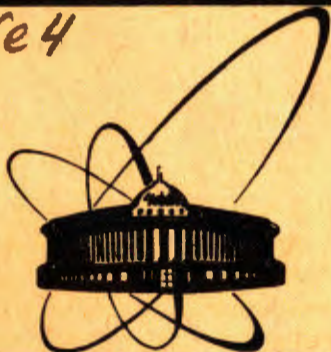


85-973

с 345e4



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

2412/86

P11-85-973

П.Г.Акишин, В.П.Акопян*, И.А.Гаганов,
Е.П.Жидков, И.Б.Иссинский

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ СИНХРОФАЗОТРОНА
ДЛЯ ФОКУСИРОВКИ ПУЧКА
ВТОРОГО НАПРАВЛЕНИЯ
МЕДЛЕННОГО ВЫВОДА

* Ереванский физический институт

Проблема повышения интенсивности выведенных пучков из синхрофазотрона ОИЯИ остается актуальной, в связи с этим проводятся расчетные и экспериментальные работы.

Исследования, проводившиеся в последнее время, показали, что во втором направлении медленного вывода из синхрофазотрона значительные потери в интенсивности не могут считаться допустимыми. Пучок ядер попадает после отклоняющих элементов в первом прямолинейном промежутке в область спадающего поля ускорителя. В результате дефокусировки он имеет на выходе из ускорителя горизонтальный размер больше размера апертуры магнитных элементов канала транспортировки пучка. Как следствие, эффективность вывода мала. Поэтому необходимо создать фокусирующее поле в вакуумной камере (рис.1). Такое поле создается с помощью дополнительных накладок - ферромагнитных шимм (рис.2).

Расчеты магнитных полей синхрофазотрона выполнялись методом граничных интегральных уравнений в двумерном приближении в случае постоянной магнитной проницаемости.

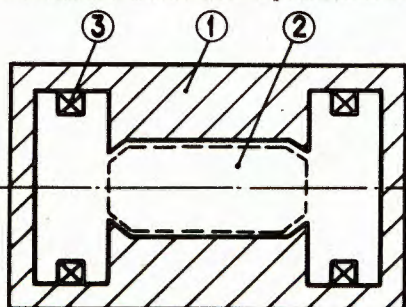


Рис.1. Магнит синхрофазотрона.

- 1 - железное ярмо,
- 2 - вакуумная камера,
- 3 - обмотки электромагнита,

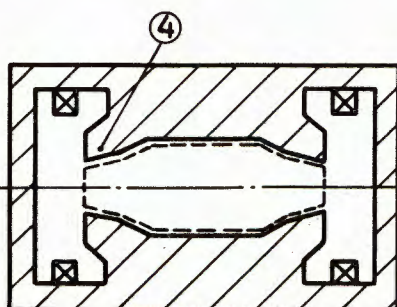


Рис.2. Магнит синхрофазотрона

- с дополнительными ферромагнитными шиммами (4).

1. Граничные интегральные уравнения

Пусть $\vec{B}(\vec{x})$ - индукция магнитного поля в т. \vec{x} , $\vec{H}(\vec{x})$ - напряженность, $\vec{M}(\vec{x})$ - магнитный момент, $\mu = \mu(\vec{B}(\vec{x}), \vec{x})$ - магнитная проницаемость, $\vec{j}(\vec{x})$ - плотность тока, μ_0 - магнитная проницаемость вакуума. Пусть G - область, заполненная железом. Тогда имеют место уравнения:

$$\vec{H}(\vec{a}) = \vec{H}^s(\vec{a}) + \frac{\nabla \vec{a}}{4\pi} \left[\int_G (\vec{M}(\vec{x}), \nabla_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{a}|}) dV_{\vec{x}} \right], \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{x}) &= \frac{\vec{B}(\vec{x})}{\mu \mu_0}, \\ \vec{M}(\vec{x}) &= \frac{\vec{B}(\vec{x})}{\mu_0} - \vec{H}(\vec{x}). \end{aligned} \quad (2)$$

В двумерном случае (1) сводится к следующему уравнению:

$$\vec{H}(\vec{a}) = \vec{H}^s(\vec{a}) + \frac{\nabla \vec{a}}{2\pi} \left[\int_G (\vec{M}(\vec{x}), \nabla_{\vec{x}} \ln |\vec{x}-\vec{a}|) dS_{\vec{x}} \right]; \quad (3)$$

в (1) и (3) есть поле от токовых элементов. Расчеты магнитного поля проводились в линейном приближении, т.е. предполагалось $\mu = const$ в пределах G . В этом случае (3) редуцируется к граничным интегральным уравнениям:

$$\frac{\vec{B}(\vec{a})}{\mu} = \vec{H}^s(\vec{a}) \mu_0 + \frac{\nabla \vec{a}}{2\pi} \left[\oint_{\partial G} (\vec{B}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) d\ell_{\vec{x}} \right]. \quad (4)$$

Для дискретизации (4) использовался метод коллокации. Граница ∂G разбивается на отрезки L_j ($\partial G = \bigcup_{j=1}^N L_j$). В пределах каждого отрезка L_j \vec{B} считалось постоянным и равным \vec{B}_j . Рассматривался некоторый набор точек наблюдений $\{\vec{a}_i\}$. В качестве т. \vec{a}_i бралась середина отрезка L_j . Полученная после дискретизации (4) система имеет вид:

$$\frac{\vec{B}_i}{\mu} = \vec{H}^s(\vec{a}_i) \mu_0 + \frac{\nabla \vec{a}_i}{2\pi} \left[\sum_{j=1}^N \int_{L_j} (\vec{B}_j, \vec{n}(\vec{x})) \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \ln |\vec{x}-\vec{a}_i| d\ell_{\vec{x}} \right] / \frac{\vec{a}_i - \vec{a}_i}{|\vec{a}_i - \vec{a}_i|}. \quad (5)$$

Пусть $\hat{B} = (\vec{B}_1, \dots, \vec{B}_N)^T$, $\hat{H}^s = (\vec{H}^s(\vec{a}_1), \dots, \vec{H}^s(\vec{a}_N))^T$.

Тогда (5) можно записать следующим образом:

$$\frac{\hat{B}}{\mu} = \mu_0 \hat{H}^s + (1 - \frac{1}{\mu}) [A] \hat{B}, \quad (6)$$

где $[A]$ - матрица размером $[2N \times 2N]$, являющаяся дискретным аналогом интегрального оператора из (4). Интегральный оператор из (4) - вырожденный. Это свойство сохраняет его дискретный аналог. Матрица $[A]$ имеет не менее N нулевых собственных значений. Как следствие, при больших значениях μ дискретизированная система (5) становится плохо обусловленной. Для регуляризации (5) использовались следующие соображения. В пределах каждого элемента L_j нормаль $\vec{n}(\vec{x})$ постоянна и равна \vec{n}_j . Умножим (5) скалярно на \vec{n}_i . Пусть $S_i = (\vec{B}_i, \vec{n}_i)$. Тогда система (5) редуцируется к следующей

$$\frac{S_i}{\mu} = \mu_0 (\vec{H}^s(\vec{a}_i), \vec{n}_i) + \left(\vec{n}_i, \nabla \vec{a}_i \sum_j \int_{L_j} S_j \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \ln |\vec{x}-\vec{a}_i| d\ell_{\vec{x}} \right) / \frac{\vec{a}_i - \vec{a}_i}{|\vec{a}_i - \vec{a}_i|}, \quad (7)$$

которую можно разрешить относительно $\{S_i\}$. Обусловленность (7) существенно лучше. Подставив $\{S_i\}$ в (5), можно получить $\{\vec{B}_i\}$, но для пересчета поля в произвольную точку достаточно знать $\{S_i\}$.

Предложенная методика использовалась для расчета поля магнита синхрофазотрона (рис.1). Численные расчеты показывают, что при достаточно большой толщине стенок магнита влияние внешней границы области G на поведение поля в рабочей области магнита мало. В связи с этим в (5) учитывались граничные элементы $\{\partial L_j\}$, принадлежащие только внутренней границе области G .

2. Учет угловых особенностей

Изложенная в первом параграфе методика хорошо описывает распределение поля в рабочей области магнита. Но этот подход не дает картины поля в окрестности угловых точек, где поле может быть сколь угодно велико. В данном разделе рассматривается частная задача определения поля в бестоковой области (рис.4) с учетом угловых особенностей.

Анализ поведения поля в окрестности угловых точек проводился в работах [1-4].

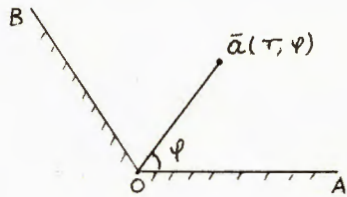
Пусть область G такова, что граница ее ∂G является кусочно-гладкой кривой. Тогда гармоническая в G функция $u(x)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\Omega(\vec{a}) u(\vec{a}) = \oint_{\partial G} u(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \ln |\vec{x}-\vec{a}| d\ell_{\vec{x}} - \oint_{\partial G} \frac{\partial}{\partial n_x} u(\vec{x}) \ln |\vec{x}-\vec{a}| d\ell_{\vec{x}}, \quad (8)$$

где $\Omega(\vec{a})$ для внутренних точек G равно 2π , а для граничных точек равно углу между касательными, проведенными в точке \vec{a} к гра-

нице $\mathcal{D}\mathcal{G}$. Рассмотрим поведение гармонической функции $u(\bar{x})$ в окрестности угловой точки (рис.3), в предположении, что $u(\bar{x})$ на границе угла равна нулю.

Введем полярную систему координат (рис.3). Функция $u(x)$ тождественно равна нулю на лучах OA и OB . Пусть $\angle AOB$ равен α . Разложим $u(a)$ по системе функций $\{\sin(\frac{k\pi\varphi}{\alpha})\}$



$$u(a) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k f_k(r) \sin\left(\frac{k\pi\varphi}{\alpha}\right).$$

Ввиду гармоничности $u(\bar{a})$, $f_k(r)$ удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению:

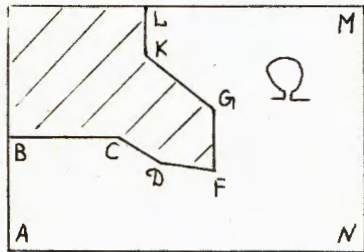
Рис.3

$$\frac{d^2 f_k(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_k(r)}{dr} - \left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)^2 \frac{f_k(r)}{r^2} = 0. \quad (9)$$

Решения (9) есть $f_k(r) = r^{\pm(\frac{k\pi}{\alpha})}$. Предполагая ограниченность u , имеем следующее разложение

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)} \sin\left(\frac{k\pi\varphi}{\alpha}\right). \quad (10)$$

Рассмотрим задачу определения поля для бестоковой области Ω , изображенной на рис.4.



Предположим, что на части границы $LMNAB$ задана нормальная составляющая поля, а на $BCDFGKL$ силовые линии перпендикулярны границе.

В области Ω напряженность поля \vec{H} и индукция \vec{B} удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Рис.4

Из (11) следует, что \vec{H} можно представить в виде градиента некоторой функции $\vec{H} = \nabla u$, причем u удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$. Потенциал u на границе $BCDFGKL$ равен нулю, а на $LMNAB$ задается нормальная производная u (рис.4). Для решения этой задачи используется интегральное уравнение (8). На части грани-

цы, где известно значение u , (8) рассматривается как интегральное уравнение относительно $\frac{\partial u}{\partial n_x}$. И наоборот, там, где известно $\frac{\partial u}{\partial n_x}$, (8) рассматривается как уравнение относительно u . Аналогично

при дискретизации (8) использовался метод коллокации с кусочно-линейными элементами для аппроксимации u , $\frac{\partial u}{\partial n_x}$ на границе Ω , исключая угловые точки C, D, F, G, K . Для аппроксимации $\frac{\partial u}{\partial n_x}$ в этих точках применялись элементы, использованные в [4], с учетом разложения (10). Проиллюстрируем вид этих элементов на примере точки D (рис.4). Пусть t_{-2}, t_{-1}, t_1, t_2 - узлы дискретизации, соседние с $\mathcal{D}(t_0)$ (рис.5).

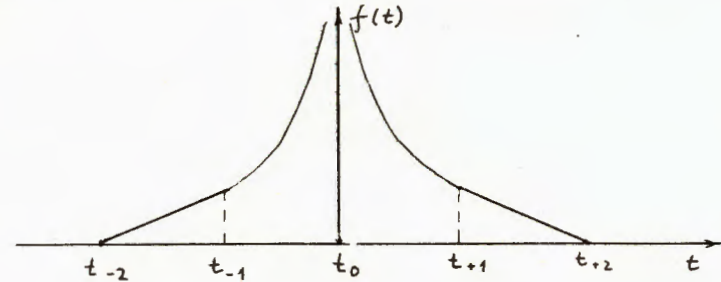


Рис.5

Тогда $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} |t-t_0|^{\frac{1}{\alpha}-1} & t_2 \leq t \leq t_1, t \neq t_0 \\ |t_1-t_0|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{t-t_2}{t_1-t_2} & t_2 \leq t \leq t_1, \\ |t_1-t_0|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{t-t_2}{t_1-t_2} & t_1 \leq t \leq t_2, \end{cases}$$

где α есть $\angle CDF$ (в данном случае он больше π).

Численные расчеты показали, что при использовании уравнения (8) для вычисления потенциала в точках L, M, A происходит разрыв потенциала в этих точках. Эти точки характерны тем, что в них происходит разрыв нормали, а в связи с этим терпит разрыв в этих точках ядро интегрального оператора $\frac{\partial}{\partial n_x} e_n |\bar{x}-\bar{a}|$. Для записи дискретизированного уравнения в этих точках можно использовать следующие соображения. Рассмотрим их на примере точки A (рис.6).

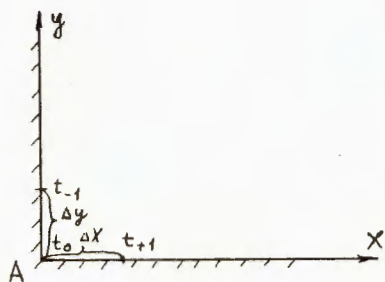


Рис.6

Пусть значения потенциала u в узлах t_{-1}, t_0, t_{+1} будут соответственно u_{-1}, u_0, u_{+1} .

В узле t_0 известны производные u сразу по двум направлениям

$$\frac{\partial u}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Рассмотрим разложение u в ряд Тейлора в окрестности узла t_0 .

$$u_{-1} = u_0 + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Delta y^2 + O(\Delta y^3),$$

$$u_{+1} = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2 + O(\Delta x^3).$$

Пренебрегая членами третьего порядка малости и учитывая гармоничность u , получаем следующее уравнение:

$$u_0 = \frac{u_{-1} \Delta x^2 + u_{+1} \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} - \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y \right),$$

которое и использовалось при расчетах. Аналогично записываются уравнения для узлов L и M .

3. Результаты численных расчетов

На основе методов, изложенных в разделах 1,2, были созданы комплексы программ расчета магнитостатических полей. Эти программы использовались для расчета полей синхрофазотрона. Для оценки точности вычислений был проведен расчет магнитного поля в области края вакуумной камеры ускорителя (рис.1). Для магнита синхрофазотрона при индукции в центре вакуумной камеры $I \text{ Т}$ точность расчетов при разбиении границы области на 560 элементов составила 3% в сравнении с результатами измерений (рис.7).

Для создания краевого фокусирующего поля в конструкции магнита были добавлены ферромагнитные шиммы (рис.2). Результаты численного моделирования приведены на рис.8. Форма и расположение шимм выбиралось таким образом, чтобы создать поле на край вакуумной камеры 2 Т при значении индукции в центре камеры $I \text{ Т}$.

Размеры и форма соответствующих шимм даны на рис.9. На рис.10 приведено распределение силовых линий в окрестности корректирующих шимм.

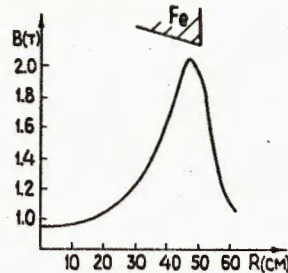
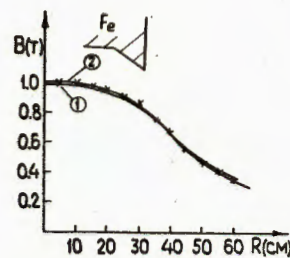


Рис.8

Рис.7. Магнитное поле на краю вакуумной камеры синхрофазотрона. 1 - расчетная кривая 2 - измеренная кривая.

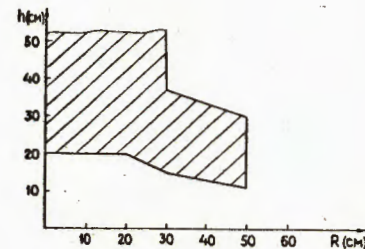


Рис.9

Таблица

N	X(см)	Y(см)	B _X (кГс)	B _Y (кГс)	B _X [~] (кГс)	B _Y [~] (кГс)
1	48.	1.	0.1704	2.0354	0.0024	2.0524
2	48.	3.	0.2735	2.2562	0.0270	2.1973
3	48.	5.	0.7995	2.6726	0.2732	2.5231
4	48.	6.	1.6420	2.7736	0.6271	2.6453
5	49.	1.	0.0931	2.0336	-0.0384	2.0336
6	49.	3.	0.0778	2.3237	-0.1088	2.2071
7	49.	5.	0.3175	3.1654	-0.0403	2.7759
8	49.	6.	1.0651	4.2159	0.4746	3.2889
9	50.	1	0.0061	1.9844	-0.0750	1.9755
10	50.	3	-0.1573	2.2828	-0.2584	2.1351
11	50.	5	-0.5424	3.1546	-0.6667	2.7283
12	50	6	-1.7073	4.9692	-14.02	21.815
13	51	1	-0.0848	1.8927	-0.1048	1.8815
14	51	3	-0.3592	2.1321	-0.3712	1.9852
15	51	5	-1.0450	2.5696	-9760	2.1778

N - номер точки; X, Y - координаты точек B_X, B_Y, B_X[~], B_Y[~] - компоненты поля, рассчитанные с учетом угловых особенностей и без учета угловых особенностей соответственно.

В таблице приведены результаты расчета поля без учета угловых особенностей и с учетом угловых особенностей.

Из таблицы видно, что значения магнитной индукции в окрестности угловых точек без учета угловых особенностей достигают аномально больших значений (14 кГс и 21 кГс). С учетом особенностей расчеты дают 1,7 кГс и 4,9 кГс соответственно.

Предполагая, что нелинейные эффекты существенно не изменяют картину распределения поля, можно сделать следующий вывод.

Введение в вакуумную камеру синхрофазотрона фокусирующим шимм, размеры и форма которых были рассчитаны в данной работе, позволяет получить в магните ускорителя линейно растущее по радиусу поле, обеспечивающее фокусировку пучка в горизонтальной плоскости.

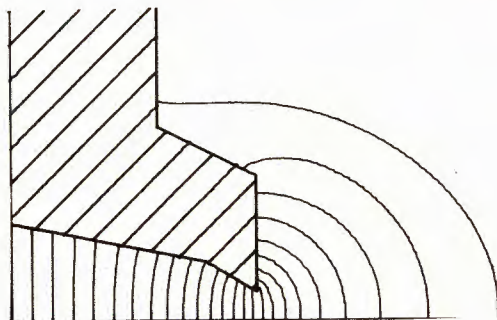


Рис. 10

Литература

1. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. "Мир", М., 1977.
2. Birkhoff G. Angular Singularities of elliptic problems, J. Approx Th., 6, 1972.
3. Kellogg B. Singularities in interface problems. SYNSPADE, 1971, p. 351-400.
4. Акишин П.Г., Жидков Е.П. ОИЯИ, ПИ-82-702, Дубна, 1982.
5. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Кудашев О.И. ОИЯИ, ПИ-82-659, Дубна, 1982.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1985 года.

Акишин П.Г. и др.

PII-85-973

Численное моделирование магнитных полей синхрофазотрона для фокусировки пучка второго направления медленного вывода

Методом граничных интегральных уравнений рассчитано распределение магнитного поля, создаваемого в области края камеры синхрофазотрона. С помощью численного моделирования на ЭВМ были выбраны размеры и форма ферромагнитных шимм, которые создают требуемое линейно растущее поле на краю рабочей области. Полученное распределение индукции позволяет получить в магните ускорителя поле, обеспечивающее фокусировку выведенного пучка в горизонтальной плоскости.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Akishin P.G. et al

PII-85-973

Numerical Simulation of the Synchrotron Magnetic Fields for Focusing the Slow Extraction Second Direction Beam

Using the method of boundary integral equations, the distributions of a fringing magnetic field is calculated in the chamber of the synchrotron. The size and shape of ferromagnetic shims, which induce a required linearly increasing field at the edge of the operating region, are chosen by numerical simulation on a computer. The induced distribution makes it possible to obtain in the accelerator magnet a field which provides the focusing of an extracted beam in the horizontal plane.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985