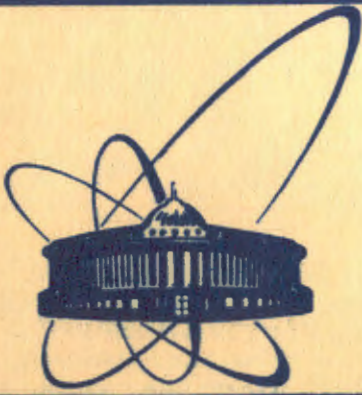


85-88



**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P11-85-88

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков,
А.Н.Ильина*, В.Д.Ильин*

**ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ
ИЗМЕНЕНИЯ МАГНИТНОГО МОМЕНТА
ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ
В ПОЛЕ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ**

* Научно-исследовательский институт
ядерной физики МГУ

Магнитный момент μ заряженной частицы в поле диполя является адиабатическим интегралом движения. Устойчивость осциллирующего движения между точками поворота определяется тем, насколько сохраняется адиабатический инвариант μ при многократных колебаниях частицы вдоль магнитных силовых линий^{/1/}. В зависимости от значений параметров динамической системы "частица-поле" изменения μ могут компенсироваться, и тогда адиабатический инвариант сохраняется с высокой точностью. Возможна также ситуация, когда эти изменения накапливаются. Причем накопление $\Delta\mu$ может носить статистический характер^{/1,2/}.

Хаотические изменения μ эквивалентны блужданию точки отражения частицы вдоль ведущей силовой линии. Если физические условия /среда/ существенно меняются по силовой линии /или имеется поглощающий экран/, то растекание точек отражений может привести к потерям частиц^{/2/}. Для описания утечки частиц необходимо найти соответствующий коэффициент диффузии по μ , который определяется через величину $\Delta\mu$, отнесенную к полупериоду продольных колебаний.

В данной работе оценивается величина $\Delta\mu$ на основе траекторных расчетов и теории.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

Исходным выражением для неадиабатического изменения μ является^{/3/} следующее:

$$\Delta\mu_0 = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{v_{\perp}}{BR_c} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \cos \phi_0 dt, \quad /1/$$

где t_1 и t_2 - точки поворота, v_{\parallel} и v_{\perp} - соответственно параллельная и перпендикулярная компоненты вектора скорости к магнитному полю B , $\mu_0 = v_{\perp}^2 / 2B$ - нулевое приближение инварианта, ϕ - ларморовская фаза, R_c - радиус кривизны магнитной силовой линии.

Используя усредненные величины

$$\bar{v}_{\perp} = (2\mu_0 B)^{1/2}, \quad \bar{v}_{\parallel} = v \left(1 - \frac{\bar{B}}{B_m} \right)^{1/2}, \quad \bar{\phi} = \phi_0 - \frac{\omega_0}{B_0 \cdot 0} \int B \frac{d\ell}{v_{\parallel}}. \quad /2/$$

а также условие

$$\frac{v_{\perp}^2}{2B} = \frac{v^2}{2B_m} = \mu_0 = \text{const}, \quad /3/$$

где ω_0 - циклотронная частота в медианной плоскости, ℓ - координата вдоль силовой линии, B_m - поле в точке поворота, можно свести интеграл /1/ к гамма-функции. Конечная формула будет иметь вид /3/

$$\frac{\Delta\mu}{\mu_0} = \frac{3,62}{\sin\alpha} \left(\frac{3}{\chi}\right)^{1/8} \cos\phi_0 \exp\left[-\frac{3\psi(\alpha)}{\chi}\right], \quad /4/$$

где $\chi = \rho/R_c = \omega/vR_c$ - малый параметр /параметр адиабатичности/, ρ - циклотронный радиус, α - угол между вектором скорости и силовой линией.

$$\psi(\alpha) = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3} \left[1 - \sin^2\alpha \frac{(1-3x^2)^{1/2}}{(1+x^2)^3}\right]^{-1/2} dx,$$

Все величины берутся в медианной плоскости.

Возможен другой способ оценки интеграла /1/ методом перевала с учетом слияния особенностей - полюса и точки перевала. Перепишем уравнение /1/ в виде

$$\Delta\mu_0 = - \int_{t_1}^{t_2} f \frac{\exp\bar{\phi}}{B} dt, \quad /5/$$

где

$$f = \frac{v_{\perp}}{R_c} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2}\right),$$

величина $\bar{\phi}$ определяется выражением /2/. Разлагая f и B в ряд по ℓ и учитывая, что

$$\frac{d^2 v_{\parallel}}{dt^2} = \frac{v_{\perp}^2}{2v_{\parallel}} \frac{B''}{B}, \quad \frac{d^2 v_{\perp}}{dt^2} = \frac{v_{\perp}}{2} \frac{B''}{B},$$

получим /4/

$$f = \left[\frac{v_{\perp}}{R_c} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2}\right)\right]_{t=0} + \frac{\ell^2}{2} \left[\frac{v_{\perp}}{2} \frac{B''}{BR_c} + v_{\perp} (R_c^{-1})'' \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2}\right)\right]_{t=0}; \quad B_0'' = \left[v_{\parallel}^2 \frac{\partial^2 B}{\partial \ell^2}\right]_{t=0};$$

$$(R_c^{-1})'' = \left[v_{\parallel}^2 \frac{\partial^2 (R_c^{-1})}{\partial \ell^2}\right]_{t=0}; \quad B = B_0'' \bar{\ell} (\ell - \bar{\ell});$$

$$\frac{d\bar{\phi}}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad B(\bar{\ell}) = 0, \quad \text{где} \quad \bar{\ell} = -i \left(\frac{2B_0}{B_0''}\right)^{1/2}.$$

Таким образом, вместо /5/ можно записать

$$\Delta\mu = \frac{f}{4} \operatorname{Re} \left\{ i \exp(i\phi_0 - f_2 \omega_0) \cdot \int \frac{\exp\left[-\frac{i\omega_0 B_0'' \bar{\ell}}{2B_0 v} (\ell - \bar{\ell})^2\right]}{\ell - \bar{\ell}} d\ell \right\}, \quad /6/$$

где

$$f_1 = \left[\frac{v_{\perp}}{BR_c} \left(v^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2}\right) - \frac{v_{\perp} (R_c^{-1})''}{B''} \left(v_{\perp}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2}\right)\right]_{t=0} \left(\frac{2B_0}{B_0''}\right)^{1/2}; \quad /7/$$

$$f_2 = \frac{i}{v} \int_0^{\bar{\ell}} \frac{1 + \frac{B_0''}{2B_0} \ell'^2}{\left[1 - \sin^2\alpha \left(1 + \frac{B_0''}{2B_0} \ell'^2\right)\right]^{1/2}} d\ell'.$$

При интегрировании /6/ воспользуемся эталонным интегралом /5/

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-zt^2)}{t-\epsilon} dt = i\pi \quad (\epsilon = 0, z > 0).$$

Тогда окончательно получим /6/

$$\Delta\mu = -\frac{\pi}{4} f_1 \cos\phi_0 \exp\left[-\frac{3\psi(\alpha)}{\chi}\right], \quad /8/$$

или

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{0,74 (14 - \sin^2\alpha)}{\sin 2\alpha} \cos\phi_0 \exp\left[-\frac{3\psi(\alpha)}{\chi}\right], \quad /9/$$

где

$$\psi(\alpha) = (3\sqrt{2} \sin^2\alpha)^{-1} \left(\frac{1 + \sin^2\alpha}{\sin\alpha} \ln \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} - 1\right).$$

Из сравнения двух асимптотических приближений /4/ и /9/ видно, что они различаются предэкспоненциальными множителями и показателями экспоненты.

ТРАЕКТОРНЫЙ СЧЕТ

Прямым интегрированием уравнения движения найдем величину $\Delta\mu/\mu$ в зависимости от α , χ , ϕ_0 и определим, какое из выражений /4/ или /9/ является более точным.

Численные эксперименты по исследованию неадиабатичности движения частицы в дипольном поле проводились ранее^{/7/}. В качестве проверочной формулы использовалось искусственно составленное выражение

$$\Delta\mu = -\frac{(\pi\ell)^{1/2}}{4} f_1 \cos \phi_0 \ell^{-k/\epsilon} \ell^\beta \sin \phi_0, \quad /10/$$

где

$$k/\epsilon = 3 \frac{\psi(\alpha)}{\chi},$$

$$\beta = \frac{1}{3} \left\{ \frac{v_\perp}{R_c} \left(\frac{2B_0}{B_0''} \right)^{1/2} \left[1 + R \left(\frac{1}{R_c} \right)'' \frac{B_0}{B_0''} \right] \right\}_{t=0} = 0,157 \operatorname{tg} \alpha,$$

в котором k/ϵ взято из работы^{/3/}, а все остальное - из^{/4/}. Выражение /10/ практически совпадает с /8/. Интерес к этим подробностям вызван тем, что /10/ оказалось в хорошем соответствии с численными результатами^{/7/}. Это, видимо, указывает на преимущество формулы /9/ перед /4/. Приведенные ниже численные исследования неадиабатических эффектов движения подтверждают справедливость теоретической формулы /9/.

Движение частицы в дипольном поле описывалось системой уравнений

$$\ddot{x} = A [v_y B_z - v_z B_y],$$

$$\ddot{y} = A [v_z B_x - v_x B_z], \quad /11/$$

$$\ddot{z} = A [v_x B_y - v_y B_x],$$

где

$$A = \ell / mc, \quad B_x = 3xz \frac{M}{R^5}, \quad B_y = 3yz \frac{M}{R^5}, \quad B_z = (3z^2 - R^2) \frac{M}{R^5},$$

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

M - дипольный момент.

Начальные условия задавались в медианной плоскости ($z=0$)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \\ v_0 \sin \alpha \cos \phi \\ v_0 \sin \alpha \sin \phi \\ v_0 \cos \alpha \end{pmatrix} \quad /12/$$

где ϕ - угол между векторами \vec{v}_\perp и \vec{R} .

В точке инъекции вычислялись поле $B_0 = B(x_0)$ и параметр адиабатичности $\chi = 3v_0 / AB_0 M$.

Численные расчеты задачи Коши /11/-/12/ проводились методом Рунге-Кутты 4-го порядка^{/2/}. Точность вычислений контролировалась по сохранению энергии ($v^2 = \text{const}$) и обобщенному моменту частицы и была $\leq 10^{-6} \%$.

Основной величиной, вычисляемой при траекторном счете, являлось изменение магнитного момента частицы $\mu = v_\perp^2 / 2B$ при одном ее прохождении между двумя точками отражения. Вычисления проводились следующим образом. Вначале просчитывалась траектория частицы от медианной плоскости до точки отражения. Затем, после замены $A \rightarrow -A$ и $v_0 \rightarrow -v_0$, просчитывалась траектория до сопряженной точки отражения и находилась величина

$$\Delta\mu(v_0, \phi_0, x_0, \alpha) = \mu_1(B_{m_1}) - \mu_2(B_{m_2}). \quad /13/$$

Это равносильно тому, как если бы частица, двигаясь от одной точки отражения до другой, пересекла бы медианную плоскость с заданными параметрами v_0, ϕ_0, x_0, α .

Из геометрических соображений и начальных условий /12/ следует, что траектории с начальными фазами $\phi_0 = 90^\circ$ и 270° идентичны и поэтому $\Delta\mu \equiv 0 (B_{m_1} = B_{m_2})$. При замене $\phi_0 \rightarrow 180^\circ + \phi_0$ величина $\Delta\mu$ меняет только знак. Вычисления подтверждают эти выводы с заданной машинной точностью, что является дополнительной проверкой правильности счета.

Результаты численного эксперимента показаны на рис.1 и 2 в виде точек.

ВЫВОДЫ

Из сравнительных данных рис.1 и 2 видно, что теоретическая формула /9/ описывает изменение μ с точностью $\leq 20\%$ даже в явно неадиабатической области, когда $\Delta\mu/\mu_0 \geq 1$, а условие /3/ не выпол-

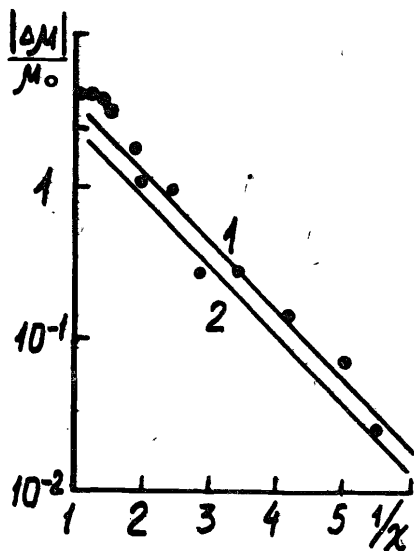


Рис.1. Зависимость $\Delta\mu$ от $1/\chi$ при $\alpha = 0,57$, $\phi_0 = 0^\circ$: 1 - теоретическая кривая /9/, 2 - теоретическая зависимость /4/, • - траекторный счет.

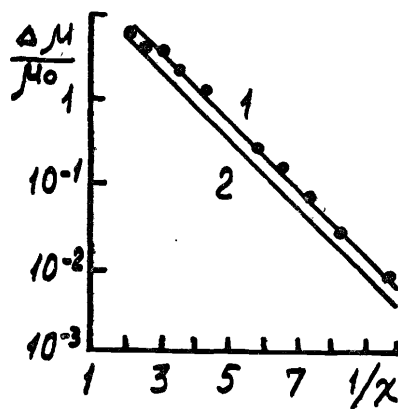


Рис.2. То же, что и на рис.1, при $\alpha = 0,07$, $\phi_0 = 140^\circ$.

няется. Значения $\Delta\mu/\mu_0$, вычисленные по формуле /4/, отличаются от экспериментальных данных в ≤ 2 раза. При увеличении угла α растет разброс экспериментальных точек относительно теоретической кривой /9/. При больших углах, например, $\alpha = 50^\circ$, $\phi_0 = 0^\circ$, $\chi \geq 0,12$, теоретические и численные результаты отличаются на порядок и больше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чириков В.В. Физика плазмы, 1978, 4, с.521.
2. Амирханов И.В. и др. ОИЯИ, P11-83-505, Дубна, 1983.
3. Крушкаль Е.М. ЖТФ, 1972, 42, 11, с.2288.
4. Hastie R.J., Hobbs G.D., Taylor J.V. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, 1969, vol.1, p.389.
5. Федорук М.В. Метод перевала. "Наука", М., 1977.
6. Ильин В.Д., Ильина А.Н. ЖЭТФ, 1978, 75, вып.2/8/, с.518.
7. Тарский В.А., Чириков Б.В. Препринт ИЯФ 74-73, Новосибирск, 1973.

СООБЩЕНИЯ, КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ, ПРЕПРИНТЫ И СБОРНИКИ ТРУДОВ КОНФЕРЕНЦИЙ, ИЗДАВАЕМЫЕ ОБЪЕДИНЕННЫМ ИНСТИТУТОМ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ЯВЛЯЮТСЯ ОФИЦИАЛЬНЫМИ ПУБЛИКАЦИЯМИ.

Ссылки на СООБЩЕНИЯ и ПРЕПРИНТЫ ОИЯИ должны содержать следующие элементы:

- фамилии и инициалы авторов,
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс публикации,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы /при необходимости/.

Пример:

1. Первушин В.Н. и др. ОИЯИ, P2-84-649, Дубна, 1984.

Ссылки на конкретную СТАТЬЮ, помещенную в сборнике, должны содержать:

- фамилии и инициалы авторов,
- заглавие сборника, перед которым приводятся сокращенные слова: "В кн."
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс издания,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы.

Пример:

Колпаков И.Ф. В кн. XI Международный симпозиум по ядерной электронике, ОИЯИ, Д13-84-53, Дубна, 1984, с.26.

Савин И.А., Смирнов Г.И. В сб. "Краткие сообщения ОИЯИ", № 2-84, Дубна, 1984, с.3.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 февраля 1985 года.

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ, включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

ИНДЕКС	ТЕМАТИКА	Цена подписки на год
1.	Экспериментальная физика высоких энергий	10 р. 80 коп.
2.	Теоретическая физика высоких энергий	17 р. 80 коп.
3.	Экспериментальная нейтронная физика	4 р. 80 коп.
4.	Теоретическая физика низких энергий	8 р. 80 коп.
5.	Математика	4 р. 80 коп.
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия	4 р. 80 коп.
7.	Физика тяжелых ионов	2 р. 85 коп.
8.	Криогеника	2 р. 85 коп.
9.	Ускорители	7 р. 80 коп.
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных	7 р. 80 коп.
11.	Вычислительная математика и техника	6 р. 80 коп.
12.	Химия	1 р. 70 коп.
13.	Техника физического эксперимента	8 р. 80 коп.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами	1 р. 70 коп.
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях	1 р. 50 коп.
16.	Дозиметрия и физика защиты	1 р. 90 коп.
17.	Теория конденсированного состояния	6 р. 80 коп.
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники	2 р. 35 коп.
19.	Биофизика	1 р. 20 коп.

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79.

Амирханов И.В. и др.

P11-85-88

Численные оценки изменения магнитного момента движения заряженной частицы в поле магнитного диполя

С помощью численного счета траектории частицы в дипольном магнитном поле оценивается изменение ее магнитного момента за полупериод продольных колебаний между точками отражений. Сравниваются теоретические и численные результаты.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Amirkhanov I.V. et al.

P11-85-88

Numerical Evaluation of the Change of Charged Particle Motion Magnetic Moment in Magnetic Field with a Dipole Configuration

The change of magnetic moment of a charged particle for half cycle of longitudinal oscillations between reflection points is evaluated with the help of numerical calculations of the trajectories of charged particle in magnetic field with a dipole configuration. The theoretical and numerical results are compared.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985