объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р11-86-20

С.Б.Пшеничников, Р.М.Ямалеев

МЕТОДЫ ОБРАЩЕНИЯ МАТРИЦ ПОРЯДКА 2^n ПУТЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ В КОЛЬЦЕ АЛЬТЕРНИОНОВ

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

1986

I. О блочном методе обращения матриц порядка 2^n

Матрицы порядка 2^n следует отнести к матрицам специального типа. Действительно, вычислительная практика, связанная с решением интегродифференциальных уравнений, показывает, что наиболее экономичным, как по времени счета, так и по используемой оперативной памяти, является то матричное представление операторов, которое имеет порядок 2^n /I/. Ситуация здесь аналогична так называемому алгоритму быстрого преобразования Фурье, когда оптимальный выбор числа членов ряда связан с 2^n /2/. Известно, что общий объем вычислений при нахождении обратной матрицы порядка $m(A^{-1}(m))$ по методу исключения Гаусса составляет $\sim\alpha m^3$ операций, где $\alpha(m) \sim 2$, хотя имеет слабую зависимость от m /3/.

Поскольку операции сложения, умножения и деления для ЭВМ неравноценны, то при сравнении различных алгоритмов обращения матриц мы должны учитывать, в каком соотношении они входят в общее число операций. Операции деления имеют минимальную долю в алгоритме обращения матрицы 2x2 методом исключения. Рассмотрим матрицу

$$A(2) = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\| . \qquad (I.1)$$

Алгоритм обращения в методе исключения дает

$$A^{-1}(2) = \left\| \begin{matrix} a_{11}^{-1} - A_{1211} \cdot A_R & A_{1211} \cdot R^{-1} \\ A_R & -R^{-1} \end{matrix} \right\| , \qquad (I.2)$$

$$A_{1211} = a_{11}^{-1} \cdot a_{12}, \quad A_{2111} = a_{21} \cdot a_{11}^{-1},$$

$$A_R = R^{-1} A_{2111}, \quad R = A_{2111} \cdot a_{12} - a_{22} .$$

Здесь две операции деления, шесть - умножения, две - сложения (вычитания). Таким образом, $\alpha(2)=5/4$.

Матрицу $A(2^n)$ также можно записать в виде (I.I), где элементы (блоки) a_{ij} сами являются матрицами порядка 2^{n-1}. Однако формула обращения остается в силе с тем условием, что a_{11}^{-1}, R^{-1} будут означать обратные матрицы, обычные матрицы умножения и сложения перейдут в соответствующие операции между матрицами. Трудоемкость их при этом будет отличаться в еще большей степени. Если для обращения матрицы $A(2^{n-1})$ требуется $\sim 2^{3(n-1)}$ операций (включая и деление, и умножение со сложением), то умножение состоит из $2^{3(n-1)}$ операций, а сложение - из $2^{2(n-1)}$ операций.
Таким образом, для обращения $A(2^n)$ блочным методом требуется

$$K_n = \alpha \cdot 2 \cdot 2^{3(n-1)} + 6 \cdot 2^{3(n-1)} + 2 \cdot 2^{2(n-1)} = \qquad (I.3)$$

$$= 2^{3n}\left(\frac{2\alpha(n-1)}{8} + \frac{6}{8} + \frac{2}{8} \, \frac{1}{2^{n-1}} \right)$$

операций. Поскольку эта формула верна для всех n, то

$$K_n = 2^{3n} \cdot \left(\frac{2K_{n-1}}{8 \cdot 2^{3n}} + \frac{6}{8} + \frac{1}{4 \cdot 2^{n-1}} \right) .$$

Поскольку $K_{n-1} < 2^{3n}$, то K_n заведомо меньше 2^{3n}. Заметим, что если бы все операции для матрицы $A(2^{(n-1)})$ и, соответственно, для остальных подблоков были равноценны, то обращение $A(2^n)$ состояло бы из

$$N_n \approx 2^3 + 2^3(2^3-1) + (2\cdot 2)^3(2^3-1) + \ldots + (2^{n-1})^3(2^3-1) = 2^{3n}$$

операций, что совпадает с числом операций при обращении неблочным методом Гаусса. Поскольку применение формулы обращения (I.2) для $A(2^{n-1})$ потребует меньше, чем $\alpha(n-1)2^{3(n-1)}$ операций, то с возрастанием n эффективность применения матриц порядка 2^n будет возрастать.

Алгоритм обращения $A(2^n)$ путем сведения к обращению 2^{n-2} матриц порядка 2 схематично можно представить в виде "дерева" (см. рисунок).

2. Изоморфизм матриц $A(2^n)$ с алгеброй альтернионов

Одно из замечательных свойств матриц порядка 2^n состоит в том, что они изоморфны линейной сумме базисных элементов альтернионов. Алгебра альтернионов /4/ есть ассоциативная алгебра с $2n$ образующими e_t, которые связаны между собой соотношением

$$e_{t_1}e_{t_2}+e_{t_2}e_{t_1}=2\varepsilon_t\delta_{t_1t_2}e, \quad (t_k=\overline{1,2n}) \quad , \tag{2.I}$$

e - единица алгебры, ε_t в ℓ случаях равен +I, в остальных случаях равняется -I. Таким образом, алгебра альтернионов есть одна из разновидностей алгебры Клиффорда.

За базисные элементы алгебры альтернионов принимают 2^{2n} элементов e_μ вида

$$e_\mu=e_{t_1}e_{t_2}\cdots e_{t_k} \quad . \tag{2.2}$$

Как простая ассоциативная алгебра она изоморфна матричной алгебре /5/. Это означает, что образующие e_t можно представить плоскими матрицами R_t так, что

$$R_{t_1}R_{t_2}+R_{t_2}R_{t_1}=2\varepsilon_{t_1}\delta_{t_1t_2}E \quad , \tag{2.3}$$

где E - единичная матрица.

Перечислим некоторые свойства системы матриц

$$E, R_t, R_{t_1t_2}, \ldots, R_{t_1t_2\ldots t_{2n}} \tag{2.4}$$

I. Квадрат матриц R_μ пропорционален единичной матрице

$$(R_{t_1\ldots t_k})^2=\varepsilon_{t_1}\ldots\varepsilon_{t_k}(-1)^{\frac{1}{2}K(K-1)}\cdot E \quad . \tag{2.5}$$

2. Все матрицы $R_{t_1\ldots t_k}$ имеют след, равный нулю:

$$\mathrm{tr}(R_{t_1\ldots t_k})=0 \, . \tag{2.6}$$

3. Система матриц (2.4) линейно независима, то есть если выполняется равенство

$$aE+\sum_{k=1}^{2n} a^{t_1\ldots t_k}R_{t_1\ldots t_k}=0 \quad , \tag{2.7}$$

то все коэффициенты $a^{t_1\ldots t_k}$ равны нулю.

4. Число всех различных матриц в (2.4) равно 2^n, а минимальный порядок матриц R_μ равен 2^n. Система матриц (2.4) образует полный базис в матричной алгебре, размерность которой равна 2^{2n}.
5. Ввиду полноты и линейной независимости системы (2.4) любая матрица A порядка 2^n может быть представлена в виде линейной комбинации матриц R_μ :

$$A=2^{-n}(GE+\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{K!}G_{t_1\ldots t_k}R_{t_1\ldots t_k}) \quad . \tag{2.8}$$

Умножая (2.8) на $R_{t_1\ldots t_m}$ и беря след, получаем формулы, определяющие $G, G_{t_1\ldots t_k}$ через A :

$$G_{t_1\ldots t_k}=\varepsilon_{t_1}\ldots\varepsilon_{t_k}(-1)^{\frac{1}{2}K(K-1)}\mathrm{tr}(AR_{t_1\ldots t_k}) \quad , \tag{2.9}$$

$$G=\mathrm{tr}A.$$

6. Используя формулы (2.8) и (2.9), можно получить тождество, связывающее произведения R -матриц:

$$\delta_a^c\delta_d^b=2^{-n}(\delta_d^c\delta_a^b+\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{K!}\varepsilon_{t_1}\ldots\varepsilon_{t_k}\times \tag{2.10}$$

$$\times(-1)^{\frac{1}{2}K(K-1)}R^c_{dt_1\ldots t_k}R^b_{at_1\ldots t_k}) \quad ,$$

δ_i^j - символ Кронекера.

Выберем специальное представление, когда матрицы $S_o=R_1,\ldots S_n=R_{n+1}$ симметричны, $A_1=R_{n+2},\ldots A_{n-1}=R_{2n}$ асимметричны и компоненты этих матриц равны 0, I, -I . Существование такого представления доказывается индукцией по n . Вместо матриц R_t за образующие кольца $\{R\}$ можно взять $2n$ линейно независимых матриц S_k , A_k порядка 2^n . Полагая для $n=1$

$$S_1^1=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}, \quad A_1^1=\begin{Vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}, \quad S_o^1=S_1A_1 \quad , \tag{2.II}$$

для $n=2$ получим следующее представление для образующих /6/:

$$S_1^2=\begin{Vmatrix}S_1^1 & 0\\ 0 & S_1^1\end{Vmatrix}, \quad S_2^2=\begin{Vmatrix}0 & S_o^1\\ S_o^1 & 0\end{Vmatrix},$$

$$A_1^2=\begin{Vmatrix}A_1^1 & 0\\ 0 & A_1^1\end{Vmatrix}, \quad A_2^2=\begin{Vmatrix}0 & -S_o^1\\ S_o^1 & 0\end{Vmatrix}, \tag{2.I2}$$

$$S_o^2=S_1^2S_2^2A_1^2A_2^2 \quad .$$

Продолжая этот процесс, можно найти представление для $2n$ образующих, если найдено то же для $2(n-1)$:

$$S_k^n = \begin{Vmatrix} S_k^{n-1} & 0 \\ 0 & S_k^{n-1} \end{Vmatrix}, \quad S_{k+1}^n = \begin{Vmatrix} 0 & S_o^{n-1} \\ S_o^{n-1} & 0 \end{Vmatrix},$$

$$A_k^n = \begin{Vmatrix} A_k^{n-1} & 0 \\ 0 & A_k^{n-1} \end{Vmatrix}, \quad A_{k+1}^n = \begin{Vmatrix} 0 & -S_o^{n-1} \\ S_o^{n-1} & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.13}$$

$$(k = \overline{1,n-1}),$$

$$S_o^n = S_1^n S_2^n \dots A_1^n A_2^n \dots A_n^n .$$

Заметим, что S_o^n, определяемое для каждого n, не входит в число образующих, но является необходимым элементом для построения представления высших размерностей.

3. Обращение матрицы методом исключения базисных элементов альтернионов

Рассмотрим матрицу A, представленную в виде линейной комбинации базисных элементов альтернионов:

$$A = a_o E + \sum_{k=1}^{2^{2n}} a_k R_k . \tag{3.1}$$

Поставим задачу найти матрицу A^{-1}, обратную матрице A: $AA^{-1}=E$. Перепишем это условие в следующем виде:

$$(a_o E + a_1 R_1 + \sum_{\mu=2}^{2^{2n}} a_\mu R_\mu) A^{-1} = E . \tag{3.2}$$

Умножим слева (3.2) на R_1 и используем описанные выше свойства кольца $\{R\}$. Получим

$$(a_o R_1 + a_1 E + \sum_{k=2}^{2^{2n}} b_k R_k) A^{-1} = R_1 . \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) является следствием (3.2), но следствием, при получении которого дополнительно были использованы перестановочные соотношения (1.2). Поэтому из уравнений (3.2), (3.3) можно исключить

слагаемое, содержащее R_1. В результате исключения получим

$$\left[(a_o^2/a_1 - a_1)E + \sum_{k=2}^{2^{2n}} (a_k a_o/a_1 - b_k) R_k \right] A^{-1} = a_o/a_1 E - R_1 . \tag{3.4}$$

В квадратных скобках (3.4) число базисных элементов кольца $\{R\}$ уменьшено на единицу. Продолжая процесс исключения базисных элементов на последнем шаге, находим

$$SA^{-1} = B , \quad A^{-1} = B/S . \tag{3.5}$$

Алгебраическая функция от элементов матрицы A является характеристическим многочленом A. Действительно, пусть

$$(\lambda E - A)\Psi = 0, \quad \Psi \neq 0 . \tag{3.6}$$

Тогда $S_\lambda(\Psi) = 0$ или $\det(\lambda E - A) = S(\lambda)$. (3.7)

4. Блочные методы исключения базисных элементов алгебры альтернионов

Сначала рассмотрим простой, но замечательный случай, когда матрица разлагается исключительно по образующим R_t:

$$A = a_o E + \sum_{k=1}^{2n} a_k R_k . \tag{4.1}$$

Для такой матрицы обратную можно выписать немедленно. Она имеет вид

$$A^{-1} = (a_o^2 + \sum_{k=1}^{2n} \varepsilon_k a_k^2)^{-1} (a_o E - \sum_{k=1}^{2n} a_k R_k) . \tag{4.2}$$

Суть блочных методов обращения заключается в сведении на каждом шаге обращения к случаю, аналогичному (4.1)-(4.2). Начнем исключение с образующего R_1. В разложении (3.1) базисные элементы R_μ могут содержать R_1, например R_1R_2, а могут и не содержать, R_2R_3. Разделим $A = \sum_{\mu=0}^{2^{2n}} a_\mu R_\mu$ на две части $A = A_1 + A_2$, где все слагаемые A_1 содержат R_1 (линейно), а A_2 не содержат. Тогда

$$A_1 + A_2 = \tilde{A}_1 R_1 + A_2 , \tag{4.3}$$

причем $\tilde{A}_1$ также не содержит R_1. Учитывая (4.3), перепишем (3.8) в виде

$$(\tilde{A}_1 R_1 + A_2)A^{-1} = E$$

или

$$\tilde{A}_1 R_1 \cdot A^{-1} = -A_2 A^{-1} + E \quad . \tag{4.4}$$

Предположим, что $\tilde{A}_1$ известно. Тогда

$$R_1 A^{-1} = -(\tilde{A})^{-1} A_2 A^{-1} + \tilde{A}^{-1} \quad . \tag{4.5}$$

Умножая (4.5) на R_1 (пусть $R_1^2 = E$), находим

$$A^{-1} = -R_1 (\tilde{A})^{-1} A_2 A^{-1} + R_1 \tilde{A}^{-1} \quad . \tag{4.6}$$

Матрица $A_3 = \tilde{A}^{-1} A_2$ не содержит R_1. В выражении (4.6) поменяем местами R_1 с A_3. При этом

$$R_1 A_3 = A_3' R_1 \quad ,$$

где A_3' есть матрица с теми же базисными элементами, что и A_3, где нечетные слагаемые поменяли знак. Тогда вместо (4.6) имеем

$$A^{-1} = -A_3' R_1 A^{-1} + R_1 \tilde{A}^{-1} \quad . \tag{4.7}$$

Подставляя в (4.7) $R_1 A^{-1}$ из (4.5), получим

$$A^{-1} = A_3' A_3 A^{-1} - A_3' \tilde{A}_1^{-1} + R_1 \tilde{A}_1^{-1}$$

или

$$\left[E - A_3' A_3\right] A^{-1} = (-A_3' + R_1) \cdot \tilde{A}^{-1} \quad . \tag{4.8}$$

Обозначив через A_4 выражения

$$A_4 = E - A_3' A_3 \quad ,$$

находим окончательное выражение для A^{-1} :

$$A^{-1} = A_4^{-1} (R_1 - A_3') \tilde{A}_1^{-1} \quad . \tag{4.9}$$

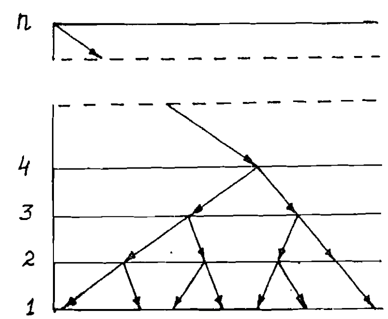
Итак, для определения A^{-1} по формуле (4.9) необходимо иметь две обратные матрицы A_4^{-1} и $\tilde{A}_1^{-1}$, которые не содержат R_1, следовательно, состоят из $2^{2(n-1)}$ базисных элементов, т.е. соответствуют матрицам порядка 2^{n-1}. Ситуация полностью аналогична описанной в § I, где обращение матрицы порядка 2^n сводилось к обращению двух матриц порядка 2^{n-1}. Продолжая далее этот процесс,

т.е. исключая из A_4 и $\tilde{A}_1$ другие базисные элементы, мы получим "дерево", представленное на рисунке.

Естественно, область применения метода альтернионного обращения матрицы существенно отличается от области тех практических задач, где хорошо работает метод обращения Гаусса. В настоящее время было бы неразумно пытаться реализовать этот метод на ЭВМ на языке Фортран наравне с методом Гаусса, поскольку число операций обращения с использованием альтернионов составляет $\sim 2^{4n}$. Это связано с тем, что число операций умножения матриц вида (3.I) друг на друга, используя (2.3), равно 2^{4n}. Алгоритм альтернионного обращения матриц легко может быть реализован на языке аналитических вычислений (например ЛИСП), если соответствующее обеспечение подпрограммой алгебры альтернионов в библиотеке имеется.

Предложенный метод просто необходим, если обращаемая матрица уже имеет вид (3.I). Подобный случай возникает при исследовании генераторов групп вращений в теории движений частиц со спином /7/. Использование базиса алгебры Клиффорда (или альтернионов) является выгодным и при исследовании групп вращений в пространствах более высокой размерности, чем 4-мерное пространство Минковского. При этом аналитическая процедура нахождения обратной матрицы в базисе алгебры Клиффорда является необходимым этапом исследования. Как показано в /8/, при решении системы полиномиально нелинейных алгебраических уравнений методом спинорной линеаризации также возникает необходимость обращения матриц вида (3.I) и определения характеристических уравнений для матриц типа (3.I).

Исследование свойств матриц с помощью ассоциативных алгебр представляется, на наш взгляд, весьма перспективной задачей. Следующим возможным шагом в этом направлении является решение задачи на собственные значения матрицы порядка 2^n на основе применения свойства базиса альтернионов.



Литература

1. Гареев Ф.А. и др. ЖВМ и МФ, 1977, 17, 2, с.407;
   Ямалеев Р.М. ОИЯИ, 11-83-881, Дубна, 1983.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. "Наука",М., 1978.
3. Бахвалов Н.С. Численные методы. "Наука",М., 1975;
   Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. "Мир",М.,1980.
4. Зайцев Г.А. Алгебраические проблемы математической и теоретической физики. "Наука",М., 1974.
5. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. "Наука",М., 1969.
6. Зайцев Г.А. Основные формулы для многомерного действительного спинора и алгебраическая модель квантованных волновых полей. ДАН СССР, 1964, т.156, 2, 294.
7. Богуш А.А. Введение в полевую теорию элементарных частиц. "Наука и техника", Минск, 1981.
8. Пшеничников С.Б., Генварев А.А. Альтернионный анализ на примере расчета трехконтурной сети. Изв. вузов СССР. Энергетика, 1984, № 8, с.98;
   Кузнецов П.Г., Пшеничников С.Б. Спинорный метод решения систем нелинейных алгебраических уравнений. ДАН СССР, 1985, т.283,5,1073.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 января 1986 года.

Пшеничников С.Б., Ямалеев Р.М. Р11-86-20
Методы обращения матриц порядка 2^n путем разложения в кольце альтернионов

Предложен метод обращения матриц порядка 2^n путем разложения обращаемой матрицы по базисным элементам кольца альтернионов. Изложены некоторые свойства и тождества базисных элементов альтернионов и способ построения матричного представления образующих кольца. Разработаны алгоритм обращения матрицы методом исключения базисных элементов альтернионов и блочный метод обращения в кольце альтернионов. Показано, что применение блочного метода обращения для матриц порядка 2^n является наиболее экономичным.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Pshenichnikov S.B., Yamaleev R.M. P11-86-20
Method for Inverting of Order 2^n Matrices Using Expansion in Alternion Ring

A method for inverting matrices of order 2^n using expansion over basis elements of alternion ring is proposed. Some properties and identities of alternion basis elements and a way of constructing matrix representation of ring generators are given. Inversion algorithm for matrices using the method of basis element exclusion and the block inversion method for alternion ring are developed. It is shown that the application of the block inversion method for matrices of 2^n order is most economical.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986