сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-85-932

И.В.Макрелов, Х.И.Семерджиев, С.Г.Тамбуров

МЕТОД ДЛЯ ОДНОВРЕМЕННОГО НАХОЖДЕНИЯ ВСЕХ НУЛЕЙ ДАННОГО ОБОБЩЕННОГО ПОЛИНОМА ПО ЧЕБЫШЕВСКОЙ СИСТЕМЕ

1985

Пусть задан обобщенный полином

$$P_N(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j \varphi_j(x) \tag{I}$$

по произвольной чебышевской системе базисных функций $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{N}$ с действительными или комплексными коэффициентами $\{a_j\}_{j=0}^{N}$, $a_N \neq 0$, имеющий действительные или комплексные нули $z_1, z_2, \ldots, z_m$ с кратностями $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ соответственно, $(\sum_{j=1}^{m} \beta_j = N)$, т.е.

$$P_N(z_i) = P_N'(z_i) = \cdots = P_N^{(\beta_i - 1)}(z_i) = 0,\ P_N^{(\beta_i)}(z_i) \neq 0,\ i = 1,2,\ldots,m. \tag{2}$$

В ряде частных случаев задача о нахождении всех нулей полинома (I) решена достаточно полно. Здесь остановимся только на методах, имеющих кубическую скорость сходимости. Для индивидуального поиска какого-нибудь простого нуля функции $f(x)$ Обрешков[1,2] предлагает метод

$$x^{[K+1]} = x^{[K]} - f(x^{[K]}) / [f'(x^{[K]}) - \tfrac{1}{2} f(x^{[K]}) f''(x^{[K]}) / f'(x^{[K]})], \tag{3}$$

$$K = 0, 1, 2, \ldots .$$

В случае, когда $f(x)$ - алгебраический полином, т.е. имеет вид (I) с $\varphi_j(x) = x^j$, $j = 0,1,2,\ldots,N$, весьма эффективный аналог метода (3) для одновременного нахождения всех нулей полинома $P_N(x)$ (если они простые) предложил Эрлих[7]. Его метод можно записать в виде[3]

$$x_i^{[K+1]} = x_i^{[K]} - P_N(x_i^{[K]}) / [P_N'(x_i^{[K]}) - \tfrac{1}{2} P_N(x_i^{[K]}) Q_K''(x_i^{[K]}) / Q_K'(x_i^{[K]})] \tag{4}$$

$$i = 1, 2, \ldots, N; \quad K = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $Q_K(x) = \prod_{j=1}^{N} (x - x_j^{[K]})$.

Метод Эрлиха (4) имеет более широкую область сходимости, чем метод (3), зарекомендовал себя как один из лучших и вызвал ряд дальнейших его модификаций. В случаях тригонометрических и экспоненциальных полиномов (простые нули) в работе[3] разработаны аналоги метода (4). Несомненный интерес представляет обобщение метода Эрлиха для полинома (I) в случае, когда $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{N}$ - произвольная чебышевская система. Обобщение такого рода нам удалось получить в случае, когда все нули полинома (I) простые. Оказывается, однако, что, следуя методике, развитой в[6], где рассматривается метод с квадратической скоростью сходимости для одновременного нахождения всех нулей полинома (I), метод (4) можно еще обобщить и на случай нулей произвольной кратности.

В этой работе мы предлагаем новый метод для одновременного приближенного нахождения всех нулей полинома (I), который по своей вычислительной трудоемкости соизмерим с методом[6], так как при его применении нет необходимости в перенормировке полинома (I), но зато имеет более высокую (кубическую) скорость сходимости. Настоящий метод можно считать обобщением метода Эрлиха (4) в двух направлениях: первое – произвольность чебышевской системы $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{N}$ и второе – произвольная кратность нулей полинома по этой системе. Вопрос об определении кратностей нулей обобщенного полинома остается открытым. Отметим только, что в важном частном случае алгебраического полинома в работе[4] предложен простой и эффективный метод для определения кратностей его нулей по его коэффициентам.

Для краткости введем обозначения:

$$M\begin{bmatrix}\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_N\\ x,\ z_1,\dots,z_m\\ 1,\ \beta_1,\dots,\beta_m\end{bmatrix} \overset{def}{=} \left|\begin{array}{cccc}\varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \dots\dots & \varphi_N(x)\\ \varphi_0(z_1) & \varphi_1(z_1) & \dots\dots & \varphi_N(z_1)\\ \varphi_0'(z_1) & \varphi_1'(z_1) & \dots\dots & \varphi_N'(z_1)\\ \varphi_0^{(\beta_1-1)}(z_1) & \varphi_1^{(\beta_1-1)}(z_1) & \dots & \varphi_N^{(\beta_1-1)}(z_1)\\ \varphi_0(z_m) & \varphi_1(z_m) & \dots & \varphi_N(z_m)\\ \varphi_0'(z_m) & \varphi_1'(z_m) & \dots & \varphi_N'(z_m)\\ \varphi_0^{(\beta_m-1)}(z_m) & \varphi_1^{(\beta_m-1)}(z_m) & \dots & \varphi_N^{(\beta_m-1)}(z_m)\end{array}\right| ,$$

$$D\begin{bmatrix}\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_N\\ x,\ z_1,\dots,z_m\\ 1,\ \beta_1,\dots,\beta_m\end{bmatrix} = \det\ M\begin{bmatrix}\varphi_0,\ \varphi_1,\ \dots,\ \varphi_N\\ x,\ z_1,\ \dots,\ z_m\\ 1,\ \beta_1,\ \dots,\ \beta_m\end{bmatrix} .$$

Итак, рассмотрим следующий метод

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - P_N^{(\beta_i-1)}(x_i^{[k]})\left[P_N^{(\beta_i)}(x_i^{[k]}) - \frac{1}{2}P_N^{(\beta_i-1)}(x_i^{[k]})\frac{Q_k^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]})}{Q_k^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})}\right]^{-1} \tag{5}$$

$$i = 1,2,\dots,m, \qquad k = 0,1,2,\dots,$$

где $x_i^{[k]}$ – k -тое приближение к i -тому нулю z_i полинома (I), а $Q_k(x)$ – обобщенный полином порядка N по этой же системе $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{N}$, который представлен в виде

$$Q_k(x) = D\begin{bmatrix}\varphi_0,\ \varphi_1,\ \dots,\ \varphi_N\\ x,\ x_1^{[k]},\dots,x_m^{[k]}\\ 1,\ \beta_1,\ \dots,\ \beta_m\end{bmatrix} . \tag{6}$$

Очевидно, $Q_k(x)$ имеет в качестве нулей числа $x_1^{[k]}, x_2^{[k]},\dots,x_m^{[k]}$ с кратностями $\beta_1, \beta_2,\dots,\beta_m$ соответственно. Предполагаем также, что базисные функции $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{N}$ – достаточно гладкие.

При $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 1$ и $\varphi_j(x) = x^j$, $j = 0,1,\dots,N$ обобщенный полином $Q_k(x)$ (6) является определителем Вандермонда и из (5) получается метод Эрлиха (4).

Формула (5) удобна для практического применения метода. Для обоснования его сходимости, однако, необходимо (5) преобразовать в более удобную форму. Именно, из обеих частей (5) вычитаем z_i и используем, что выполняются (2). Тогда (5) записывается следующим образом:

$$x_i^{[k+1]} - z_i = x_i^{[k]} - z_i - \left[P_N^{(\beta_i-1)}(x_i^{[k]}) - P_N^{(\beta_i-1)}(z_i)\right]\left[P_N^{(\beta_i)}(x_i^{[k]}) - \frac{1}{2}P_N^{(\beta_i-1)}(x_i^{[k]})\frac{Q_k^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]})}{Q_k^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})}\right]^{-1}. \tag{7}$$

К разности $P_N^{(\beta_i-1)}(x_i^{[k]}) - P_N^{(\beta_i-1)}(z_i)$ применяем теорему о конечных приращениях и выделяем справа в (7) общий множитель $x_i^{[k]} - z_i$. Тогда (7) преобразуется к виду

$$x_i^{[k+1]} - z_i = (x_i^{[k]} - z_i)\left\{1 - P_N^{(\beta_i)}(\xi_i^{[k]})\left[P_N^{(\beta_i)}(x_i^{[k]}) - \frac{1}{2}P_N^{(\beta_i-1)}(x_i^{[k]})\frac{Q_k^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]})}{Q_k^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})}\right]^{-1}\right\}, \tag{8}$$

где $\xi_i^{[k]} \in (x_i^{[k]}, z_i)$, $i = 1,2,\dots,m$.

Используя еще раз (2),(8) можем записать следующим образом:

$$x_i^{[k+1]} - z_i = (x_i^{[k]} - z_i)\frac{2Q_k^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})\left[P_N^{(\beta_i)}(x_i^{[k]}) - P_N^{(\beta_i)}(\xi_i^{[k]})\right] - Q_k^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]})\left[P_N^{(\beta_i-1)}(x_i^{[k]}) - P_N^{(\beta_i-1)}(z_i)\right]}{2Q_k^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})P_N^{(\beta_i)}(x_i^{[k]}) - Q_k^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]})\left[P_N^{(\beta_i-1)}(x_i^{[k]}) - P_N^{(\beta_i-1)}(z_i)\right]}. \tag{9}$$

Применяя снова к разностям $P_N^{(\beta_i)}(x_i^{[k]}) - P_N^{(\beta_i)}(\xi_i^{[k]})$ и $P_N^{(\beta_i-1)}(x_i^{[k]}) - P_N^{(\beta_i-1)}(z_i)$ теорему о конечных приращениях, из (9) получаем

$$x_i^{[k+1]} - z_i = (x_i^{[k]} - z_i)\ \Omega_i^{[k]} / \Delta_i^{[k]}, \tag{I0}$$

где

$$\Omega_i^{[k]} = Q_k^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})P_N^{(\beta_i+1)}(\eta_i^{[k]})(x_i^{[k]} - \xi_i^{[k]}) - Q_k^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]})P_N^{(\beta_i)}(\xi_i^{[k]})(x_i^{[k]} - z_i)/2, \tag{II}$$

$$\Delta_i^{[k]} = Q_k^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})P_N^{(\beta_i)}(x_i^{[k]}) - Q_k^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]})\ P_N^{(\beta_i)}(\xi_i^{[k]})(x_i^{[k]} - z_i)/2 \tag{I2}$$

и $\eta_i^{[k]} \in (x_i^{[k]}, \xi_i^{[k]})$, $i = 1,2,\dots,m$.

В дальнейшем докажем лишь теорему о локальной сходимости метода (5). Поэтому при условиях локальности, т.е. при достаточно близких $x_i^{[k]}$ к соответствующим z_i, можем считать, что $(x_i^{[k]} - z_i)/2 \approx x_i^{[k]} - \xi_i^{[k]} \overset{def}{=} \ell_i^{[k]}$, $i = 1,2,\dots,m$ и, следовательно,

$$\Omega_i^{[k]} \approx \left[Q^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})P_N^{(\beta_i+1)}(\eta_i^{[k]}) - Q_k^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]})P_N^{(\beta_i)}(\xi_i^{[k]})\right]\ell_i^{[k]} . \tag{I3}$$

Имея в виду (6), можем записать

$$Q_K^{(\beta_i)}(x_i^{[K]})\, P_N^{(\beta_i+1)}(\eta_i^{[K]}) - Q_K^{(\beta_i+1)}(x_i^{[K]})\, P_N^{(\beta_i)}(\xi_i^{[K]}) = \tag{14}$$

$$=(-1)^{N+3}\left\{ \begin{vmatrix} \varphi_0^{(\beta_i+1)}(x_i^{[K]}) & \dots & \varphi_N^{(\beta_i+1)}(x_i^{[K]}) & P_N^{(\beta_i+1)}(\eta_i^{[K]}) \\ \varphi_0^{(\beta_i)}(x_i^{[K]}) & \dots & \varphi_N^{(\beta_i)}(x_i^{[K]}) & 0 \\ \varphi_0(x_1^{[K]}) & \dots & \varphi_N(x_1^{[K]}) & 0 \\ \varphi_0'(x_1^{[K]}) & \dots & \varphi_N'(x_1^{[K]}) & 0 \\ - & - & - & - \\ \varphi_0^{(\beta_m-1)}(x_m^{[K]}) & \dots & \varphi_N^{(\beta_m-1)}(x_m^{[K]}) & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varphi_0^{(\beta_i)}(x_i^{[K]}) & \dots & \varphi_N^{(\beta_i)}(x_i^{[K]}) & P_N^{(\beta_i)}(\xi_i^{[K]}) \\ \varphi_0^{(\beta_i+1)}(x_i^{[K]}) & \dots & \varphi_N^{(\beta_i+1)}(x_i^{[K]}) & 0 \\ \varphi_0(x_1^{[K]}) & \dots & \varphi_N(x_1^{[K]}) & 0 \\ \varphi_0'(x_1^{[K]}) & \dots & \varphi_N'(x_1^{[K]}) & 0 \\ - & - & - & - \\ \varphi_0^{(\beta_m-1)}(x_m^{[K]}) & \dots & \varphi_N^{(\beta_m-1)}(x_m^{[K]}) & 0 \end{vmatrix} \right\}.$$

В первом определителе в (14) умножаем первые $N+1$ - столбец на $-a_0, -a_1, \dots, -a_N$ соответственно и добавляем их к последнему, $N+2$ -му столбцу, а во втором определителе - меняем места двух первых строк, и, таким образом, правую часть (14) можно записать в виде одного только определителя:

$$(-1)^{N+3} \begin{vmatrix} \varphi_0^{(\beta_i+1)}(x_i^{[K]}) & \dots & \varphi_N^{(\beta_i+1)}(x_i^{[K]}) & P_N^{(\beta_i+1)}(\eta_i^{[K]}) - P_N^{(\beta_i+1)}(x_i^{[K]}) \\ \varphi_0^{(\beta_i)}(x_i^{[K]}) & \dots & \varphi_N^{(\beta_i)}(x_i^{[K]}) & P_N^{(\beta_i)}(\xi_i^{[K]}) - P_N^{(\beta_i)}(x_i^{[K]}) \\ \varphi_0(x_1^{[K]}) & \dots & \varphi_N(x_1^{[K]}) & P_N(z_1) - P_N(x_1^{[K]}) \\ \varphi_0'(x_1^{[K]}) & \dots & \varphi_N'(x_1^{[K]}) & P_N'(z_1) - P_N'(x_1^{[K]}) \\ - & - & - & - \\ \varphi_0^{(\beta_m-1)}(x_m^{[K]}) & \dots & \varphi_N^{(\beta_m-1)}(x_m^{[K]}) & P_N^{(\beta_m-1)}(z_m) - P_N^{(\beta_m-1)}(x_m^{[K]}) \end{vmatrix}, \tag{15}$$

где снова использовали (2). Ко всем разностям последнего столбца (15) применяем теорему о конечных приращениях и он преобразуется к виду

$$\Big\{P_N^{(\beta_i+2)}(\zeta_i^{[K]})(\eta_i^{[K]}-x_i^{[K]}),\ P_N^{(\beta_i+1)}(\eta_i^{[K]})(\xi_i^{[K]}-x_i^{[K]}),\ P_N'(\xi_{11}^{[K]})(z_1-x_1^{[K]}), \dots, P_N^{(\beta_1)}(\xi_{1\beta_1}^{[K]})(z_1-x_1^{[K]}),$$

$$, \dots, P_N'(\xi_{m1}^{[K]})(z_m-x_m^{[K]}), \dots, P_N^{(\beta_m)}(\xi_{m\beta_m}^{[K]})(z_m-x_m^{[K]})\Big\}^T,$$

где $\zeta_i^{[K]} \in (\eta_i^{[K]}, x_i^{[K]})$, $\xi_{i\ell}^{[K]} \in (z_i, x_i^{[K]})$, $i=1,2,\dots,m$; $\ell=1,2,\dots,\beta_i$.

Таким образом, используя преобразованный определитель (15), окончательно получаем, что

$$|\Omega_i^{[K]}| \le |x_i^{[K]} - z_i| \left| \begin{vmatrix} \varphi_0^{(\beta_i+1)}(x_i^{[K]}) & \dots & \varphi_N^{(\beta_i+1)}(x_i^{[K]}) & P_N^{(\beta_i+2)}(\zeta_i^{[K]})(\eta_i^{[K]}-x_i^{[K]}) \\ \varphi_0^{(\beta_i)}(x_i^{[K]}) & \dots & \varphi_N^{(\beta_i)}(x_i^{[K]}) & P_N^{(\beta_i+1)}(\eta_i^{[K]})(\xi_i^{[K]}-x_i^{[K]}) \\ \varphi_0(x_1^{[K]}) & \dots & \varphi_N(x_1^{[K]}) & P_N'(\xi_{11}^{[K]})(z_1-x_1^{[K]}) \\ \varphi_0'(x_1^{[K]}) & \dots & \varphi_N'(x_1^{[K]}) & P_N''(\xi_{12}^{[K]})(z_1-x_1^{[K]}) \\ - & - & - & - \\ \varphi_0^{(\beta_m-1)}(x_m^{[K]}) & \dots & \varphi_N^{(\beta_m-1)}(x_m^{[K]}) & P_N^{(\beta_m)}(\xi_{m\beta_m}^{[K]})(z_m-x_m^{[K]}) \end{vmatrix} \right|. \tag{16}$$

Лемма: Пусть

$$L(C) = \min_{i=1,2,\dots,m}\ \inf_{\substack{|y_j-z_j|<C \\ j=1,2,\dots,m}} \left| \frac{d^{\beta_i}}{dx^{\beta_i}} \left\{ D\begin{bmatrix} \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N \\ x, y_1, \dots, y_m \\ 1, \beta_1, \dots, \beta_m \end{bmatrix} \right\}_{x=y_i} \right|. \tag{17}$$

При достаточно малом $C>0$ величина $L(C)$ строго положительна.

Доказательство: Определитель в (17) как непрерывная функция от своих элементов, при достаточно близких y_j к z_j, $j=1,2,\dots,m$, достаточно близок к определителю

$$\frac{d^{\beta_i}}{dx^{\beta_i}} \left\{ D\begin{vmatrix} \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N \\ x, z_1, \dots, z_m \\ 1, \beta_1, \dots, \beta_m \end{vmatrix} \right\}_{x=z_i}. \tag{18}$$

Определитель (18), со своей стороны, представляет производную порядка β_i некоторого обобщенного полинома по системе $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^N$, совпадающего с $P_N(x)$ с точностью до ненулевого множителя

$$a_N / D\begin{vmatrix} \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1} \\ z_1, z_2, \dots, z_m \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \end{vmatrix}, \qquad \text{так как } a_N \ne 0$$

и система $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^N$ - чебышевская. Доказательство леммы завершается применением (2).

Теорема: Пусть $\beta = \max_{i=1,2,\dots,m} \beta_i$ и чебышевская система $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^N$ состоит из достаточно гладких функций. Пусть $|\varphi_j^{(\ell)}(x)| \le M_{j\ell}$,

$\ell = 0, 1, 2, \ldots, \beta + 2$. Пусть $0 < q < 1$, $0 < c < 1$ и константа C выбрана достаточно малой, чтобы выполнялись неравенства

$$N(c) \stackrel{def}{=} L^2(c) - c\left\{\left(\sum_{\tau=0}^{N} |a_\tau| M_{\tau\beta}\right)\left[\prod_{S=0}^{N}\left(M^2_{S(\beta+1)} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{K=0}^{\beta_i - 1} M^2_{SK}\right)\right]^{1/2}\right\} > 0, \tag{I9}$$

$$K(c) \stackrel{def}{=} c^2 \left\{\prod_{S=0}^{N}\left(M^2_{S(\beta+1)} + M^2_{S\beta} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{K=0}^{\beta_i-1} M^2_{SK}\left[\left(\sum_{\tau=0}^{N}|a_\tau| M_{\tau(\beta+2)}\right)^2 + \right.\right.\right. \tag{20}$$

$$\left.\left.\left. + \left(\sum_{\tau=0}^{N} |a_\tau| M_{\tau(\beta+1)}\right)^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{K=0}^{\beta_i-1}\left(\sum_{\tau=0}^{N}|a_\tau| M_{\tau K}\right)^2\right]\right\}^{1/2} < N(c),$$

где величина $L(c)$ определяется формулой (I7).

Тогда, если начальные приближения $x_i^{[0]}$ удовлетворяют неравенствам

$$|x_i^{[0]} - z_i| \leq cq, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{2I}$$

то для каждого $K = 0, 1, 2, \ldots$ выполняются и неравенства

$$|x_i^{[K]} - z_i| \leq cq^{3^K}, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{22}$$

Доказательство: Так как $0 < q < 1$ и c достаточна малая, то, согласно лемме, $L(c) > 0$. Доказательство неравенств (22) проведем методом математической индукции. При $K = 0$ (22) совпадают с (2I). Пусть (22) выполняются при некотором целом $K \geq 0$. Следовательно, $|x_i^{[K]} - z_i| \leq c$, $i = 1, 2, \ldots, m$ и, используя (I7), находим

$$|Q_K^{(\beta_i)}(x_i^{[K]})| \geq L(c) > 0, \quad |P_N^{(\beta_i)}(x_i^{[K]})| \geq L(c) > 0. \tag{23}$$

Далее, используя неравенство Адамара

$$|\det(b_{ij})^n_{i,j=1}| \leq \left\{\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b^2_{ij}\right\}^{1/2}$$

и факт, что $\xi_{i\ell}^{[K]}, \eta_i^{[K]}, \zeta_i^{[K]} \in (x_i^{[K]}, z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $\ell = 1, 2, \ldots, \beta_i$, а также неравенства (22)-(23), получаем оценки

$$|\Delta_i^{[K]}| \geq \left|\,|Q_K^{(\beta_i)}(x_i^{[K]})||P_N^{(\beta_i)}(x_i^{[K]})| - |Q_K^{(\beta_i+1)}(x_i^{[K]})||P_N^{(\beta_i)}(\xi_{ij}^{[K]})||x_i^{[K]} - z_i|/2\,\right| \geq N(c),$$

$$i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \beta_i - 1, \tag{24}$$

$$|\Omega_i^{[K]}| \leq (cq^{3^K})^2 \cdot K(c), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{25}$$

Тогда из (I0), (I9), (20), (22), (24) и (25) окончательно находим

$$|x_i^{[K+1]} - z_i| \leq cq^{3^{K+1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим несколько численных примеров, рассчитанных на ЭВМ ЕС I020 с двойной точностью (I6 дес.зн.). В таблицах принята сокращенная запись чисел. Например, I.(4ж0)39 надо понимать как I.000039.

Пример I. Для алгебраического полинома

$$P_6(x) = x^6 - 6x^5 + 50x^3 - 45x^2 - 108x + 108,$$

имеющего нули $z_1 = -2$, $z_2 = 1$ и $z_3 = 3$ с кратностями $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ и $\beta_3 = 3$ соответственно, начальные и последовательные приближения, полученные методом (5), представлены в табл.I.

Таблица I

K	$x_1^{[K]}$	$x_2^{[K]}$	$x_3^{[K]}$
0	-3.00	0.I00	4.00
I	-I.8I379	I.03533	2.90799
2	-2.00224	I.(4 ж 0)39	3.00045
3	-I.(8 ж 9)67	I.(I2ж 0)25	2.(I0 ж 9)79
4	-2.(I5ж 0)	I.(I5ж 0)	3.(I4 ж 0)I

Пример 2. Для тригонометрического полинома

$$T_3(x) = \left(\sin\frac{x-2}{2}\right)^2 \sin\frac{x-2,5}{2}\left(\sin\frac{x-1}{2}\right)^3$$

результаты вычислительного эксперимента представлены в табл.2.

Таблица 2

K	$x_1^{[K]}$	$x_2^{[K]}$	$x_3^{[K]}$
0	I.9	2.6	I.I
I	I.9946I	2.5032I	0.99I2I
2	2.(5ж0)I35	2.5(5ж0)585	I.(5ж0)692
3	2.(I4ж0)8	2.5(I4ж0)	0.(I3ж9)7
4	2.(I5ж0)	2.5(I4ж0)	I.(I5ж0)

Пример 3. По базисной системе функций $\{1, x^2, \sin 3x, e^{-x}, 1/(1+x^2)\}$ был построен обобщенный полином, имеющий в качестве двукратных нулей числа $z_1 = -0.5$ и $z_2 = 3$. Начальные и несколько последующих приближений приводятся в табл.3.

Таблица 3

K	$X_1^{[K]}$	$X_2^{[K]}$
0	-0.4	2.8
I	-0.502I054	2.9677I06
2	-0.5(6*0)8I	2(3*9)35
3	-0.5(I5*0)	2.(8*9)I5
4	-0.5(I5*0)	3.(I6*0)

Литература

I. Обрешков Н. Висша алгебра. "Наука и изкуство". София, I958.
2. Обрешков Н. Год на соф. у-тет, физ.-мат.фак. т.56, кн.I, I963,с.73-83.
3. Макрелов И.В., Семерджиев Х.И. Докл.БАН, т.36, № 7, I983,с.879-882.
4. Семерджиев Х.И., Тамбуров С.Г. Докл.БАН, т.37, № 9,I984, с.II43-II45.
5. Макрелов И.В., Семерджиев Х.И. Докл.БАН, т.38, № IO, I985.
6. Семерджиев Х.И., Тамбуров С.Г. ОИЯИ, PII-85-931, Дубна, I985.
7. Ehrlich L.W. Comm. ACM, v. 10, No.2, I967, p.I07-I08.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 декабря I985 года.

Макрелов И.В., Семерджиев Х.И., Тамбуров С.Г. P11-85-932
Метод для одновременного нахождения всех нулей данного обобщенного полинома по чебышевской системе

Предлагается новый метод для одновременного нахождения всех нулей произвольной кратности заданного обобщенного полинома по произвольной чебышевской системе. Метод можно рассматривать как обобщение известного метода Эрлиха, относящегося лишь к простым нулям данного алгебраического полинома. Доказана кубическая скорость сходимости метода и приведены численные примеры его реализации на ЭВМ.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Makrelov I., Semerdzhiev Kh., Tamburov S. P11-85-932
Method for Simultaneous Finding of All Zeros of a Given Generalized Polynomial Over Chebyshev System

A new method for simultaneous finding of all zeros of arbitrary multiplicities of a generalized polynomial is proposed. The method can be considered as a generalization of well known Ehrlich's method which is related to the case when the polynomial is algebraic and its zeros are simple. The cubic convergence of the method is proved. There are some numerical examples performed on the computer.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985