объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р11-86-135

В.Б.Злоказов

МАЛОПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

1986

Введение

Аппроксимация функций является распространенным средством решения многих прикладных задач. Однако при анализе многих типов экспериментальных данных к аппроксимации часто предъявляется требование: число параметров у аппроксиманта должно быть небольшим. Это требование выдвигается как по соображениям экономии вычислений и средств изображения данных, так и по условиям работоспособности многих алгоритмов анализа данных. Например, в задачах фильтрации функций, т.е. выделения из них компонент заданного типа, устойчивое решение удается получить только, если компоненты разлагаемой функции приближаются аппроксимантами с малым числом параметров. Вообще, при решении многих типов интегро-дифференциальных уравнений методами приближений большое число параметров ведет к возникновению явлений неустойчивости решения.

В математике классическим универсальным аппаратом аппроксимации функций служат системы полиномов - алгебраических, тригонометрических, экспоненциальных, обобщенных и т.д. Однако вычислительная практика показала, что высокая точность при использовании таких аппроксимантов может быть достигнута лишь при большом числе параметров. Это понятно. Ведь для успеха таких аппроксимантов надо, чтобы у приближаемых функций старшие производные (или старшие гармоники) были выражены равномерно слабо. Но, например, часто встречающиеся на практике финитные функции таким свойством не обладают. Обычно поступают так: подбирают эвристическим путем комбинацию (иногда очень мудреную) трансцендентных функций и вводят в нее параметры. Этот путь трудоемок, неуниверсален и без гарантий успеха. В данной работе предлагается метод, обеспечивающий широкие и просто реализуемые алгоритмические возможности и в то же время не требующий изощренной интуиции.

Идея метода заключается в следующем. Приближаемой функции $\varphi(x)$ мы сопоставляем ее грубую модель - функцию $m(x)$, приближенно, в общих чертах, повторяющую контур $\varphi(x)$ и задаваемую или формулой, или графиком. Затем в модель $m(x)$ вместо аргумента x вставляется обычный аппроксимант $P_n(x)$ (полином, дробно-рациональная функция, сплайн и т.д.) и параметры выражения $m(P_n(x))$ уточняются аппроксимацией. Как показала практика, такой прием часто позволяет весьма радикально сократить число параметров (иногда в десятки раз). Дополнительное преимущество метода - модель может задаваться графически и, следовательно, она в состоянии учесть самые экзотические особенности приближаемой функции.

При использовании метода возникает ряд математических вопросов, обсуждению которых и посвящена данная работа.

§ I. Описание метода

Рассмотрим функцию, изображенную на рис.I. Рассуждая качественно, эту кривую можно трактовать как топологически деформированную синусоиду, а именно, растянутую в сторону увеличения аргумента. Можно также считать ее синусоидой, зависящей от аргумента не непосредственно, а по некоторому закону $h(x)$: $\sin(h(x))$. Эта мысль ложится в основу предлагаемого метода. Мы сопоставляем аппроксимируемой функции $f(x)$ ее грубую модель $m(z)$, а затем подбираем закон изменения аргумента $z=h(x)$ так, чтобы имело место

$$f(x)=m(h(x)) .$$

Итак, пусть даны 3 области X, Z, Y, функция $f(x)$ есть непрерывное отображение X на Y, а $m(z)$ - непрерывное отображение Z на Y.

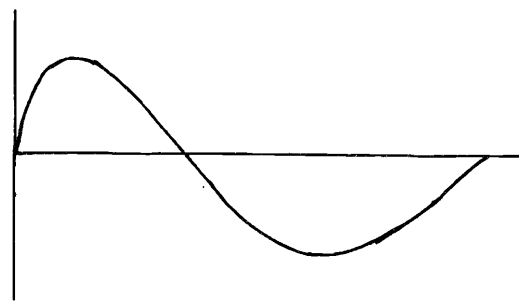

Рис.I. График функции $y(x)=\sin(x^{\cdot 67})$.

Определение I. Функция $m(z)$ называется грубой моделью функции $f(x)$, если существует $h(x)$ - такое непрерывное отображение X на Z, что

$$f(x)=m(h(x)) . \qquad (I)$$

Теорема I. Если $m(z)$ является грубой моделью функции $f(x)$, то выражение $m(P_n(x))$, где $P_n(x)$ – полином степени n с $n+1$ свободными коэффициентами, будет аппроксимантом функции $f(x)$ в C – метрике.

Доказательство. Пусть непрерывность $m(z)$ описывается парой величин (ε,δ). Так как $m(z)$ – грубая модель функции $f(x)$, то имеет место (I). По теореме Вейерштрасса для любого $\delta>0$ найдется полином $P_n(x)$, являющийся δ – аппроксимантом функции $h(x)$. Но тогда выражение $m(P_n(x))$ будет ε – аппроксимантом функции $f(x)$. При этом, зная δ – погрешность аппроксимации $h(x)$, мы можем определить ε – погрешность аппроксимации метода.

Примечание I. Простота метода по сравнению с упомянутым в введении эмпирическим подбором сложных функций состоит в том, что нам не надо указывать в (I) конкретный закон изменения аргумента $h(x)$. Лишь бы у нас была уверенность, что такой закон существует и является непрерывным. Если это так, то $P_n(x)$ будет приближением к нему.

Определение 2. Функция $m(z)$ называется грубой моделью функции $f(x)$, если существует такой замкнутый промежуток $Z_1 \subseteq Z$ на котором:

I) она строго монотонна;

2) $m(Z_1) \supseteq f(X)$.

Это определение грубой модели является более узким, но зато легче проверяемым. Примеры грубой модели в смысле определения 2 дают рис.2,3.

Теорема 2. Если $m(z)$ является грубой моделью функции $f(x)$ в смысле определения 2, то выражение $m(P_n(x))$ будет аппроксимантом функции $f(x)$ в C– метрике.

Доказательство. На интервале $Y_1=m(Z_1)$, очевидно, существует обратное непрерывное отображение $m^{-1}(y)=z$, определенное также и для всех $y=f(x)$. Обозначим

$$h(x)=m^{-1}(f(x)).$$

Тогда для любого $x \in X$ имеет место

$$f(x)=m(m^{-1}(f(x)))=m(h(x)),$$

где $h(x)$ непрерывно, и дальше повторяется доказательство теоремы I.

Теорема 3. Если $m(z)$ является гомеоморфизмом области Z на Y, то выражение $m(P_n(x))$ будет аппроксимантом любой непрерывной функции $f(x)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Примечание 2. Теорема 3 поясняет, почему в случае неудачи аппроксимации некоторых функций полиномами оказывает большую помощь переход к логарифмическому, корнеквадратному и т.д. масштабам.

Примечание 3. Пусть $\varphi(x)=a\exp(-bx^2)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Если взять в качестве грубой модели $m(z)=\exp(z)$, то уже в классе полиномов 2-го порядка мы получим абсолютно точную аппроксимацию $\varphi(x)$, т.е. используя всего 3 параметра. Если же аппроксимировать $\varphi(x)$ просто в классе полиномов, то для абсолютно точной аппроксимации нужен бесконечный степенной ряд. Пример несколько идеализированный, но он дает ясное представление о том, как и когда получается большая экономия на параметрах.

Примечание 4. Теоремы I,2,3 будут верны и при замене C -расстояния на метрики L_1, L_2 и ряд других.

Примечание 5. Теоремы I,2,3 останутся справедливыми также, если перейти от полиномов к другим классам функций, которые являются аппроксимантами $f(x)$, например к тригонометрическим полиномам, полиномам от иррациональных степеней x, дробно-рациональным, сплайнам и т.д. .

Рассмотрим случай многомерного аргумента.

Определение 3. Функция $m(z)$, где $z \in Z \subseteq R^n$, называется грубой моделью функции $f(x)$, $x \in X \subseteq R^n$, если существует непрерывное отображение $z=h(x)$ области X в Z, такое, что

$$f(x)=m(h(x)).$$

Теорема 4. Если $m(z)$ – грубая модель функции $f(x)$, то выражение $m(P_n(x))$, где $P_n(x)$ – многомерный аппроксимант отображения $h(x)$, будет аппроксимантом функции $f(x)$.

Доказательство повторяет рассуждения одномерного случая.

§ 2. Вопросы оптимизации и обобщения

С помощью приемов, аналогичных тем, которые применялись выше, можно перенести на описываемый метод многие результаты, изложенные, например, в /I/ и касающиеся таких стандартных вопросов теории аппроксимации, как существование и единственность наилучшего аппроксиманта и т.д. . Но ввиду весьма широкого формального определения понятия грубой модели такая теория будет малосодержательной. Больший интерес представляет качественный анализ путей, ведущих к сокращению числа параметров в аппроксимирующих полиномах, и возможностей обобщений. Здесь можно сделать следующие замечания.

I. Грубую модель следует выбирать так, чтобы закон изменения аргумента $h(x)$ имел полиномиальную форму. Если же $h(x)$ содержит

неполиномиальные элементы, т.е. где старшие производные играют большую роль, то целесообразно эти элементы включить в модель. Это всегда можно сделать, так как метод позволяет использовать в качестве моделей $m(z)$ не только функции, заданные формулами, но и функции, заданные графиками и таблицами. А в последние легко внести какие-угодно изменения.

2. На грубую модель накладывается условие $m(Z) \supseteq f(X)$. Но если взглянуть, например, на рис.2, то становится ясно, что лучше всего это условие сформулировать так: область значений модели совпадает с областью значений функции $f(x)$. Потому что, если максимум модели строго больше максимума приближаемой функции, $h(x)$ в точке максимума $f(x)$ будет делать поворот, т.е. поведение ее будет сложным, требующим для аппроксимации много параметров. Автоматическое выравнивание масштабов по y легко достигается введением дополнительного параметра A:

$$f(x)=Am(h(x)),$$

так что $f(x)$ аппроксимируется выражением $Am(P_n(x))$, зависящим от $n+2$ параметров.

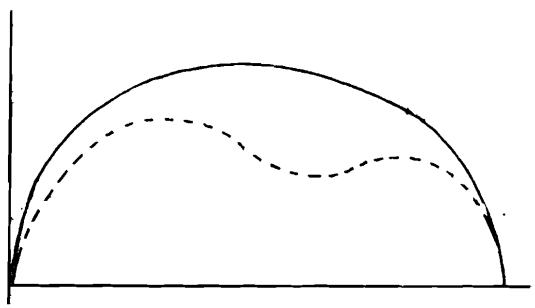

Рис.2. Функция, изображенная непрерывной линией, может быть грубой моделью функции, изображенной пунктиром.

3. Определение 2 грубой модели можно распространить и на функции, имеющие участки постоянства (см. рис.4). В этом случае, для того чтобы $m(z)$ была моделью $f(x)$, надо чтобы максимумы, минимумы и участки постоянства модели и функции чередовались одинаково; чтобы постоянные значения у них совпадали, а области значений между экстремумами совпадали.

4. Данный метод естественным образом переносится и на случай аппроксимаций на дискретных множествах, т.е. гистограмм, а также может использоваться в процедурах интерполяции и экстраполяции.

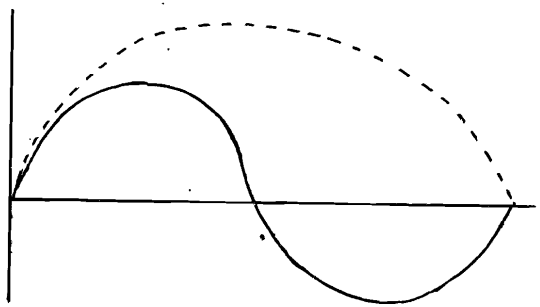

Рис.3. А здесь функция, изображенная непрерывной линией, не может быть грубой моделью функции, изображенной пунктиром, так как область значений первой не накрывает область значений второй.

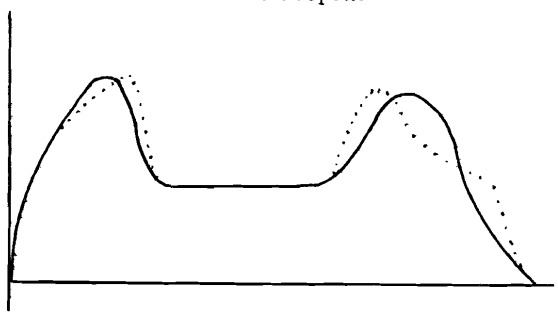

Рис.4. Пример грубой модели с постоянным участком.

5. Задача аппроксимации функций в квадратичной метрике решается особенно просто в классе аналитических функций.

Прежде всего отметим, что если модель $m(z)$ является аналитической функцией в области z, то выражение $m(P_k(x))$ при любом k будет, очевидно, аналитической функцией в области X_1, где X_1 связано с z соотношением $z=P_k(X_1)$.

Для аналитических функций, или хотя бы просто непрерывно дифференцируемых, решение дает система уравнений

$$\begin{cases} \int (f(x)-Am(P_k)))m'(P_k(x))x^i dx=0, & i=0,\dots k \\ \int (f(x)-Am(P_k(x)))m(P_k(x))dx=0, \end{cases}$$

относительно параметров $A, a_i, a_1, \dots, a_k$.

Производные функции $m(P_k(x))$ будут последовательно равны

$$m'P_k', \quad m''P_k'^2 + m'P_k'', \quad m'''P_k'^3 + 3m'P_k'P_k'' + m'P_k''' \quad \text{и т.д.,}$$

и могут быть вычислены, таким образом, независимо от того, как задана модель $m(z)$: в виде формулы или графически.

6. Если приближаемая функция может быть естественным образом разбита на компоненты, суммой которых она является:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m} f_i(x) ,$$

то число требуемых параметров можно сократить, используя грубые модели каждой компоненты $f_i(x)$:

$$m(x)=\sum_{i=1}^{m} m_i(x) ,$$

где каждая $m_i(x)$ есть грубая модель $f_i(x)$, и аппроксимант функции $f(x)$ строится так:

$$f(x)\sim\sum_{i=1}^{m} A_i m_i(P_{ik}(x)) .$$

То же можно сделать и с произведением

$$f(x)\sim A\prod_{i=1}^{m} m_i(P_{ik}(x))$$

и с другими легко опознаваемыми структурами.

7. Если в силу некоторых соображений известно, что для функции $u(x)$ в уравнении

$$\hat{B}u(x)=f(x) , \qquad (2)$$

где $\hat{B}$ - интегро-дифференциальный оператор, выражение $Am(P_n(x))$ является аппроксимантом, то уравнение (2) может быть преобразовано в алгебраическое уравнение относительно коэффициентов полинома $P_n(x)$ и параметра A .

Действительно, как уже указывалось ранее, дифференцирование $m(P_n(x))$ дает выражение, содержащее произведения $m^{[k]}(z)$ и $P_n^{[k]}(x)$, $k=0,\dots,n$.

Далее $\int m(P_n(x))dx$ является функцией n числа переменных коэффициентов полинома.

Алгебраическое уравнение может дать ряд преимуществ перед разностными в отношении простоты и скорости решения, устойчивости и т.д..

8. Данный метод позволяет вводить аналитическую параметризацию в функции, заданные графиками или таблицами. Пусть $\{\varphi_i(x)\}$ - семейство таких функций, объединенных в это семейство по какому-либо признаку. Пусть далее $m(z)$ - грубая модель для таких функций. Тогда $\{m(P_n(x))\}$ будет приближенным описанием этого семейства с помощью параметров, которые могут быть объектами аналитических операций: дифференцирования, интегрирования и т.д.

9. Уточнение грубой модели можно осуществлять и с помощью рекуррентной процедуры: взяв $m_0(z)$, уточнить ее с помощью $P_{n_1}(x)$, затем $m_0(P_{n_1}(x))=m_1(x)$ уточнить с помощью $P_{n_2}(x)$ и т.д.

Таблица I

$f(x)$	$g_0(x)$	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$
0,0	I,4	0,4	0,4	0,4
I36,4	I3I,8	I34,5	I34,5	I34,5
I85,8	I88,9	I88,4	I88,4	I88,4
200,0	200,2	200,2	200,2	200,2
I89,8	I89,4	I88,6	I88,6	I88,6
I62,4	I60,5	I6I,5	I6I,4	I6I,4
I23,2	I2I,7	I23,3	I23,3	I23,3
77,I	76,8	77,8	77,8	77,8
27,9	28,8	28,6	28,6	28,6
-2I,0	-I9,7	-20,8	-20,8	-20,8
-67,0	-65,9	-67,3	-67,4	-67,4
-I07,9	-I07,7	-I08,6	-I08,6	-I08,6
-I42,3	-I43,0	-I42,8	-I42,8	-I42,8
-I69,I	-I70,2	-I69,I	-I69,I	-I69,0
-I87,6	-I88,6	-I87,2	-I87,I	-I87,I
-I97,8	-I98,I	-I97,I	-I97,I	-I97,2
-I99,7	-I99,2	-I99,3	-I99,3	-I99,4
-I93,8	-I92,8	-I94,0	-I94,0	-I94,0
-I80,8	-I79,9	-I8I,4	-I8I,4	-I8I,4
-I6I,5	-I6I,4	-I62,0	-I62,0	-I62,0
-I36,9	-I37,7	-I36,8	-I36,8	-I36,8
-I08,I	-I09,2	-I07,6	-I07,6	-I07,6
-76,3	-76,3	-76,0	-76,0	-76,0
-42,5	-4I,I	-43,I	-43,I	-43,I
-7,9	-8,4	-7,7	-7,7	-7,7
max Δ	4,6	2,6	2,6	2,6
в %	3,4%	I,4%	I,4%	I,4%

В таблице I приведены результаты аппроксимации функции $f(x)=200\sin(z^{0,65})$, где $z=(2\pi x/25)^{1,54}$; $x=0,1,\dots,24$, функциями $g_0(x)=\sum_{i=0}^{9} a_i P_i(x)$, $g_1(x)=A\sin(u)$, $g_2(x)=Au\exp(-u^2)$, $g_3(x)=Au/(1+u^2)$, где $u(x)=\sum_{i=0}^{8} a_i P_i(x)$; $P_i(x)$ - ортогональные на $[0,2\pi]$ полиномы. Видно, что при одинаковом числе параметров $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ обеспечивают большую точность аппроксимации, т.е. меньшие $\max\Delta$.

Таблица 2

$f(x)$	$g_0(x)$	$g_3(x)$
0,0	I,39	0,23
I37,03	I32,4I	I37,80
I86,27	I89,47	I83,08
200,00	202,30	200,66
I89,I3	I88,69	I9I,07
I60,87	I59,00	I62,I0
I20,93	II9,37	I20,76
74,I0	73,80	72,95
24,42	25,30	23,03
-24,78	-23,4I	-25,75
-70,8I	-69,76	-70,87
-III,56	-III,34	-II0,74
-I45,50	-I46,I5	-I44,27
-I7I,62	-I72,72	-I70,52
-I89,34	-I90,30	-I88,82
-I98,52	-I98,82	-I98,77
-I99,36	-I98,85	-200,24
-I92,32	-I9I,3I	-I93,46
-I78,I5	-I77,27	-I79,07
-I57,75	-I57,63	-I57,94
-I32,I4	-I32,95	-I3I,5I
-I02,47	-I03,54	-I0I,63
-69,88	-69,97	-70,00
-35,55	-34,I3	-34,09
-0,60	-I,I7	-2,32
$\max\Delta$	4,62	3,I9
в %	3,4%	I,7%

В таблице 2 приведены результаты аппроксимации функции $f(x)=200\sin(z^{0.67})$, $z=(2\pi x/25)^{1,5}$, $x = 0,1,\ldots,24$ ортогональными полиномами $g_0(x)=\sum_{i=0}^{9} a_i P_i(x)$ и рекуррентно уточненной функцией

$$g_{i+1}(x)=A_i g_i(\sum a_i P_n(x)), \quad u(x,u_i)=\sum_{i=0}^{u_i} a_i P_i(x);$$

$$g_1(x)=A\sin(u(x,2)), \quad g_2(x)=Ag_1(u(x,3)), \quad g_3(x)=Ag_2(u(x,4)).$$

Видно, что хотя у полинома 9 параметров, а у $g_3(x)$ их 6, но погрешность аппроксимации $\max\Delta$ у $g_3(x)$ меньше, чем у полинома.

Литература

I. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. "Наука", М., I978.

Рукопись поступила в издательский отдел
I0 марта I986 года.

Злоказов В.Б. P11-86-135

Малопараметрический метод аппроксимации функций

Идея метода заключается в следующем. Приближаемой функции $\phi(x)$ мы сопоставляем ее грубую модель - функцию $m(x)$, приближенно, в общих чертах, повторяющую контур $\phi(x)$ и задаваемую или формулой, или графиком. Затем в модель $m(x)$ вместо аргумента x вставляется классический аппроксимант $P_n(x)$ /полином, дробно-рациональная функция, сплайн и т.д./, и параметры выражения $m(P_n(x))$ уточняются аппроксимацией. Такой прием позволяет часто весьма радикально сократить число параметров.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Zlokazov V.B. P11-86-135

Small-Parameter Method for Function Approximation

The idea of the method consists in the following. We match a function $\phi(x)$ by its rough model - a function $m(x)$, which is given either by a formula, or a graph. Then, in the model $m(x)$ instead of the argument x a classical approximant $P_n(x)$ (polynomial, fraction-rational function, spline, etc) is being put, and the parameters of the expression $m(P_n(x))$ are refined by approximation. Such a method often allows us to drastically reduce the number of the parameters.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986