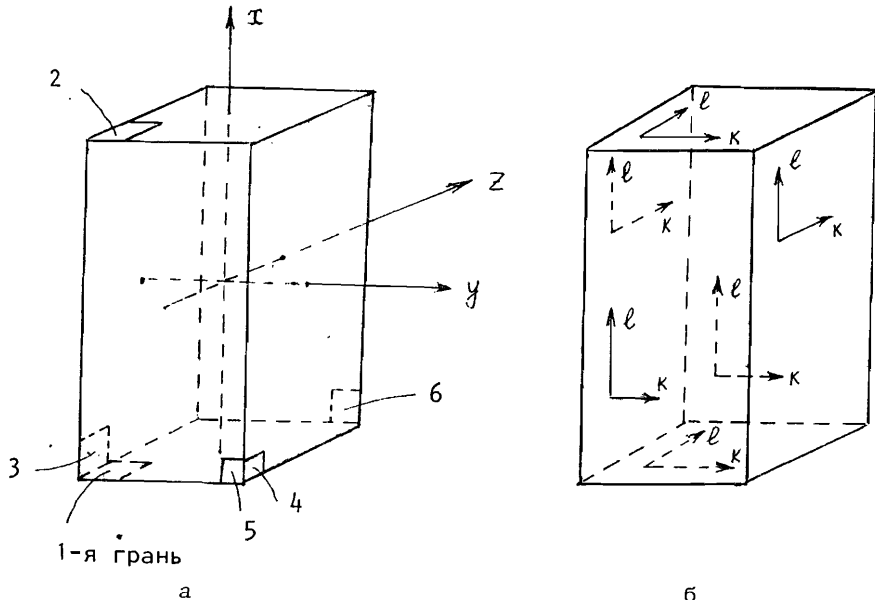


Рис.1

При  $r = 1, 2$   $q_r = p$ , а при  $r = 3 \div 6$   $q_r = q$ . В качестве узлов коллокации /и узлов сетки/ выберем середины прямоугольников  $\{M_{kl}^r\}$ , аналогичная нумерация принята и для базисных функций:

$$\phi_{kl}^r(M) = \begin{cases} 1; & M \in \Delta S_{kl}^r, \\ 0; & M \notin \Delta S_{kl}^r. \end{cases} \quad /1.1/$$

Решение  $u(P)$  ищем в виде  $u = \sum_{r,k,\ell} u_{kl}^r \cdot \phi_{kl}^r$ , в результате чего получаем систему линейных алгебраических уравнений для вектора неизвестных  $U = \{u_{kl}^r\}$ :

$$(E + K_h)U = L_h V \equiv F; \quad V = \{v_{kl}^r\}, \quad v = \sum_{r,k,\ell} v_{kl}^r \cdot \phi_{kl}^r, \quad /1.2/$$

где элементы матриц  $K_h$  и  $L_h$  размерности  $N = 2p(p+2q)$  определяются выражениями

$$k_{rs}^{(k'-1)b'+\ell', (k-1)b+\ell} = \int_{\Delta S_{kl}^s} \phi_{kl}^s \cdot K(M_{k'\ell'}^r; P) d\sigma_P, \quad /1.3/$$

$$\ell_{rs}^{(k'-1)b'+\ell', (k-1)b+\ell} = \int_{\Delta S_{kl}^s} \phi_{kl}^s \cdot L(M_{k'\ell'}^r; P) d\sigma_P$$

при следующих значениях индексов:

$$r = 1, 2; \quad b' = p, \quad k' = 1 \div p, \quad \ell' = 1 \div p,$$

$$r = 3 \div 6; \quad b' = q, \quad k' = 1 \div p, \quad \ell' = 1 \div q,$$

$$s = 1, 2; \quad b = p, \quad k = 1 \div p, \quad \ell = 1 \div p,$$

$$s = 3 \div 6; \quad b = q, \quad k = 1 \div p, \quad \ell = 1 \div q.$$

Оценим погрешность аппроксимации операторов  $E+K$  и  $L$  матрицами из /1.2/. Пусть  $\Gamma = \bigcup_{s=1}^6 \Gamma^s$ , где  $\Gamma^s$  - прямоугольные области в локальных координатах. Определим проектор  $P_N$  с помощью базисных функций /1.1/ и узлов коллокации  $\{M_{kl}^r\}$  и введем обозначения:  $h_1 = h$ ,  $h_2 = kh$ . Имеет место

*Лемма 1.* Пусть  $u(M)$ ,  $v(M) \in C^2(\Gamma^s)$ ,  $s = 1 \div 6$ , тогда справедливы оценки

$$|\delta| = |P_N(E+K)u - (E+K_h)P_N u| \leq c_1 h, \quad /1.4a/$$

$$|P_N L v - L_h P_N v| \leq c_2 h \ln h. \quad /1.4б/$$

Для доказательства представим величину  $\delta$  из /1.4/ в виде

$$\delta = \sum_{s=1}^6 \delta_s = \sum_{s=1}^6 \sum_{k=1}^{q_s} \sum_{\ell=1}^p \int_{\Gamma_{kl}^s} K(M_{ij}^r; P) [u(P) - u(M_{kl}^s)] d\sigma_P,$$

$$r = 1 \div 6, \quad i = 1 \div q_r, \quad j = 1 \div p,$$

и рассмотрим для простоты лишь часть суммы, например для  $s = 3$  и  $r = 1$ :

$$\delta_3 = \sum_{k=1}^q \sum_{\ell=1}^p \int_{\Gamma_{kl}^3} K(M_{ij}^1; P) [u(P) - u(M_{kl}^3)] d\sigma_P.$$

В локальных координатах ядро  $K$  имеет вид

$$K(M_{ij}^1; P) = \frac{(i-1/2)h}{[(i-1/2)^2 h^2 + (\kappa(k - \frac{1}{2})h + s)^2 + (|\ell-j|h + \frac{h}{2} + \xi)^2]^{3/2}},$$

$$\frac{s}{\kappa}, \xi \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}],$$

поэтому с учетом оценки

$$|u(P) - u(M_{kl}^3)| = \frac{\partial u}{\partial x} s + \frac{\partial u}{\partial y} \xi + O(h^2), \quad P \in \Gamma_{kl},$$

$$s \leq \kappa h; \quad \xi \leq h,$$

получаем

$$|\delta_3| \leq h \left( \kappa \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right) \sum_{k, \ell=0}^{p, q} \frac{i-1/2}{[(i-1/2)^2 + \kappa^2 k^2 + (\ell-j)^2]^{3/2}} \leq$$

$$\leq c_0(\kappa) h \sum_{k, \ell=0}^{p, q} \frac{a_i}{(a_i^2 + \kappa^2 k^2 + \ell^2)^{3/2}} = c_0 h \left[ \frac{1}{\kappa} \arctg \frac{pq\kappa}{a_i \sqrt{a_i^2 + p^2 + \kappa^2 q^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4a_i^2} + \frac{1}{2} \frac{q}{(\kappa^2 q^2 + a_i^2)^{1/2}} + \frac{1}{2} \frac{p}{a_i (a_i^2 + p^2)^{1/2}} + O(p^{-2} + q^{-2}) + O(h^2) \right],$$

$$a_i = i - 1/2, \quad i \geq 1,$$

откуда следует первая часть /1.4/. Аналогично получается /1.4б/. Лемма доказана.

Отметим, что на практике для достаточно гладких решений имеют место не только оценки /1.4а/, /1.4б/, но и представления вида  $\delta = c_1(x)h + O(h^2)$ ,  $x = 1$ , где  $c_1(x)$  не зависит от  $h$ , что иллюстрируется в разделе 4.

## 2. СТРУКТУРА МАТРИЦ $K_h$ И $L_h$ И АЛГОРИТМ УМНОЖЕНИЯ ИХ НА ВЕКТОР

Рассмотрим более подробно матрицу  $K_h$ . Как указывалось в /3/, возможность применения экономичных алгоритмов умножения ее на вектор связана со специальной блочной структурой этой матрицы. Существует такое разбиение  $K_h$  на блоки, что либо элементами блока будут симметричные теплицевы матрицы, либо он приводится к такому виду с помощью матрицы перестановок. Согласно нумерации вектора неизвестных  $U = \{u_{kl}^r\}$  и формулам /1.3/ используем блочное представление для  $K_h$ :

	0	$K_{12}$	$K_{13}$	$T_1 K_{13}$	$G_1^T K_{13}$	$T_1' G_1^T K_{13}$	
$K_{12}$	0	$K_{13} T_2$	$T_1 K_{13} T_2$	$G_1^T K_{13} T_2$	$T_1' G_1^T K_{13} T_2$		
$K_{31}$	$T_3' K_{31}$	0	$K_{34}$	$K_{35}$	$TK_{35}$		
$K_h =$	$K_{31} T_3$	$T_3' K_{31} T_3$	$K_{34}$	0	$K_{35} T$	$TK_{35} T$	/2.1/
$K_{31} G_1$	$T_3' K_{31} G_1$	$K_{35}$	$TK_{35}$	0	$K_{34}$		
$K_{31} G_1 T_3$	$T_3' K_{31} G_1 T_3$	$K_{35} T$	$TK_{35} T$	$K_{34}$	0		

где

$$T = E_p' \otimes E_q, \quad T_1 = E_p' \otimes E_p, \quad T_2 = E_q' \otimes E_p,$$

$$T_3 = E_p' \otimes E_p, \quad T_3' = E_p \otimes E_q', \quad T_1' = E_p \otimes E_p',$$

$$E_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cdot & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad E_m' = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix} -$$

$m \times m$  матрицы, а знаком  $\otimes$  обозначено тензорное произведение матриц. Блочная матрица  $G_1$  имеет вид

$$G_1 = \{G_{ij}\}, \quad i = 1 \div p, \quad j = 1 \div p, \quad G_1 G_1^T = E,$$

$$G_{ij} = \{g_{kl}\}, \quad g_{kl} = \begin{cases} 0, & \ell \neq i \text{ или } k \neq j \\ 1, & \ell = i, \quad k = j \end{cases}, \quad k = 1 \div p; \quad \ell = 1 \div p.$$

Для каждой из этих матриц перестановок справедливо соотношение  $A^2 = E$ . Из представления /2.1/ видно, что  $K_h$  полностью определена блоками  $K_{12}$ ,  $K_{13}$ ,  $K_{31}$ ,  $K_{34}$ ,  $K_{35}$ . Рассмотрим их структуру и алгоритм умножения на вектор. Для этого удобно использовать обозначения для векторов

$$\vec{u}_i = \begin{bmatrix} u_{i1} \\ \vdots \\ u_{ip} \end{bmatrix}; \quad \vec{u}_i' = \begin{bmatrix} u_{i1} \\ \vdots \\ u_{iq} \end{bmatrix}; \quad u_{i\downarrow} = \begin{bmatrix} u_{i1} \\ \vdots \\ u_{pi} \end{bmatrix}$$

и  $[A_{ij}]$  - для симметричной теплицевой матрицы, первая строка которой совпадает с  $i$ -й строкой матрицы  $\{A_{ij}\}$ . Произведение матрицы  $[A_{ij}]$  на вектор обозначим символами:  $[A_{ij}] \vec{u}_i$ ,  $[A_{ij}] u_i$ . Теперь элементы матрицы  $K_{12}$  размерности  $p^2 \times p^2$  можно определить по формуле

$$k_{12}^{(k-1)p+i, (\ell-1)p+j} = A_{|k-\ell|+1, |i-j|+1}, \quad k, \ell, i, j = 1 \div p,$$

где

$$A_{k\ell} = \int_{\Delta S_{k\ell}^2} K(M_{11}^1; P) d\sigma_P; \quad k, \ell = 1 \div p.$$

Умножение  $K_{12} u$  выполняется по формуле

$$\vec{y}_k = \sum_{i=1}^p [A_{|k-i|+1, \ell}] \vec{u}_i, \quad k = 1 \div p.$$

Для элементов блока  $K_{34}$  справедливо соотношение

$$k_{34}^{(k-1)q+1, (\ell-1)q+j} = \bar{A}_{|k-\ell|+1, |i-j|+1}, \quad k, \ell = 1 \div p; i, j = 1 \div q,$$

где матрица  $\bar{A}$  определяется выражением

$$\bar{A}_{k\ell} = \int_{\Delta S_{k\ell}^4} K(M_{11}^3; P) d\sigma_P, \quad k, \ell = 1 \div p.$$

Умножение на вектор выполняется по формуле

$$\vec{y}'_k = \sum_{i=1}^p [\bar{A}_{|k-i|+1, \ell}] \vec{u}'_i, \quad k = 1 \div p.$$

Матрица  $K_{35}$  определяется формулой

$$k_{35}^{(m-1)q+i, (k-1)q+j} = B_{k, |i-j|+1}^m, \quad m, k = 1 \div p; i, j = 1 \div q,$$

где

$$B_{k\ell}^i = \int_{\Delta S_{k\ell}^5} K(M_{11}^3; P) d\sigma_P; \quad k, i = 1 \div p, \ell = 1 \div q,$$

а умножение ее на вектор задается соотношением

$$\vec{y}'_k = \sum_{i=1}^p [B_{i,j}^k] \vec{u}'_i, \quad k = 1 \div p.$$

Элементы матрицы  $K_{13}$  имеют вид

$$k_{13}^{(m-1)p+i, (k-1)q+j} = b_{j, |i-k|+1}^m; \quad m, k, i = 1 \div p, j = 1 \div q,$$

$$b_{\ell k}^i = \int_{\Delta S_{k\ell}^3} K(M_{11}^1; P) d\sigma_P; \quad k, i = 1 \div p, \ell = 1 \div q.$$

Используя матрицу перестановок

$$G = \{G_{ij}\}, \quad i = 1 \div p, j = 1 \div q; \quad G \cdot G^T = E,$$

$$G_{ij} = \{g_{k\ell}\}, \quad g_{k\ell} = \begin{cases} 0, & k \neq j \text{ или } \ell \neq i \\ 1, & k = j, \ell = i \end{cases}, \quad k = 1 \div p, \ell = 1 \div q, \quad /2.2/$$

блок  $K_{13}$  можно привести к виду, позволяющему использовать экономичные алгоритмы умножения на вектор:

$$y = K_{13} u \Rightarrow y = K_{13} G G^T u \Rightarrow y = K'_{13} u',$$

где  $u' = G^T u$ ,  $K'_{13} = K_{13} G$ . В результате используем следующую формулу для умножения:

$$\vec{y}'_i = \sum_{\ell=1}^q [b_{\ell k}^i] u_{\ell}, \quad i = 1 \div p.$$

Наконец, приведем расчетные формулы для матрицы  $K_{31}$ :

$$k_{31}^{(i-1)q+m, (k-1)p+j} = \beta_{k, |i-j|+1}^m; \quad i, k, j = 1 \div p, m = 1 \div q,$$

$$\beta_{k\ell}^i = \int_{\Delta S_{k\ell}^1} K(M_{11}^3; P) d\sigma_P; \quad k, \ell = 1 \div p, i = 1 \div q.$$

При помощи матрицы перестановок  $G$  из /2.2/ алгоритм умножения на вектор выполняется по схеме

$$y = K_{31} u \Rightarrow G^T y = G^T K_{31} u \Rightarrow y' = K'_{31} u,$$

которая сводится к формуле

$$y'_{i'} = \sum_{k=1}^p [\beta_{k\ell}^i] u_k, \quad i = 1 \div q.$$

Умножение остальных блоков матрицы  $K_h$  проводится в соответствии со структурой /2.1/.

Блочная структура матрицы  $L_h$ , а также внутренняя структура блоков, за исключением диагональных, аналогична /2.1/. Диагональные блоки  $L_h$  отличны от нуля и имеют структуру типа  $K_{12}$  и  $K_{34}$ .

### 3. ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ /1.2/

Для решения линейной системы /1.2/ построен двухуровневый итерационный процесс на последовательности сеток, основанный на блочном представлении матрицы  $E + K_h$ :

$$E + K_h = \begin{bmatrix} E & a & b_1 & b_2 \\ a & E & & \\ & \beta_1 & E & A & B \\ & & A & E & \\ \beta_2 & & B & A & E \end{bmatrix} = B_h.$$

Решение задачи для фиксированной сетки /то есть при заданных  $p$  и  $q$  / осуществляем итерационным ПТМ-методом /или методом расщепления/ <sup>10-12</sup> для несамосопряженного оператора:

$$(E + \tau K_1)(E + \tau K_2)(u^{n+1} - u^n) = -2\tau(B_h u^n - F), \quad /3.1/$$

где

$$B_h = K_1 + K_2, \quad B_r = (E + \tau K_1)(E + \tau K_2),$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} E & b_1 & b_2 \\ 0 & E & B \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & & \\ & \beta_1 & 0 & A & 0 \\ & & A & 0 & \\ \beta_2 & & B & 0 & A \\ & & & A & 0 \end{bmatrix}, \quad /3.2/$$

Процесс /3.1/ рассматриваем в вещественном пространстве. Теория выбора оптимального параметра  $\tau$  для случая несимметрической матрицы  $B_h$  при условии  $K_1 > 0$ ,  $K_2 \geq 0$  построена в <sup>12</sup>. Однако в нашем случае матрицы  $K_1$  и  $K_2$  не являются знакоопределенными /хотя  $K_1 + K_2 > 0$  /. Далее установим сходимость итераций /3.1/ в некотором интервале изменения  $\tau > 0$ .

*Лемма 2.* Матрица  $K_h$  неразложима.

Доказательство. Прежде всего отметим, что  $K_h$  является неотрицательной матрицей  $K_h \geq 0$ , причем  $K_{ii} = 0$ ,  $i = 1 \div 6$ , а диаго-

нальные блоки  $\{K_{ij}\}$ ,  $i \neq j$ , положительны, где  $K_h = \{K_{ij}\}$ ,  $i, j = 1 \div 6$  согласно представлению /2.1/. Докажем, что ориентированный граф матрицы  $K_h$  сильно связан <sup>13</sup>. В силу отмеченных свойств граф каждой из матриц  $K_{ij}$ ,  $i \neq j$ , сильно связан. Поэтому нетрудно показать, что для сильной связности ориентированного графа всей матрицы  $K_h$  достаточно сильной связности графа матрицы  $\bar{K} = \{\alpha_{ij}\}$ , где числа  $\alpha_{ij}$  определяются соотношением  $\alpha_{ii} = 0$ ,  $\alpha_{ij} = 1$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1 \div 6$ . Граф этой матрицы можно интерпретировать как проекцию графа  $K_h$  на блоки первого уровня этой матрицы. Для матрицы  $\bar{K}$  уже нетрудно проверить, что существует связывающий ориентированный путь длиной не более 2 для любой пары точек  $P_i$  и  $P_j$  ориентированного графа. Лемма доказана.

*Лемма 3.* Существует число  $\Delta > 0$ , такое, что

$$\operatorname{Re} \sigma(E + K_h) \geq \Delta. \quad /3.3/$$

Доказательство. Поскольку матрица  $K_h > 0$  и неразложима, то свойство /3.3/ вытекает из теоремы Перрона - Фробениуса для неотрицательных матриц <sup>14</sup>. Действительно, с одной стороны,  $K_h u_1 = u_1$ , где  $u_1 = (1, \dots, 1)^T$ , и потому  $\rho(K_h) = 1$ , причем  $\lambda = 1$  есть однократное собственное значение. Легко видеть, что матрица  $K_h^2$  является положительной /то есть  $K_{ij} > 0$ ,  $\forall i, j$  / , и потому она также неразложима, то есть  $\lambda = 1$  является однократным собственным числом этой матрицы. Но тогда  $\lambda = -1 \notin \sigma(K_h)$ . В противном случае  $K_h v = -v$ ,  $K_h^2 v = v$  и, значит,  $v = u_1$ , что невозможно. Следовательно, существует  $\Delta > 0$ , такое, что  $\operatorname{Re} \sigma(K_h) > -1 + \Delta$  в силу  $\rho(K_h) = 1$ . Лемма доказана.

*Лемма 4.* А. Процесс /3.1/ осуществим по крайней мере для  $0 < \tau \leq 1$ . Б. Существует  $\tau_0 > 0$ , что для всех  $0 < \tau \leq \tau_0$  итерационный процесс /3.1/ сходится, то есть

$$\sup_{\tau \in (0, \tau_0]} \rho(E - 2\tau B_r^{-1}(E + K_h)) < 1.$$

Для доказательства пункта "А" установим ограниченность операторов  $(E + \tau K_i)^{-1}$ ,  $i = 1, 2$ . Согласно представлению  $E + \tau K_1 = (1 + \tau)E + K_3$ ,  $\rho(K_3) < 1$ ,  $\rho(K_2) < 1$ , что следует из свойств  $\rho(K_2 + K_3) = 1$ ,  $K_2 \geq 0$ ,  $K_3 \geq 0$ ,  $K_h = K_2 + K_3 \geq 0$  и неразложимости матрицы  $K_h$  <sup>13</sup>. Теперь утверждение "А" очевидно.

Сходимость процесса /3.1/ является прямым следствием предыдущей леммы 3 и леммы 3.2 из <sup>11</sup>. Лемма доказана.

В рамках данного численного алгоритма выбор оптимального параметра  $\tau^*$  можно достаточно легко осуществить при помощи численного эксперимента, так как спектральный радиус оператора

перехода практически не зависит от шага дискретизации  $h$  /то есть величин  $p$  и  $q$  / и определяется лишь геометрией области  $\Pi$ , то есть одним параметром  $\eta = b/a$ . Поэтому можно определить зависимость  $r^*(\eta)$  один раз в численном расчете на сетке не слишком большой размерности и использовать эту зависимость во всех дальнейших вычислениях. Установлено, что  $r^*(\eta) \approx 1$  во всем практически интересном диапазоне изменения  $\eta$ , то есть при  $0,1 \leq \eta \leq 10$ . Поэтому во всех дальнейших расчетах полагаем  $r = 1$ .

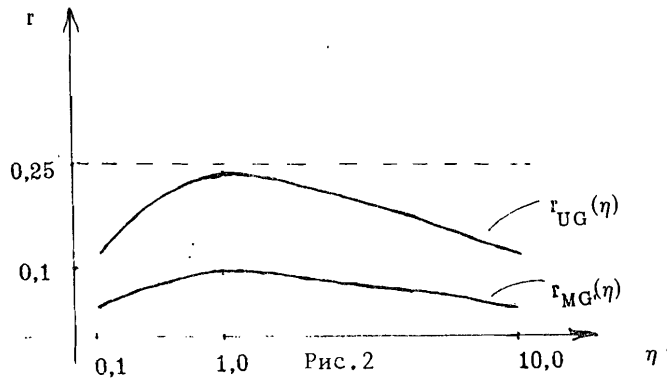
Многосеточный алгоритм строится стандартным образом. На последовательности сеток  $\omega_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, M$ , определяемых параметрами  $p_k = 2^k p_0$ ,  $q_k = 2^k q_0$ , решаются задачи /1.2/ с точностью  $\epsilon_k = O(h_k^2)$ , где в качестве начальных приближений на сетке  $\omega_k$  берется решение  $U_{(k-1)}$ , распространенное на сетку  $\omega_k$  при помощи кусочно-линейной интерполяции. На каждой сетке  $\omega_k$  выполняется  $I_k$  итераций /3.1/, где число  $I_k$  определяется из условия

$$\|U^{I_k} - U^{I_k-1}\|_{L_2(\omega_k)} \leq \epsilon_k (\|U^{I_k}\|)^a, \quad a = 0 \text{ либо } a = 1.$$

Обозначим асимптотическую скорость сходимости процесса /3.1/ через  $r_{UG}(\eta)$ , а многосеточного алгоритма через  $r_{MG}(\eta)$ , где в обоих случаях

$$r = \left( \frac{\|U^n - U^{n-1}\|^{1/n}}{\|U^1 - U^0\|} \right)$$

для достаточно большого числа итераций  $n$ , отнесенных к последней сетке. Графики функций  $r_{UG}(\eta)$  и  $r_{MG}(\eta)$ , выражающие зависимость скорости сходимости односеточного и многосеточного алгоритмов от формы области, представлены на рис.2.



При  $0,1 \leq \eta \leq 10,0$   $r_{UG}(\eta) < 0,25$  и достигает максимума для кубической области, то есть при  $\eta = 1$ . Зависимость  $r_{MG}(\eta)$  аналогична, причем  $r_{UG}(\eta) \cdot r_{MG}(\eta)^{-1} \in [2,5; 3]$ . В результате вре-

мя счета для MG-алгоритма при  $\epsilon = 10^{-3} \div 10^{-4}$  примерно в 2,5 раза меньше по сравнению с расчетами только на самой мелкой сетке.

Численные эксперименты показывают, что при достаточной гладкости решения  $u(P)$ , а это на практике имеет место, справедлива не только оценка погрешности  $\|U - P_N u\|_{L_2} = O(h)$ , но и разложение этой погрешности вида  $U - P_N u = P_N c(x)h + O(h^2)$ , где  $c(x)$  не зависит от  $h$ . Поэтому экстраполяция Ричардсона дает точность приближенных решений порядка  $O(h^2)$ , что является вторым важным достоинством MG-алгоритма. Численный пример дан в разделе 4.

#### 4. ОЦЕНКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ И НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОГРАММЫ VIEGM3

Реализация метода /3.1/ происходит в два этапа:

1.  $(E + \tau K_1)v = -2\tau(B_h u^n - F) \equiv f$ ,  $u^0$  - задано.
2.  $(E + \tau K_2)(u^{n+1} - u^n) = v$ ,  $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ .

Матрица  $E + \tau K_1$  является верхней треугольной, ее обращение выполняется по формулам

$$v_3 = \frac{1}{1 + \tau} f_3,$$

$$v_2 = \frac{1}{1 + \tau} f_2 - \frac{\tau}{1 + \tau} [B] v_3, \quad /4.1/$$

$$v_1 = \frac{1}{1 + \tau} f_1 - \frac{\tau}{1 + \tau} [b_1] v_2 - \frac{\tau}{1 + \tau} [b_1] v_3,$$

где  $f = (f_1, f_2, f_3)^T$ . Оценим число операций, необходимых для умножения  $[B]v_3$ , исходя из структуры матрицы:

$$[B] = \begin{bmatrix} K_{35} & TK_{35} \\ K_{35}^T & TK_{35}^T \end{bmatrix}.$$

Матрица  $K_{35}$  - двухуровневая блочно-теплицева, размерности  $p \times p$ , где теплицевы матрицы второго уровня имеют размерность  $q \times q$ . Пусть используется алгоритм умножения теплицевой матрицы на вектор, требующий  $c_T p \ln q$  операций, где  $c_T$  ( $c_T \approx 10,0$ ) не зависит от размерности  $q$  и полностью определяется используемым алгоритмом FFT. Тогда для умножения на вектор требуется  $c_T p^2 q \ln q$  операций, а на вычисление  $[B]v_3$  - соответственно  $4c_T p^2 q \ln q$  операций. Аналогично для умножения  $[b_1]v_2$  ( $[b_2]v_3$ ) необходимое число операций составляет  $4c_T p^2 q \ln p$ , а для расче-



тов по формуле /4.1/ требуется  $Q_1 = 4c_T p^2 q (\ln q + 2 \ln p) + O(p^2 + q^2)$  арифметических действий.

На втором этапе происходит обращение матрицы  $E + \tau K_2$  согласно формулам

$$\begin{bmatrix} E & \tau A \\ \tau A & E \end{bmatrix} w_1 = v_1,$$

$$\begin{bmatrix} E & \tau A \\ \tau A & E \end{bmatrix} w_2 = -\tau[\beta_1]w_1 + v_2,$$

/4.2/

$$\begin{bmatrix} E & \tau A \\ \tau A & E \end{bmatrix} w_3 = -\tau[\beta_2]w_1 - \tau[B]w_2 + v_3.$$

Для обращения матриц  $\Theta_1 = \begin{bmatrix} E & \tau A \\ \tau A & E \end{bmatrix}$  и  $\Theta_2 = \begin{bmatrix} E & \tau A \\ \tau A & E \end{bmatrix}$  используется

"внутренний" итерационный процесс - метод CG в силу того, что эти матрицы являются симметричными. С учетом структуры блоков  $\alpha$  и  $A$  число операций на одну итерацию в методе CG составит

$$Q_2 = 2c_T p^3 \ln p + O(p^2 + q^2) \quad \text{для } \Theta_1,$$

$$Q_3 = 2c_T p^2 q \ln q + O(p^2 + q^2) \quad \text{для } \Theta_2.$$

Система /4.2/ решается с использованием начального приближения с предыдущей глобальной итерации. Численные расчеты показывают, что для решения системы /4.2/ при  $\epsilon = 10^{-4} - 10^{-5}$  достаточно трех или четырех итераций метода CG.

В итоге число арифметических действий, необходимых для осуществления одного шага итерационного процесса /3.1/, составляет

$$Q = 2c_T p^2 q [4 \ln q + 8 \ln p + p_{CG} (\frac{p}{q} \ln p + 2 \ln q)] + O(p^2 + q^2), \quad /4.3/$$

где  $p_{CG}$  - число итераций в методе CG.

Размерность массива, используемого для хранения матрицы  $B_h$ , составляет  $N_k = 3p^2 q + p^2 + pq$ , а для матрицы  $L_h$  соответственно  $N_L = 3p^2 q + p^2 + 2pq$ . Кроме того, для реализации всего алгоритма требуется несколько рабочих массивов размерности  $N_T = 2p(p + 2q)$ . Следовательно, суммарный размер всех используемых для работы программы VIEGM3 массивов составляет

$$N_{INT} = N_K + N_L + O(N_T). \quad /4.4/$$

Приведем практические характеристики точности метода при расчете гармонической функции:

$$u(x) = \frac{1}{|x - x_0|}, \quad x_0 \in \Pi.$$

Например, при размерах  $\Pi(a \times a \times b)$ , равных  $a = 9,0$ ;  $b = 9,0$  и  $x_0 = 0$ , для 5 расчетных сеток с  $p_0 = 1$ ,  $q_0 = 4$  и  $p_5 = 16$ ,  $q_5 = 64$ ,  $N_5 = 4608$  при  $\epsilon_5 = 10^{-3}$  получаются решения с абсолютной точностью  $\Delta_5 = 3,11 \cdot 10^{-4}$ , а после экстраполяции с  $\Delta_4 = 7,34 \cdot 10^{-4}$  имеем  $\Delta_R = 1,2 \cdot 10^{-4}$  в  $L_2$ -метрике на  $\Gamma$ . Этот результат лучше, чем точность на сетке  $\omega_6$ , где  $p_6 = 32$ ,  $q_6 = 128$ . Время решения системы /1.2/ на сетке размерности  $N_5 = 2 \cdot p_5(p_5 + 2q_5) = 4608$  при относительной точности  $\epsilon = 10^{-3}$  составляет  $T_1 \approx 15$  мин, а при  $\epsilon = 10^{-4}$  -  $T_2 \approx 21$  мин. Число глобальных итераций на сетке  $\omega_5$  равно 2 и 3 соответственно. При  $N_4 = 2p_4(p_4 + 2q_4) = 1152$  неизвестных и  $p_5 = 8$ ,  $q_4 = 32$  время счета  $T \approx 2$  мин для  $\epsilon = 10^{-3}$ .

Отметим для сравнения, что решение системы /1.2/ методом Гаусса с матрицей размерности  $N_5 \times N_5$  даже без использования внешних устройств потребовало бы на ЭВМ ЕС-1061 более 200 часов.

## 5. 0 РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА /3.1/

Создание параллельных вычислительных систем приводит к необходимости анализа методов решения трудоемких задач, и в частности, пространственных, при использовании таких систем.

При реализации итерационного процесса /3.1/ "крупными" операциями являются а/ вычисление правой части  $\Psi = L_h \bar{v}$ ; б/ решение системы /4.1/ с единичными блоками на главной диагонали; в/ решение системы /4.2/ с блочной треугольной матрицей, для обращения диагональных блоков  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$  которой используется метод CG. Прежде всего учтем разбиение матрицы  $K_h$  /или  $L_h$ / на блоки первого уровня  $K_h = \{K_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 6$ , согласно /2.1/. При этом на всех этапах итерационного процесса проводятся алгебраические операции на уровне этих блоков, причем основная часть времени ЭВМ приходится на умножение матриц  $K_{ij}$  и  $L_{ij}$  на вектор и лишь небольшая часть - на операцию вычисления скалярных произведений, распараллеливание которой очевидно.

При умножении блоков  $K_a$  и  $L_a$ ,  $a = (i, j)$ , на вектор можно использовать естественный параллелизм на двух уровнях распараллеливания, так как каждый из этих блоков является двухуровневой матрицей одного из следующих типов  $G_n T_m$  и  $T_n T_m$  либо приводится к такому виду с помощью матрицы перестановок. Для операции умножения  $T$ -матриц второго уровня на вектор возможна конвейеризация вычислений, так как эта операция сводится к выполнению трех FFT-преобразований вектора размерности  $p = 2^k 1$

тов по формуле /4.1/ требуется  $Q_1 = 4c_T p^2 q (\ln q + 2 \ln p) + O(p^2 + q^2)$  арифметических действий.

На втором этапе происходит обращение матрицы  $E + \tau K_2$  согласно формулам

$$\begin{bmatrix} E & \tau A \\ \tau A & E \end{bmatrix} w_1 = v_1,$$

$$\begin{bmatrix} E & \tau A \\ \tau A & E \end{bmatrix} w_2 = -\tau[\beta_1]w_1 + v_2,$$

$$\begin{bmatrix} E & \tau A \\ \tau A & E \end{bmatrix} w_3 = -\tau[\beta_2]w_1 - \tau[B]w_2 + v_3.$$

/4.2/

Для обращения матриц  $\Theta_1 = \begin{bmatrix} E & \tau A \\ \tau A & E \end{bmatrix}$  и  $\Theta_2 = \begin{bmatrix} E & \tau A \\ \tau A & E \end{bmatrix}$  используется

"внутренний" итерационный процесс - метод CG в силу того, что эти матрицы являются симметричными. С учетом структуры блоков  $a$  и  $A$  число операций на одну итерацию в методе CG составит

$$Q_2 = 2c_T p^3 \ln p + O(p^2 + q^2) \quad \text{для } \Theta_1,$$

$$Q_3 = 2c_T p^2 q \ln q + O(p^2 + q^2) \quad \text{для } \Theta_2.$$

Система /4.2/ решается с использованием начального приближения с предыдущей глобальной итерации. Численные расчеты показывают, что для решения системы /4.2/ при  $\epsilon = 10^{-4} - 10^{-5}$  достаточно трех или четырех итераций метода CG.

В итоге число арифметических действий, необходимых для осуществления одного шага итерационного процесса /3.1/, составляет

$$Q = 2c_T p^2 q [4 \ln q + 8 \ln p + n_{CG} (\frac{p}{q} \ln p + 2 \ln q)] + O(p^2 + q^2), \quad /4.3/$$

где  $n_{CG}$  - число итераций в методе CG.

Размерность массива, используемого для хранения матрицы  $B_h$ , составляет  $N_K = 3p^2 q + p^2 + pq$ , а для матрицы  $L_h$  - соответственно  $N_L = 3p^2 q + p^2 + 2pq$ . Кроме того, для реализации всего алгоритма требуется несколько рабочих массивов размерности  $N_T = 2p(p + 2q)$ . Следовательно, суммарный размер всех используемых для работы программы VIEGM3 массивов составляет

$$N_{INT} = N_K + N_L + O(N_T).$$

/4.4/

Приведем практические характеристики точности метода при расчете гармонической функции:

$$u(x) = \frac{1}{|x - x_0|}, \quad x_0 \in \Pi.$$

Например, при размерах  $\Pi(a \times a \times b)$ , равных  $a = 9,0$ ;  $b = 9,0$  и  $x_0 = 0$ , для 5 расчетных сеток с  $p_0 = 1$ ,  $q_0 = 4$  и  $p_5 = 16$ ,  $q_5 = 64$ ,  $N_5 = 4608$  при  $\epsilon_5 = 10^{-3}$  получаются решения с абсолютной точностью  $\Delta_5 = 3,11 \cdot 10^{-4}$ , а после экстраполяции с  $\Delta_4 = 7,34 \cdot 10^{-4}$  имеем  $\Delta_R = 1,2 \cdot 10^{-4}$  в  $L_2$ -метрике на  $\Gamma$ . Этот результат лучше, чем точность на сетке  $\omega_6$ , где  $p_6 = 32$ ,  $q_6 = 128$ . Время решения системы /1.2/ на сетке размерности  $N_5 = 2 \cdot p_5(p_5 + 2q_5) = 4608$  при относительной точности  $\epsilon = 10^{-3}$  составляет  $T_1 \approx 15$  мин, а при  $\epsilon = 10^{-4}$  -  $T_2 \approx 21$  мин. Число глобальных итераций на сетке  $\omega_5$  равно 2 и 3 соответственно. При  $N_4 = 2p_4(p_4 + 2q_4) = 1152$  неизвестных и  $p_5 = 8$ ,  $q_4 = 32$  время счета  $T \approx 2$  мин для  $\epsilon = 10^{-3}$ .

Отметим для сравнения, что решение системы /1.2/ методом Гаусса с матрицей размерности  $N_5 \times N_5$  даже без использования внешних устройств потребовало бы на ЭВМ ЕС-1061 более 200 часов.

## 5. О РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА /3.1/

Создание параллельных вычислительных систем приводит к необходимости анализа методов решения трудоемких задач, и в частности, пространственных, при использовании таких систем.

При реализации итерационного процесса /3.1/ "крупными" операциями являются а/ вычисление правой части  $\Psi = L_h \bar{v}$ ; б/ решение системы /4.1/ с единичными блоками на главной диагонали; в/ решение системы /4.2/ с блочной треугольной матрицей, для обращения диагональных блоков  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$  которой используется метод CG. Прежде всего учтем разбиение матрицы  $K_h$  /или  $L_h$ / на блоки первого уровня  $K_h = \{K_{ij}\}$ ,  $i, j = 1 \div 6$ , согласно /2.1/. При этом на всех этапах итерационного процесса проводятся алгебраические операции на уровне этих блоков, причем основная часть времени ЭВМ приходится на умножение матриц  $K_{ij}$  и  $L_{ij}$  на вектор и лишь небольшая часть - на операцию вычисления скалярных произведений, распараллеливание которой очевидно.

При умножении блоков  $K_a$  и  $L_a$ ,  $a = (i, j)$ , на вектор можно использовать естественный параллелизм на двух уровнях распараллеливания, так как каждый из этих блоков является двухуровневой матрицей одного из следующих типов  $G_n T_m$  и  $T_n T_m$  либо приводится к такому виду с помощью матрицы перестановок. Для операции умножения  $T$ -матриц второго уровня на вектор возможна конвейеризация вычислений, так как эта операция сводится к выполнению трех FFT-преобразований вектора размерности  $p = 2^k 1$

или  $q = 2^{k_2}$ . Известно<sup>/15/</sup>, что для FFT-преобразования вектора размерности  $N = 2^k$  при реализации на  $r$ -процессорной /или  $r$ -тактовой конвейерной/ ЭВМ достигается высота алгоритма  $T_r = 2 \log_2 N$  для  $r = N$  и  $T_r = O(\frac{N}{r} \log_2 N)$  для  $1 \leq r \leq N$ , то есть для произвольного числа процессов  $r \leq N$  при решении единичной задачи достигается ускорение  $S_r = T_1 / T_r = O(r)$  по сравнению с однопроцессорной ЭВМ.

Для оценки эффективности макрораспараллеливания /то есть одно-временного и независимого выполнения большого числа "крупных" алгебраических операций/ при работе с блоками первого уровня удобно разбить их на четыре группы в соответствии с множествами индексов:

$$\Omega_1 = \{i, j : 3 \leq i, j \leq 6\}, \quad \Omega_2 = \{i, j : 1 \leq i, j \leq 2\},$$

$$\Omega_3 = \{i, j : 3 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 2\}, \quad \Omega_4 = \{i, j : 1 \leq i \leq 2, 3 \leq j \leq 6\},$$

так что  $K_a$  имеют следующую структуру:  $C_p T_q$  и  $T_p T_q$  при  $a \in \Omega_1$ ;  $C_p T_p$  и  $T_p T_p$  при  $a \in \Omega_2$ ,  $G_{(q,p)} T_p$  при  $a \in \Omega_3$  и  $G_{(p,q)} T_p$  при  $a \in \Omega_4$ . В результате при работе внутри каждой из четырех групп  $\Omega_i$ ,  $i = 1 \div 4$ , блоков возможно синхронное и независимое вычисление всех  $p$  /либо  $q$  / компонент вектора  $K_a$  и /или  $L_a \bar{v}$  / на  $p$  /либо  $q$  / одинаковых устройствах, так как в каждой из четырех групп совпадают как размерности  $T$ -матриц второго уровня, так и блочная размерность первого уровня. Отметим, что поскольку  $q = p \cdot r$  либо  $p = k \cdot q$ , то, выбрав число устройств для параллельной обработки блоков  $r_0 = \min(p, q)$ , можно добиться полной загрузки этих устройств без разделения блоков на группы.

Наряду с макрораспараллеливанием операций по блочным строкам матриц  $K_a$  и  $L_a$  возможно аналогичное распараллеливание и внутри блочной строки, так как здесь мы имеем дело с одно-временным и независимым вычислением двух /либо трех/ FFT-преобразований  $p$  /либо  $q$  / векторов одинаковой размерности и дальнейшим покомпонентным умножением и сложением результирующих  $p$  /либо  $q$  / векторов. Здесь также можно добиться линейного ускорения при использовании  $1 \leq r \leq r_0$  устройств.

В целом наличие естественного параллелизма характерно для задач в интегральной постановке<sup>/7/</sup>, так как они сводятся к алгебраическим проблемам с плотными матрицами, и в случае  $1 \leq r \leq p^2$ , где  $p$  - порядок матрицы, можно обеспечить линейное уменьшение времени решения единичной задачи с ростом числа  $r$  функциональных устройств<sup>/16/</sup>. Из сказанного выше следует аналогичный вывод и для рассматриваемого здесь алгоритма решения проблемы /1.2/, и для крайней мере при  $1 \leq r \leq r_0^3$ , где  $r_0 = \min(p, q)$ . В частности, при  $p = q$  и  $r = p^2$  время решения единичной задачи равно  $O(p \ln p)$ , а при  $r = p^3$  составляет  $O(\ln p)$ .

Отметим, что вычисление матричных элементов  $K_h$  и  $L_h$  в сумме составляет менее 10% общего времени решения задачи, хотя и здесь

с самого начала заложена возможность естественного распараллеливания, так как все элементы используемых блоков  $K_a$  и  $L_a$  можно вычислять независимо. Очевидны возможности распараллеливания и при умножении на матрицы перестановок  $T_p$ ,  $T_q$ ,  $G$ ,  $G_1$ ,  $T'_p$ , так как эти операции сводятся лишь к перенумерации двумерных массивов.

Детальный анализ возможностей распараллеливания алгоритма связан с учетом особенностей конкретной вычислительной системы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Айрян Э.А. и др. ОИЯИ, P11-82-871, Дубна, 1982.
2. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, P11-83-261, Дубна, 1983.
3. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, P11-83-329, Дубна, 1983.
4. Егоров А.В., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, P11-84-795, Дубна, 1984; P11-85-371, Дубна, 1985.
5. Дойников Н.И. Постановка задач численного анализа полей нелинейных магнитных систем. Обзор ОБ-8. НИИЭФА, Л., 1976.
6. Агошков В.И., Лебедев В.И. В кн.: Вычислительные процессы и системы. "Наука", М., 1985, с.173.
7. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики. "Наука", М., 1985.
8. Trowbridge C.W. IEEE Transactions on Magnetics, 1982, vol.MAG-18, No.1, p.293.
9. Сердюкова С.И. ОИЯИ, P5-84-718, Дубна, 1984.
10. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. "Наука", М., 1978.
11. Марчук Г.И., Кузнецов Ю.А. Итерационные методы и квадратичные функционалы. "Наука", Новосибирск, 1972.
12. Самарский А.А. ДАН СССР, 1969, т.186, № 1.
13. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. "Наука", М., 1984.
14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. "Наука", М., 1967.
15. Фаддеев В.Н., Фаддеева Д.К. Параллельные вычисления в линейной алгебре. Препринт АН СССР, ЛОМИ, P-6-77, Л., 1977.
16. Воеводин В.В. В сб.: Актуальные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. "Наука", Новосибирск, 1985, с.163.

Рукопись поступила в издательский отдел  
5 мая 1986 года.

Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н. P11-86-230  
Экономичный численный метод учета краевого условия  
на бесконечности при решении пространственных задач магнитостатики  
на основе скалярного потенциала. Общий случай

Разработан и реализован в виде комплекса программ экономичный численный метод на последовательности сеток решения внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа в области, дополнительной к параллелепипеду с квадратным сечением. Исследованы свойства матрицы, аппроксимирующей граничное интегральное уравнение. Обоснована сходимость используемого итерационного процесса, получены оценки вычислительной работы. Тестовые расчеты показали, что время решения возникающей алгебраической системы с плотной матрицей для вектора неизвестных размерности  $N = 4608$  составляет около 15 мин при относительной точности  $10^{-3}$  на ЭВМ ЕС-1061. Алгоритм может быть непосредственно применен для учета краевого условия на бесконечности при решении пространственных задач магнитостатики на основе скалярного потенциала, а также при решении внешних задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа в области сложной формы.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Zhidkov E.P., Mazurkevitch G.E., Khoromsky B.N. P11-86-230  
Effective Numerical Method Accounting the Boundary Condition  
at the Infinity in Solution of the Magnitostatics Space Problem  
on the Basis of Scalar Potential. General Case

The numerical method for the solution of external Neuman problem for the Laplace equation on the sequence of grids in the region auxiliary to parallelepiped with the square cross-section has been developed, and the program package for this method has been elaborated. The properties of a matrix, which approximates the boundary integral equation, are investigated. The convergence of the used iterative process is proved, and the estimates of the calculating work are obtained. Test calculations show that the computer time for the arising algebraic system with thick matrix for the vector of variables with dimension  $N = 4608$  approximately equals 15 min with relative accuracy of  $10^{-3}$  at the ES-1061 computer. The algorithm can be directly applied to accounting the boundary condition at the infinity in solution of the space problems of mangitostatics on the basis of scalar potential as well as for the solution of the external Dirichlet and Newman problems for the Laplace operator in the region with complex shape.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986