сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-85-931

Х.И.Семерджиев, С.Г.Тамбуров

МЕТОД ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВСЕХ НУЛЕЙ ОБОБЩЕННОГО ПОЛИНОМА ПО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЧЕБЫШЕВСКОЙ СИСТЕМЕ

1985

Пусть задан обобщенный полином

$$P_N(x) \equiv \varphi_N(x) + \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varphi_k(x) \quad , \tag{I}$$

где $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{N}$ является чебышевской системой на промежутке $[a,b]$. Основные свойства чебышевских систем представлены достаточно полно в /I,2/. Не ограничивая общности, считаем, что коэффициент перед $\varphi_N(x)$ равен единице. Задача о нахождении нулей полинома (I) в промежутке $[a,b]$ ставится просто, но при ее решении встречаются значительные трудности, вытекающие, главным образом, из нелинейности полинома (I). В случае, когда система $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{N}$ является алгебраической, тригонометрической и экспоненциальной в работах /3–6/ разработаны методы для одновременного нахождения всех нулей полинома (I). В работе /7/ получен метод того же типа для полинома (I) в случае произвольной чебышевской системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{N}$, но когда все его нули $z_1, z_2, \ldots, z_N$ простые. Оказывается, что когда функции $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{N}$ достаточно гладкие, метод /7/ можно обобщить и на случай, когда кратности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ нулей $z_1, z_2, \ldots, z_m$ полинома (I) произвольные – $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = N$. Поэтому здесь представим обобщенный вариант.

Для краткости введем обозначения:

$$M\begin{bmatrix} \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N \\ x, z_1, \ldots, z_m \\ 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_N(x) \\ \varphi_0(z_1) & \varphi_1(z_1) & \ldots & \varphi_N(z_1) \\ \varphi_0'(z_1) & \varphi_1'(z_1) & \ldots & \varphi_N'(z_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_0^{(\alpha_1-1)}(z_1) & \varphi_1^{(\alpha_1-1)}(z_1) & \ldots & \varphi_N^{(\alpha_1-1)}(z_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_0(z_m) & \varphi_1(z_m) & \ldots & \varphi_N(z_m) \\ \varphi_0'(z_m) & \varphi_1'(z_m) & \ldots & \varphi_N'(z_m) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_0^{(\alpha_m-1)}(z_m) & \varphi_1^{(\alpha_m-1)}(z_m) & \ldots & \varphi_N^{(\alpha_m-1)}(z_m) \end{vmatrix},$$

$$D\begin{bmatrix} \varphi_0, & \varphi_1, & \ldots, & \varphi_N \\ x, & z_1, & \ldots, & z_m \\ 1, & \alpha_1, & \ldots, & \alpha_m \end{bmatrix} = \det M\begin{bmatrix} \varphi_0, & \varphi_1, & \ldots, & \varphi_N \\ x, & z_1, & \ldots, & z_m \\ 1, & \alpha_1, & \ldots, & \alpha_m \end{bmatrix}.$$

В работе /4/ для определения всех нулей полинома (I) в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 1$ предложен итерационный метод

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - P_N(x_i^{[k]}) / Q'_k(x_i^{[k]}) , \qquad i=1,2,\dots,N, \quad k=0,1,2,\dots, \tag{2}$$

где $Q_k(x)$ – обобщенный полином по заданной же чебышевской системе базисных функций, имеющий коэффициент перед $\varphi_N(x)$, равный единице, и в качестве нулей числа $x_1^{[k]}, x_2^{[k]}, \dots, x_N^{[k]}$. Начальные приближения $x_1^{[0]}, x_2^{[0]}, \dots, x_N^{[0]}$, вообще говоря, произвольные различные числа из промежутка $[a,b]$. Но в /4,5/ удалось получить конкретные вычислительные схемы и обосновать их сходимости только для случая алгебраической, тригонометрической и экспоненциальной систем. Здесь укажем на вычислительную схему в общем случае. При этом метод легче реализуется на ЭВМ по сравнению с методами /3,5/.

Итак, рассмотрим следующий итерационный процесс

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - (-1)^N P_N^{(\alpha_i-1)}(x_i^{[k]}) / Q_k^{(\alpha_i)}(x_i^{[k]}) , \tag{3}$$

$$i=1,2,\dots,m , \quad k=0,1,2,\dots ,$$

где

$$Q_k(x) = D\begin{bmatrix}\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N \\ x, x_1^{[k]}, \dots, x_m^{[k]} \\ 1, \alpha_1, \dots, \alpha_m\end{bmatrix} / \det B_k ,$$

$$B_k = M\begin{bmatrix}\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1} \\ x_1^{[k]}, x_2^{[k]}, \dots, x_m^{[k]} \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\end{bmatrix} .$$

Для нахождения производной $Q_k^{(\alpha_i)}(x)$ достаточно дифференцировать α_i раз первую строку определителя в числителе $Q_k(x)$.

Теперь преобразуем (3) к виду, удобному для доказательства теоремы сходимости. Если в (3) вычесть из обеих сторон равенства точный корень z_i и использовать, что $P_N^{(\alpha_i-1)}(z_i)=0$ при $i=1,2,\dots,m$, получаем

$$x_i^{[k+1]} - z_i = x_i^{[k]} - z_i - (-1)^N \left[P_N^{(\alpha_i-1)}(x_i^{[k]}) - P_N^{(\alpha_i-1)}(z_i)\right] / Q_k^{(\alpha_i)}(x_i^{[k]}) . \tag{4}$$

Применяя теорему о конечных приращениях, (4) преобразуем к виду

$$x_i^{[k+1]} - z_i = (x_i^{[k]} - z_i)\left[1 - (-1)^{N+2} P_N^{(\alpha_i)}(\xi_i^{[k]}) / Q_k^{(\alpha_i)}(x_i^{[k]})\right] =$$

$$= (x_i^{[k]} - z_i)\left\{1 - \det\left|\begin{array}{c|c} \varphi_0^{(\alpha_i)}(x_i^{[k]})\ \varphi_1^{(\alpha_i)}(x_i^{[k]}) \dots \varphi_{N-1}^{(\alpha_i)}(x_i^{[k]}) & P_N^{(\alpha_i)}(\xi_i^{[k]}) \\ \hline & 0 \\ B_k & \vdots \\ & 0 \end{array}\right| / R_k^{(\alpha_i)}(x_i^{[k]})\right\} , \tag{5}$$

где

$$R_k(x) = Q_k(x) \cdot \det B_k , \qquad \xi_i^{[k]} \in (x_i^{[k]}, z_i) , \quad i=1,2,\dots,m . \tag{6}$$

Определитель в числителе правой части (5) преобразуем следующим образом: умножаем первые N столбцов соответственно на $-a_0, -a_1, \dots, -a_{N-1}$ и добавляем к $N+1$-му столбцу, который преобразуется к виду

$$\left[P_N^{(\alpha_i)}(\xi_i^{[k]}) - P_N^{(\alpha_i)}(x_i^{[k]}) + \varphi_N^{(\alpha_i)}(x_i^{[k]}), \varphi_N(x_1^{[k]}) - P_N(x_1^{[k]}), \varphi'_N(x_1^{[k]}) - P'_N(x_1^{[k]}), \dots, \varphi_N^{(\alpha_1-1)}(x_1^{[k]}) - P_N^{(\alpha_1-1)}(x_1^{[k]}), \dots, \varphi_N(x_m^{[k]}) - P_N(x_m^{[k]}), \dots, \varphi_N^{(\alpha_m-1)}(x_m^{[k]}) - P_N^{(\alpha_m-1)}(x_m^{[k]})\right]^T .$$

Теперь выражение в фигурных скобках можно записать в виде

$$\det\left|\begin{array}{c|c} \varphi_0^{(\alpha_i)}(x_i^{[k]})\ \varphi_1^{(\alpha_i)}(x_i^{[k]}) \dots \varphi_{N-1}^{(\alpha_i)}(x_i^{[k]}) & P_N^{(\alpha_i)}(x_i^{[k]}) - P_N^{(\alpha_i)}(\xi_i^{[k]}) \\ \hline & P_N(x_1^{[k]}) - P_N(z_1) \\ & P_N^{(\alpha_1-1)}(x_1^{[k]}) - P_N^{(\alpha_1-1)}(z_1) \\ B_k & P_N(x_m^{[k]}) - P_N(z_m) \\ & P_N^{(\alpha_m-1)}(x_m^{[k]}) - P_N^{(\alpha_m-1)}(z_m) \end{array}\right| / R_k^{(\alpha_i)}(x_i^{[k]}) , \tag{7}$$

где еще раз воспользовались равенствами $P_N^{(\tau)}(z_i)=0$, $i=1,2,\dots m$, $\tau=0,1,2,\dots,\alpha_i-1$. К последнему столбцу в (7) снова применяем теорему о конечных приращениях, после чего он записывается в виде

$$\Big[P_N^{(\alpha_i+1)}(\eta_i^{[K]})(x_i^{[K]}-\xi_i^{[K]}),\ P_N'(\xi_{11}^{[K]})(x_1^{[K]}-z_1),\ P_N''(\xi_{12}^{[K]})(x_1^{[K]}-z_1),\dots,P_N^{(\alpha_1)}(\xi_{1\alpha_1}^{[K]})(x_1^{[K]}-z_1),$$
$$\dots,P_N'(\xi_{m1}^{[K]})(x_m^{[K]}-z_m),\ P_N''(\xi_{m2}^{[K]})(x_m^{[K]}-z_m),\dots,P_N^{(\alpha_m)}(\xi_{m\alpha_m}^{[K]})(x_m^{[K]}-z_m)\Big]^T,$$

где $\eta_i^{[K]}\in(x_i^{[K]},\xi_i^{[K]})$, откуда следует, что $\eta_i^{[K]}\in(x_i^{[K]},z_i)$, а $\xi_{i\ell}^{[K]}\in(x_i^{[K]},z_i)$, $i=1,2,\dots,m$, $\ell=1,2,\dots,\alpha_i$.

Таким образом, метод (3) представляется в форме

$$x_i^{[K+1]}-z_i=(x_i^{[K]}-z_i)\det\left|\begin{array}{c:c} \varphi_0^{(\alpha_i)}(x_i^{[K]})\dots\varphi_{N-1}^{(\alpha_i)}(x_i^{[K]}) & P_N^{(\alpha_i+1)}(\eta_i^{[K]})(x_i^{[K]}-\xi_i^{[K]}) \\ \hdashline & P_N'(\xi_{11}^{[K]})(x_1^{[K]}-z_1) \\ \cdashline{2-2} B_K & P_N'(\xi_{m1}^{[K]})(x_m^{[K]}-z_m) \\ \cdashline{2-2} & \vdots \\ & P_N^{(\alpha_m)}(\xi_{m\alpha_m}^{[K]})(x_m^{[K]}-z_m) \end{array}\right| \Big/ R_K^{(\alpha_i)}(x_i^{[K]}). \tag{8}$$

Квадратическая сходимость метода (8) устанавливается следующей теоремой.

Теорема. Пусть $0<c<1$, $0<q<1$ и

$$L(c)=\min_{i=1,2,\dots,m}\ \inf_{|y_i-z_i|\le cq}\left|\frac{d^{\alpha_i}}{dx^{\alpha_i}}\left\{D\begin{bmatrix}\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_N\\ x,\ y_1,\dots,y_m\\ 1,\ \alpha_1,\dots,\alpha_m\end{bmatrix}\right\}_{x=y_i}\right|. \tag{9}$$

Кроме того, пусть существуют производные $\varphi_s^{(\alpha_i+1)}(x)$, $i=1,2,\dots,m$ и константы $M_{s\tau}$, такие, что

$$|\varphi_s^{(\tau)}(x)|\le M_{s\tau} \tag{10}$$

для каждого $x\in[a,b]$, $s=0,1,2,\dots,N$, $\tau=0,1,\dots,\max\limits_{1\le i\le m}(\alpha_i+1)$.

Пусть c выбрано таким образом, чтобы удовлетворялись неравенства

$$c\left\{\prod_{\tau=0}^{N-1}\Big(M_{\tau,\alpha_i}^2+\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=0}^{\alpha_s-1}M_{\tau j}^2\Big)\cdot\Big[\Big(M_{N,\alpha_i+1}+\sum_{j=0}^{N-1}|a_j|M_{j,\alpha_i+1}\Big)^2+\right.$$
$$\left.+\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{\alpha_s}\Big(M_{Nj}+\sum_{\ell=0}^{N-1}|a_\ell|M_{\ell j}\Big)^2\Big]\right\}^{1/2}<L(c), \tag{11}$$

$i=1,2,\dots,m$.

Тогда, если начальные приближения выбраны так, чтобы выполнялись неравенства

$$|x_i^{[0]}-z_i|\le cq,\qquad i=1,2,\dots,m, \tag{12}$$

то для каждого $K=0,1,2,\dots$ выполняются и неравенства

$$|x_i^{[K]}-z_i|\le cq^{2^K},\qquad i=1,2,\dots,m. \tag{13}$$

Замечание. Отметим, что, если c принадлежат достаточно маленькому промежутку с левым концом $c=0$, то функция $L(c)$ возрастающая и $L(c)>0$. На самом деле определитель

$$\frac{d^{\alpha_i}}{dx^{\alpha_i}}\ D\left|\begin{matrix}\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_N\\ x,\ y_1,\dots,y_m\\ 1,\ \alpha_1,\dots,\alpha_m\end{matrix}\right|\ \Bigg|_{x=y_i}$$

является производной порядка α_i некоторого обобщенного полинома по системе $\{\varphi_K(x)\}_{K=0}^{N}$ и совпадающего с полиномом $P_N(x)$ с точностью до ненулевого множителя

$$D\begin{bmatrix}\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_{N-1}\\ y_1,y_2,\dots,y_m\\ \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m\end{bmatrix}$$

(так как система $\{\varphi_K(x)\}_{K=0}^{N}$ чебышевская и $z_i\ne z_j$ при $i\ne j$).

Но полином $P_N(x)$ имеет нули $z_1,z_2,\dots,z_m$ с кратностями $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ соответственно и, следовательно,

$$P_N^{(\alpha_i)}(z_i)\ne 0,\qquad i=1,2,\dots,m.$$

Из непрерывности любого определителя следует, что $L(c)>0$.

Доказательство теоремы

Доказательство проведем методом математической индукции. При $K=0$ (13) совпадают с (12). Пусть (13) выполняются при некотором натуральном K. Тогда для знаменателя в правой части (8) имеем $|R_K^{(\alpha_i)}(x_i^{[K]})|>L(c)>0$. Для оценки абсолютного значения числи-

Таблица 4

K	$x_1^{[k]}$	$x_2^{[k]}$	$x_3^{[k]}$	$x_4^{[k]}$
0	- 0,85	0,80	I,75	2,70
I	- 0,746	0,825	I,693	2,763
2	- 0,623	0,868	I,6I2	2,854
3	- 0,53I	0,927	I,534	2,947
4	- 0,502	0,978	I,50I	2,994
5	- 0,5(4ж0)9	0,998	I,4(3ж9)7	2,(4ж9)2
6	- 0,5(6ж0)I	0,(4ж9)7	I,4(6ж9)I	2,(6ж9)I
7	- 0,5(7ж0)	0,(8ж9)	I,4(6ж9)	2,(7ж9)

В заключение отметим, что для случая алгебраического полинома нами предложен /8/ простой и эффективный метод для определения кратностей его нулей.

Литература

I. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. "Наука", М., I976.
2. Schumaker L.L. Spline functions: Basic theory, "J.Wiley and Sons", N.Y., 1981.
3. Семерджиев Х.И. Докл. БАН, т. 35, № 8, I982, с.I057-I060.
4. Ангелова Е.Д., Семерджиев Х.И. ЖВМиМФ, т. 22, № I,I982, с.2I8-223.
5. Макрелов И.В., Семерджиев Х.И. ЖВМиМФ, т. 24, № I0,I984,с.I443-I453.
6. Дочев К., Бырнев П. ЖВМиМФ, т. 4, № 5, I964, с.9I5-920.
7. Макрелов И.В., Семерджиев Х.И. Докл. БАН, т. 38, № I0, I985.
8. Семерджиев Х.И., Тамбуров С.Г. Докл. БАН, т. 37, № 9, I984, с.II43-II45.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 декабря I985 года.

Семерджиев Х.И., Тамбуров С.Г. Р11-85-931

Метод для определения всех нулей обобщенного полинома по произвольной чебышевской системе

Рассматривается итерационный метод для одновременного нахождения всех нулей некоторого обобщенного полинома по произвольной чебышевской системе, если кратности нулей заданы. Метод более общий, чем ранее предложенные методы, относящиеся лишь к алгебраическим, тригонометрическим и экспоненциальным полиномам. Установлена его квадратическая сходимость. Метод реализован на ЭВМ.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Semerdzhiev Kh., Tamburov S. P11-85-931

Method for Determining All Zeros of a Generalized Polynomial Over An Arbitrary Chebyshev System

An iterative method for simultaneous search of all zeros of some generalized polynomial over an arbitrary Chebyshev system if their multiplicities are given is considered. The proposed method is more general as compared with previous ones but relating to algebraic, trigonometrical and exponential polynomials only. Its quadratic convergence is proved. The method is tested on the computer.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985