сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-85-815

Р.М.Ямалеев

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ПОЛИНОМИАЛЬНО-НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ МАТРИЧНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

1985

ВВЕДЕНИЕ

Полиномиально-нелинейные алгебраические уравнения /ПНАУ/ принадлежат классу весьма важных нелинейных уравнений математической физики. Многие задачи физики ядра, конденсированных сред и элементарных частиц в принципе /или приближенно/ могут быть сведены к решению ПНАУ. После работ Галуа и Абеля /1930 г./, когда было доказано, что решение произвольного ПНАУ выше 4 степени нельзя представить в виде радикалов /1/, стало ясно, что одномерные уравнения, имеющие высокую степень нелинейности, могут быть решены только приближенно, т.е. численно.

В настоящее время численное решение одномерной алгебраической задачи произвольной нелинейности не представляет особого труда. Для решения такой задачи развиты многочисленные итерационные методы /1/. Что касается одномерных ПНАУ, то решение таких уравнений можно свести к задаче нахождения собственных значений матрицы соответствующей размерности /верно и обратное/. Методы численного нахождения собственных значений и собственных функций простой матрицы в настоящее время разработаны исчерпывающе, и эта задача по своей природе является классической /2/. Ситуация резко усложняется, как только мы переходим к нелинейным многомерным уравнениям. При этом, если мы не обладаем достаточно удовлетворительной априорной информацией о начальных /пробных/ решениях, то принципиальное решение той или иной нелинейной задачи становится проблематичным.

То же самое можно сказать о системе ПНАУ. Существенный шаг в направлении уменьшения многомерности ПНАУ был сделан в трудах Эйлера, Кронекера, Сильвестра /3/. Этими авторами был разработан метод исключения неизвестных /далее этот метод будем называть методом ЭКС/, с помощью которого система ПНАУ из M уравнений на M неизвестных в принципе может быть сведена к M-одномерным уравнениям более высокой степени нелинейности. Тем самым было показано, что система ПНАУ в данном случае как бы аналогична системе линейных алгебраических уравнений, где имеется метод сведения многомерной задачи к одномерной путем постепенного исключения неизвестных. Бухбергер /4/ предложил методы построения алгоритмов сведения M-мерных ПНАУ к треугольной форме, используя базис Гробнера. Несмотря на то, что эти алгоритмы в настоящее время являются наиболее оптимальными, нельзя полагать, что задача решения системы ПНАУ выполнена исчерпывающе. В действительности решить систему ПНАУ - это значит найти кортежи /т.е. упорядоченный набор/ решений. Оригинальный метод решения системы

ПНАУ, позволяющий сформулировать в процессе решения соответствующие кортежи, был предложен в /5/. В этом методе /названном авторами методом спинорной линеаризации/ аналогия между процедурой исключения в системе линейных уравнений и в системе ПНАУ становится наиболее полной: матрицы для неизвестных находятся путем обращения блочной матрицы, а сами решения находятся как собственные значения найденных матриц.

Таким образом открывается перспективный путь исследования систем ПНАУ. К сожалению, пути реализации метода спинорной линеаризации в виде программ для ЭВМ сложны. Прежде чем приступить к такой реализации, должна быть создана библиотека подпрограмм алгебры унионов /обобщение алгебры Клиффорда/. Алгоритм сильно усложняется при переходе от уравнения с квадратичной нелинейностью к более высоким степеням.

К счастью, метод спинорной линеаризации не является уникальным, и для решения системы ПНАУ можно развить простые методы исключения неизвестных, позволяющие создать экономичные алгоритмы, реализуемые на языке фортран. Один из таких методов будет изложен в настоящей работе. Рассуждения, которые привели к порождению данного метода решения ПНАУ, основаны на следующей аналогии. Алгебра Клиффорда в релятивистской теории спина 1/2 применяется для линеаризации квадратичного по импульсам оператора энергии. Для описания движения частиц с другими значениями спина /0,1,2/ более подходящей является так называемая алгебра Даффина-Кеммера /6/. Путь линеаризации, предложенный Даффином и Кеммером, с небольшими модификациями мы и будем использовать для разработки метода решения системы ПНАУ на основе процедуры исключения неизвестных.

1. МЕТОД СПИНОРНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Под общим видом системы из m полиномиально-нелинейных алгебраических уравнений степени p для m неизвестных будем понимать выражение вида

$$
\begin{aligned}
{}^{n}R_i = a_{i i_1 i_2 \dots i_m} \overbrace{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}}^{n} + \dots + \\
+ b_{i k_1 \dots k_{m-1}} x_{k_1} \dots x_{k_{m-1}} + \dots + c_{ip} x_p + d_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m).
\end{aligned} \qquad /1.1/
$$

здесь x - неизвестные, a_i, b_i, c_i, d_i - коэффициенты, заданные в поле комплексных чисел. Поскольку поле комплексных чисел алгебраически замкнуто /3/, то решения /1.1/ также определяются в поле комплексных чисел.

На первый взгляд, исключение неизвестных в системе /1.1/ - процедура невозможная: в силу нелинейности уравнений линейные комбинации между уравнениями не смогут привести к уменьшению числа неизвестных. Мы также не имеем возможности определить аналитически одну неизвестную из какого-нибудь уравнения /степени ≥ 5/, чтобы подставить в другие с целью исключения этой неизвестной. Путь исключения неизвестных становится почти очевидным, как только произведена "линеаризация" каждого из уравнений /1.1/. Метод будет легче воспринят, если мы его проиллюстрируем на примере двух квадратных уравнений общего вида:

$$
\begin{aligned}
a_{xx} x^2 + a_{yy} y^2 + a_{xy} xy + a_x x + a_y y + a_0 = 0, \\
b_{xx} x^2 + b_{yy} y^2 + b_{xy} xy + b_x x + b_y y + b_0 = 0.
\end{aligned} \qquad /1.2/
$$

Метод спинорной линеаризации ставит в соответствие системе /1.2/ линейную по неизвестным систему с некоммутирующими /матричными/ коэффициентами:

$$
\begin{aligned}
[\alpha_1 a_{xx}^{1/2} x + \alpha_2 a_{yy}^{1/2} y + \omega_1^1 a_{xy} x + \omega_2^1 y + \\
+ \omega_1^2 a_x + \omega_2^2 x + \omega_1^3 a_y + \omega_2^3 y + \alpha_3 a_0^{1/2}]\psi = 0, \\
[\alpha_4 b_{xx}^{1/2} x + \alpha_5 b_{yy}^{1/2} y + \omega_1^4 b_{xy} x + \omega_2^4 y + \\
+ \omega_1^5 b_x + \omega_2^5 x + \omega_1^6 b_y + \omega_2^6 y + \alpha_6 b_0^{1/2}]\psi = 0.
\end{aligned} \qquad /1.3/
$$

Здесь $\alpha_i, \beta_i, \omega_\ell^K$ - образующие алгебры унионов, которые удовлетворяют следующим соотношениям антикоммутации:

$$
\begin{aligned}
\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}, \qquad \beta_i \beta_j + \beta_j \beta_i = -2\delta_{ij}, \\
\omega_i^p \omega_j^r + \omega_j^r \omega_i^p = \epsilon_i \delta^{pr} (1 - \delta_{ij}), \quad (\epsilon_i = \pm 1).
\end{aligned} \qquad /1.4/
$$

Если переписать /1.3/ в следующей символической форме

$$\hat{A}(x,y)\Psi = 0, \quad \hat{B}(x,y)\Psi = 0, \qquad /1.5/$$

где $\hat{A}(x,y)$ и $\hat{B}(x,y)$ - матрицы соответствующего порядка, то, в силу нетривиальности спинора Ψ ($\psi^2 = 1$), имеем

$$\det(\hat{A}(x,y)) = 0, \quad \det(\hat{B}(x,y)) = 0. \qquad /1.6/$$

Матрицы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ состоят из линейной комбинации образующих алгебры унионов, поэтому $\det(\hat{A}(x,y)) = A^2(x,y)$, $\det(\hat{B}(x,y)) = B^2(x,y)$, и система /1.6/ совпадает с /1.2/. Решение /1.6/ является решением /1.5/ и, наоборот, решение /1.5/ есть решение /1.6/. Таково соответствие между системами /1.1/ и /1.3/. Представление /1.3/ системы /1.2/ имеет то преимущество, что оно обеспечивает возможность исключения неизвестных, причем в той же форме, что и в методе Гаусса для линейных алгебраических уравнений. Здесь исключение переменных равносильно обращению матрицы, состоящей из элементов алгебры унионов. Действительно, система /1.3/ может быть переписана так:

$$\hat{W}\begin{pmatrix} x & \Psi \\ y & \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 a^{12}_{xx} + \omega^1_1 a_{xy} + \omega^2_2 & \alpha_2 a^{12}_{yy} + \omega^1_2 + \omega^3_2 \\ \alpha_4 b^{12}_{xx} + \omega^4_1 b_{xy} + \omega^5_2 & \alpha_5 b^{12}_{yy} + \omega^4_2 + \omega^6_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\Psi \\ y\Psi \end{pmatrix} . \qquad /1.7/$$

Обращая матрицу W , находим

$$x\Psi = \hat{X}(a,b)\Psi , \quad y\Psi = \hat{Y}(a,b)\Psi , \quad \Psi^2 = 1 , \qquad /1.8/$$

где матрицы $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ зависят от коэффициентов системы /1.2/. Неизвестные x и y могут быть найдены как собственные значения /1.8/. При этом достаточно решить первое уравнение на собственные значения. Тогда y находится из формулы

$$y = \Psi'(Y)\Psi . \qquad /1.9/$$

Как видно из /1.3/, для спинорной линеаризации /1.2/ используется двенадцать образующих $(\alpha_i \beta_i)$ алгебры альтернионов. Таким образом, порядок матрицы W равен 2×2^6.

2. МЕТОД МАТРИЧНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Как мы убедились в предыдущем параграфе, сложность построения алгоритмов для численной реализации метода спинорной линеаризации усугубляется еще быстрым ростом порядка используемых матриц в зависимости от числа слагаемых в уравнениях. С другой стороны, специфика используемой алгебры /Клиффорда/ такова, что она позволяет безболезненно провести операцию линеаризации только квадратичных соотношений. Для более высоких степеней эту операцию приходится проделывать многократно, после каждого раза возникают некоммутирующие базисные элементы, которые предварительно необходимо привести в состояние коммутации. Более того, не ясно, можно ли применить этот метод, если наивысшая степень нелинейности в системе не равна 2^n.

В настоящем параграфе мы изложим метод, свободный от указанных недостатков.

Вернемся к системе /1.2/ и перепишем ее в виде системы из 6 уравнений:

$$\begin{cases} a_{xx}\, x\alpha + a_{yy}\, y\beta + a_{xy}\, y\alpha + a_x x + a_y y + a_0 = 0 , \\ x - \alpha = 0 , \\ y - \beta = 0 . \end{cases} \qquad /2.1/$$

$$\begin{cases} b_{xx}\, x\alpha + b_{yy}\, y\beta + b_{xy}\, y\alpha + b_x x + b_y y + b_0 = 0 , \\ x - \alpha = 0 , \\ y - \beta = 0 . \end{cases}$$

Далее введем столбец

$$\Psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} . \qquad /2.2/$$

Тогда

$$\alpha = \delta_{1k}\Psi_k , \qquad \beta = \delta_{2k}\Psi_k , \qquad 1 = \delta_{3k}\Psi_k . \qquad /2.3/$$

δ_{ik} – символы Кронекера.

Подставим /2.3/ в /2.1/, умножим каждое из трех уравнений в первой и во второй половине /2.1/ на $\delta_{\ell 1}$, $\delta_{\ell 2}$, $\delta_{\ell 3}$ соответственно, и сложим. В результате опять получим систему из двух уравнений, однако линейных по неизвестным и матричных, с матрицами, действующими на Ψ:

$$(xA_{xx} + yA_{xy} + A_{xo})\Psi - W^{(2)}_1(x,y)\Psi = 0 ,$$

$$(xA_{yx} + yA_{yy} + A_{yo})\Psi - W^{(2)}_2(x,y)\Psi = 0 , \qquad /2.4/$$

где матрицы A_{xx}, A_{xy}, A_{xo} имеют вид

$$A_{xx} = (a_{xx}\delta_{\ell 1}\delta_{1k} + a_x\delta_{\ell 1}\delta_{3k} + \delta_{\ell 2}\delta_{3k}) ,$$

$$A_{xy} = (a_{yy}\delta_{\ell 1}\delta_{2k} + a_{xy}\delta_{\ell 1}\delta_{1k} + a_y\delta_{\ell 1}\delta_{3k} + \delta_{\ell 3}\delta_{3k}) , \qquad /2.5/$$

$$A_{xo} = (a_o\delta_{\ell 1}\delta_{3k} - \delta_{\ell 2}\delta_{1k} - \delta_{\ell 3}\delta_{2k}) , \quad (\ell, k = \overline{1,3}) .$$

Аналогичный вид будут иметь и матрицы A_{yx}, A_{yy}, A_{yo}, если a_{xx}, a_{xy}, a_x, a_y, a_o заменить на b_{xx}, b_{xy}, b_x, b_y, b_o. Как следует из /2.2/, столбец Ψ имеет хотя бы один нетривиальный элемент. Следовательно, из /2.4/ с необходимостью имеем, что

$$\det(W^{(2)}_1(x,y)) = 0 ,$$

$$\det(W^{(2)}_2(x,y)) = 0 . \qquad /2,6/$$

причем, как несложно проверить, система /2.6/ совпадает с /1.2/. Таким образом, решения системы /2.4/ являются решениями /1.2/ и наоборот. Изложенный метод сведения систем вида /1.2/ к матричным системам /2.4/ далее будем называть методом матричной линеаризации.

Метод матричной линеаризации применим к системе любой степени нелинейности. Например, применяя в системе третьей степени нелинейности общего вида

$$\begin{aligned} &a_{x^3}x^3 + a_{y^3}y^3 + a_{x^2y}x^2y + a_{y^2x}y^2x + a_{xy}xy + a_x x + a_y y + a_o = 0, \\ &b_{x^3}x^3 + b_{y^3}y^3 + b_{x^2y}x^2y + b_{y^2x}y^2x + b_{xy}xy + b_x x + b_y y + b_o = 0, \end{aligned} \qquad /2.7/$$

получим матричную систему /2.4/, где

$$\Psi' = (\alpha 2, \alpha 1, \beta 2, \beta 1, 1),$$

$$\begin{aligned} A_{xx} &= (a_{x^3}\delta_{\ell 1}\delta_{1k} + a_{y^2x}\delta_{\ell 1}\delta_{3k} + a_x\delta_{\ell 1}\delta_{5k} - \\ &- \delta_{\ell 2}\delta_{2k} - \delta_{\ell 3}\delta_{5k}), \\ A_{xy} &= (a_{y^3}\delta_{\ell 1}\delta_{3k} + a_{x^2y}\delta_{\ell 1}\delta_{1k} + a_{xy}\delta_{\ell 1}\delta_{4k} + a_y\delta_{\ell 1}\delta_{5k} - \\ &- \delta_{\ell 4}\delta_{4k} - \delta_{\ell 5}\delta_{5k}), \\ A_{xo} &= (a_o\delta_{\ell 1}\delta_{5k} + \delta_{\ell 2}\delta_{1k} + \delta_{\ell 3}\delta_{2k} + \delta_{\ell 4}\delta_{3k} + \delta_{\ell 5}\delta_{4k}), \\ &(\ell, k = \overline{1,5}). \end{aligned} \qquad /2.8/$$

Если в /2.8/ заменить все a_0 на соответствующие b_0, то получим выражения для A_{yx}, A_{yy}, A_{yo}.

Если символично записать полученную матричную систему в виде

$$\begin{aligned} &W_1^{(3)}(x,y)\Psi = 0, \\ &W_2^{(3)}(x,y)\Psi = 0, \end{aligned} \qquad /2.9/$$

то в силу нетривиальности Ψ имеем

$$\begin{aligned} &\det(W_1^{(3)}(x,y)) = 0, \\ &\det(W_2^{(3)}(x,y)) = 0. \end{aligned} \qquad /2.10/$$

Система /2.10/ совпадает с системой /2,7/. Далее, системы /1.1/, /1.2/, /2.7/ будем называть оригиналами линеаризованных матричных систем типа /2.4/.

3. ПРОЦЕДУРА ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ПУТЕМ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ПО ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ /МЕТОД ЛПП/

Матричные системы /2.4/ выгодно отличаются от своих оригиналов /1.2/ тем, что в них процедура исключения неизвестных проводится весьма простым способом.

Рассмотрим, для простоты, системы из трех уравнений квадратичной нелинейности. Допустим, первое уравнение системы имеет вид

$$\begin{aligned} &a_{xx}x^2 + a_{yy}y^2 + a_{zz}z^2 + a_{xy}xy + a_{xz}xz + a_{yz}yz + \\ &+ a_x x + a_y y + a_z z + a_o = 0 \quad (a_{xx} \neq 0). \end{aligned} \qquad /3.1/$$

Применим операцию матричной линеаризации только по отношению к неизвестной x. Тогда вместо /3.1/ имеем

$$\left[x \begin{pmatrix} a_{xx} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{xy}y + a_{xz}z + a_x & a_x a_{yy}^2 + a_{zz}z^2 + a_{yz}yz + \\ & + a_y y + a_z z + a_o \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \Psi = 0. \qquad /3.2/$$

или $xE_2\Psi - X(y,z)\Psi$,

$$X(y,z) = \begin{pmatrix} -a_{xx}^{-1}(a_{xy}y + a_{xz}z + a_x) & (-a_{xx})^{-1}(a_{yy}y^2 + \\ & + a_{yz}yz + a_y y + a_z z + a_o) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad /3.3/$$

Матрица $X(z,y)$ зависит только от полиномов $f_1(y,z)$ и $f_2(z,y)$ и относится к так называемым λ-матрицам /или матрицам многочленов/ [7]. Если бы мы знали решения y_0 и z_0, то x_0 можно было бы определить как собственное значение матрицы $X(z_0, y_0)$, при условии $\Psi^2 = 1$. Далее матрицу $X(z,y)$ будем называть матрицей для неизвестной x. Для дальнейшего продвижения вперед нам необходима одна известная спектральная теорема из алгебры о функциях от матриц. Она гласит [7]: "Если $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ - собственные значения некоторой $(n \times n)$ матрицы A и P - скалярный многочлен, то собственными значениями матрицы $P(A)$ будут $P(\mu_1), P(\mu_2), \ldots, P(\mu_n)$".

Эта теорема для нашей работы имеет следующее

Следствие 1

Пусть $X_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x)$, $(i = \overline{1,m})$ - матрица для i-го неизвестного в системе уравнений /1.1/. Тогда собственные значения матричных уравнений, полученных подстановкой $\hat{X}_i$ в остальные уравнения, совпадают с их оригиналами.

Замечательно, что матрица $\hat{X}_i$ не зависит от неизвестной x_i. Следовательно, после подстановки X_i вместо x_i в остальные уравнения /1.1/, в частности в /3.1/, получим матричную систему из $m-1$ уравнений для $m-1$ неизвестных. Равенство нулю детерминантов полученной матричной системы /в силу нетривиальности Ψ/ дает нам обычную систему из $m-1$ уравнений, однако более высокой степени нелинейности, чем m уравнений системы /1.1/. Степень нелинейности растет в силу закона сохранения корней после соответствующих формальных преобразований системы уравнений. Коль скоро мы получили систему из $m-1$ уравнений, тот же способ позволяет получить систему из $m-2$ уравнений, и т.д. Вследствие роста степени нелинейности уравнений количество строк у Ψ соответственно будет расти. Продемонстрируем это на примере /3.1/. Подставляя /3.3/ в остальные уравнения /3.1/, получим два уравнения на y и z, но уже 4-го порядка каждое. Матрица для y, найденная из второго уравнения, будет также 4-го порядка. Исключение таким способом неизвестной y из третьего уравнения приведет к одному уравнению для z 16 порядка. В общем случае система из m-уравнений N-го порядка после процедуры исключения неизвестных приводится к одномерному уравнению $N^{2^{m-1}}$ -порядка.

4. ПРОЦЕДУРА ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ПУТЕМ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ПО ВСЕМ ПЕРЕМЕННЫМ СИСТЕМЫ /МЕТОД ЛНП/

Существенное упрощение в методе, предложенном в предыдущем параграфе, было достигнуто за счет линеаризации только по одной переменной. При этом нам приходилось каждый раз брать детерминанты от полученных матричных уравнений, чтобы затем снова линеаризовать по какой-либо переменной, и т.д. Этот метод дает те же результаты, что и метод ЭКС. Как видно, реализация метода на ЭВМ возможна только на языке аналитического программирования. В настоящем параграфе мы будем развивать метод исключения неизвестных путем линеаризации по всем переменным системы /далее этот метод будем называть методом ЛНП/. В методе ЛНП нам придется иметь дело с матрицами более высокого порядка, нежели в методе Л1П, но взамен получим метод, имеющий не только прямой, но и обратный ход. Алгоритм метода ЛНП может быть реализован в виде программы для ЭВМ на языке фортран.

Один из матричных методов линеаризации по всем переменным был уже продемонстрирован на примере систем квадратичной и кубичной нелинейности в § 2. В этом случае для системы из двух уравнений мы получим матричные системы вида

$$(xA_{xx} + yA_{xy} + A_{xo})\Psi = 0,$$

$$(xA_{yx} + yA_{yy} + A_{yo})\Psi = 0. \qquad /4.1/$$

Полученная матричная система /4.1/ не годится для исключения ни x, ни y, поскольку у матриц A_{xx}, A_{yy} не существует обратных. Другая трудность состоит в том, что переменные не могут быть исключены путем линейной комбинации уравнений /4.1/, как в методе Гаусса, ибо из /2.6/ не следует, что

$$\det(a_1 W_1(x,y) \pm a_2 W_2(x,y)) = 0. \qquad /4.2/$$

Первая трудность может быть устранена путем добавления нулевых /лишних/ решений. Перепишем систему /2.1/ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&a_{xx}x\alpha + a_{yy}y\beta + a_{xy}y\alpha + a_x x + a_y y + a_o = 0,\\
&x - \alpha = 0,\\
&y\alpha - \beta x = 0, \qquad\qquad /4.3/\\
&b_{xx}x\alpha + b_{yy}y\beta + b_{xy}y\alpha + b_x x + b_y y + b_o = 0,\\
&y\alpha - \beta x = 0,\\
&y - \beta = 0.
\end{aligned}$$

Записывая /4.3/ в виде /4.1/, получим следующий явный вид матриц:

$$A_{xx} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & a_{yy} & a_y \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{xo} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_o \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{yo} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_o \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad /4.4/$$

$$A_{yy} = \begin{pmatrix} 0 & b_{yy} & b_y \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{yx} = \begin{pmatrix} b_{xx} & b_{xy} & b_x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы достигли того, что матрицы A_{xx}, A_{yy} имеют обратные, но достигли этого ценой введения решений /$x = 0$, y_o/ и /x_o, $y = 0$/. Действительно, применяя матрицы A_i из /4.4/, получим

$$\begin{aligned}
&\det W_1^{(2)}(x,y) \equiv x(a_{xx}x^2 + a_{yy}y^2 + \dots + a_o) = 0,\\
&\det W_2^{(2)}(x,y) \equiv y(b_{xx}x^2 + b_{yy}y^2 + \dots + b_o) = 0,
\end{aligned} \qquad /4.5/$$

поэтому $y = 0$ и $x = 0$ тоже являются решениями /4.5/.

Изложенный метод без затруднений обобщается на случай системы N-го порядка из M уравнений. Для того, чтобы получить матрицы с нетривиальными детерминантами в системе /2.7/ с кубичной нелинейностью, уравнения должны быть линеаризованы путем добавления уравнений вида:

$\alpha 1x - \alpha 2 = 0$, $\quad x - \alpha 1 = 0$,

$$x\beta 1 - y\alpha 1 = 0, \quad \beta 2x - y\alpha 12 = 0, \quad \alpha 12 - x\beta 1 = 0, \qquad /4.6/$$

к первому уравнению /2.7/ и

$\beta 1y - \beta 2 = 0$, $\quad y - \beta 1 = 0$,

$$x\beta 1 - y\alpha 1 = 0, \quad \alpha 2y - x\alpha 12 = 0, \quad \alpha 12 - \alpha 1y = 0, \qquad /4.7/$$

ко второму уравнению /2.7/.

Отсюда, в общем виде, можно сделать следующее резюме. При матричной линеаризации по всем неизвестным для того, чтобы получить матрицы с нетривиальным детерминантом, необходимо, чтобы Ψ содержала кроме $x_i^{n-1}, x_i^{n-2}, \dots, x_i, 1$, также члены со смешанными произведениями:

$$x_{i_1}^{k_1} x_{i_2}^{k_2} \dots x_{i_n}^{k_n}, \quad k_1 + k_2 + \dots k_n \le n - 1.$$

Чтобы обойти вторую трудность, достаточно отказаться от мысли об исключении неизвестных путем образования линейной комбинации уравнений, а производить исключение путем подстановки переменных из одного уравнения в другое, используя операцию прямого произведения матриц. Для иллюстрации этого подхода запишем /4.1/ с A_{ij} из /4.4/ в следующем виде:

$$E_3 x\Psi = -A_{xx}^{-1}(A_{xy}y + A_{xo})\Psi = X(y)\Psi,$$
$$E_3 y\Psi = -A_{yy}^{-1}(A_{yx}x + A_{yo})\Psi = Y(x)\Psi, \qquad /4.8/$$
$$\Psi^2 = 1.$$

Прежде чем подставить первое уравнение /4.8/ во второе /4.1/, подготовим последнее: умножим его слева, используя операцию прямого произведения матриц, на единичную матрицу E_3. Получим

$$[(A_{yx} \otimes E_3)x + (A_{yy} \otimes E_3) + (A_{yo} \otimes E_3)]\Psi' = 0, \qquad /4.9/$$
$$\Psi' = (\Psi \otimes \Psi).$$

Теперь мы имеем возможность в /4.9/ вместо $xE_3\Psi$ ввести выражение $X(y)\Psi$ из /4.8/. Таким образом получим матрицу Y_o:

$$Y_o = [E_9 - (A_{yy}^{-1}A_{yx}) \otimes (A_{xx}^{-1}A_{xy})]^{-1} \times$$
$$\times [(A_{yy}^{-1}A_{yx}) \otimes (A_{xx}^{-1}A_{xo}) - E_3 \otimes (A_{yy}^{-1}A_{yo})], \qquad /4.10/$$

собственные значения которой определяют спектр неизвестной **y**. Запишем это уравнение в виде

$$yE_9\Psi' = Y_0\Psi', \quad (\Psi')^2 = 1. \qquad /4.11/$$

Аналогичное уравнение для неизвестной x мы смогли бы найти, подставляя второе уравнение /4.1/ в первое. Прежде чем приступить к этой процедуре, важно отметить, что вторая трудность, которую мы преодолеваем с помощью специальных подстановок, связана с понятием совместности линеаризованной системы /4.1/. В общем случае матрицы $X(y)$ и $Y(x)$ не коммутируют между собой. Для построения кортежей решений необходимо, чтобы матрицы для x и для y обладали одинаковым базисом, что возможно только при условии коммутации этих матриц. Совместности системы уравнений /4.8/ мы достигнем, если первое уравнение умножим по правилу прямого произведения слева на E_3, а второе уравнение - справа на E_3. Тогда система /4.8/ принимает вид

$$E_9 x\Phi + B_{xy} y\Phi = B_{xo}\Phi,$$
$$B_{yx} x\Phi + E_9 y\Phi = B_{yo}\Phi,$$
$$B_{xy} = E_3 \otimes (A_{xx}^{-1}A_{xy}),$$
$$B_{yx} = (A_{yy}^{-1}A_{yx}) \otimes E_3, \qquad /4.12/$$
$$B_{xo} = E_3 \otimes (A_{xx}^{-1}A_{xo}),$$
$$B_{yo} = (A_{yy}^{-1}A_{yx}) \otimes E_3.$$

Обращая блочную матрицу

$$U \equiv \begin{pmatrix} E_9 & B_{xy} \\ B_{yx} & E_9 \end{pmatrix}, \qquad /4.13/$$

находим решение линейной системы /4.12/:

$$\begin{pmatrix} x\Phi \\ y\Phi \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} B_{xo}\Phi \\ B_{yo}\Phi \end{pmatrix}. \qquad /4.14/$$

Можно показать, что полученная таким способом матрица для y совпадает с /4.8/. Коль скоро задача на собственные значения /4.9/ будет решена, определим кортежи (x_n, y_n), где x_n находятся из формулы

$$x_n = \Phi_n^+ X_o \Phi_n. \qquad /4.15/$$

В общем случае системы N-го порядка из M уравнений после применения операции линеаризации, получим систему из M уравнений, линейную по неизвестным с матричными коэффициентами:

$$\sum_i^M A_{ij}^{(\alpha\beta)} x_i \Psi^\beta = A_{io}^{(\alpha\beta)} \Psi^\beta. \qquad /4.16/$$

Если матрицы $A_{ij}^{(\alpha\beta)}$ приведены к нетривиальному виду описанным выше способом, то индексы α и β меняются в пределах $\overline{(1,k)}$, где $k = M(N-1) + \ell + 1$, ℓ - число всевозможных произведений типа $(x_1 x_2 \dots x_{N-1})$. Уравнения системы /4.16/ соответствуют уравнениям системы /1.1/, помноженным на $x_1, x_2, \dots, x_M$, каждая в соответствующей степени . Эти уравнения получаются из /4.16/ путем взятия детерминанта :

$$\det\left(\sum_i^M A_{1i}^{(\alpha\beta)} x_i - A_{10}^{\alpha\beta}\right) = 0 . \qquad /1.1a/$$

Примем за неизвестные линейной системы /4.16/ величины $Z_i^\beta = x_i \psi^\beta$, за правую часть: $B_i^\alpha = A_{10}^{\alpha\beta} \psi^\beta$. В результате система /4.16/ приобретает вид обычной линейной алгебраической системы с блочными матрицами

$$\sum_i^M A_{1i}^{(\alpha\beta)} Z_i^\beta = B_i^\alpha . \qquad /4.17/$$

Прежде чем решить /4.13/ относительно Z_i^β , приведем систему к совместному виду. Эту процедуру можно осуществить поэтапно. Умножим по правилу прямого произведения уравнение с $i = 1$ на E_k слева, остальные $M-1$ уравнений умножим на E_k справа. Далее умножим по тому же правилу уравнения с $i=2$ и с $i=1$ на E_k слева, остальные $M-2$ уравнений - на E_k справа. В результате получим линейные взаимно коммутирующие матричные уравнения с порядком матриц k^M :

$$\sum_i^M \bar{A}_{1i}^{(\alpha\beta)} \bar{Z}_i^\beta = \bar{B}_i^\alpha . \qquad /4.18/$$

Обращая блочную матрицу $\tilde{A}_{1i}^{(\alpha\beta)}$, находим $\bar{Z}_i^\beta = x_i \bar{\psi}^\beta$. Полученное решение запишем так:

$$x_i E_{k^M} \Phi = \tilde{X}_i \Phi , \qquad /4.19/$$

матрицы $\tilde{X}_i$ зависят только от коэффициентов исходной алгебраической системы. Неизвестные x_i $(i = \overline{1,M})$ можно определить как собственные значения /4.19/. При этом достаточно решить задачу на собственные значения только для определенного x_{i_0} . Остальные неизвестные будут определяться формулой

$$x_{i\,(i \neq i_0)} = \Phi^+ \tilde{X}_i \Phi , \qquad /4.20/$$

которая обеспечивает правильное конструирование кортежей решений системы /1.1a/. Тот факт, что неизвестные x_i , определяемые из /4.19/ и /4.20/, действительно являются решениями системы /1.1a/, можно сформулировать в виде теоремы:

Теорема

Формулы /4.19/, /4.20/ определяют кортежи решений системы уравнений /1.1a/.

Доказательство

Согласно теоремам линейной алгебры, решение системы /4.18/ существует, и оно однозначно . Как мы убедились выше, это решение определяется формулой /4.20/. Следовательно,

$$\sum_i^M \tilde{A}_{1i}^{(\alpha\beta)} |\tilde{X}_i \Phi^\beta| - \tilde{A}_{10}^{(\alpha\beta)} \Phi^\beta = 0 , \qquad /4.21/$$

$$\Phi^\alpha \Phi_\alpha = 1 , \quad (i = \overline{1,M}) .$$

В силу нетривиальности Φ имеем

$$\det\left|\sum_i^M \bar{A}_{1i}^{(\alpha\beta)} \bar{X}_i - \bar{A}_{1i}^{(\alpha\beta)}\right| = 0 , \quad (i = \overline{1,M}) . \qquad /4.22/$$

Система /4.21/, так же как и /4.18/, отличается от /4.17/ прямыми произведениями с E_k . По известной формуле

$$\det(A \otimes E_n) = (\det A)^n ,$$

поэтому нетрудно показать, что /4.22/ совпадает с /1.1a/,где вместо x_i стоят матрицы $\tilde{X}_i$. Но согласно известной теореме из алгебры, упомянутой в § 3, если матрицы $\tilde{X}_i$ удовлетворяют /1.1a/, то их собственные значения x_i из /4.19/, /4.20/ также удовлетворяют этим уравнениям. Теорема доказана.

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Изложенный метод проиллюстрируем на простом примере системы

$$-4x^2 - 7y^2 + 5x + 8y + a_1 = 0 ,$$
$$11x^2 - 0{,}7y^2 + 3xy + 3x + 6y + a_2 = 0 , \qquad /5.1/$$
$$a_1 = -412 , \quad a_2 = -287{,}2 .$$

Кортежи решений /5.1/ (x_n, y_n) , найденные на ЭВМ, имеют вид
/-6.769767, 9.409405/, /4,8/,
/7.272625, -9.230631/, /-5,017435, - 8,836795/.

В заключение автор выражает благодарность проф.Е.П.Жидкову за ценные замечания, И.В.Пузынину и И.В.Амирханову - за стимулирующие дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В. ЭЧАЯ, 1973, 4, 1, с.127.
2. Фаддеев Д.К., Фаддеева Н.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, М., 1963;
   Уилкинсон Д.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. "Наука", М., 1970.
3. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. "Наука", М., 1979.
4. Buchberger B. Aequtiones mathematical. 1970, vol.4, no 3, p.374.
5. Пшеничников С.Б., Генварев А.А. Альтернионный анализ на при-

мере расчета трехконтурной сети. Изв. вузов СССР, "Энергетика", 1984, № 8, с.98; Кузнецов П.Г., Пшеничников С.Б. ДАН СССР, 1985, том 283, № 5, стр.1073.

6. Умэдзава Х. Квантовая теория поля. ИЛ, М., 1958; Богуш А.А. Введение в полевую теорию элементарных частиц. "Наука и техника", М., 1981.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. "Наука", М., 1967; Ланкастер П. Теория матриц. "Наука", М., 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 ноября 1985 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

	Труды УШ Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Протвино, 1982 /2 тома/	11 р. 40 к.
Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды Ш Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р. 50 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Ямалеев Р.М. Р11-85-815
Решение системы полиномиально-нелинейных алгебраических уравнений методом матричной линеаризации

Предложен метод решения многомерных полиномиально-нелинейных алгебраических уравнений. Процесс решения состоит из четырех этапов: 1/ матричная линеаризация исходных уравнений как по одной, так и по всем неизвестным; 2/ конструирование соответствующих матриц для каждой неизвестной; 3/ решение спектральной задачи для нахождения неизвестных; 4/ определение кортежей решений исходной алгебраической системы. Алгоритм, разработанный на основе изложенного метода, реализован в виде программы для ЭВМ. Эффективность метода продемонстрирована на численном примере.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Yamaleev R.M. P11-85-815
Solution of the System of Polynomially Nonlinear Algebraic Equations by the Matrix Linearization Method

A method for solving multidimensional polynomial nonlinearity algebraic equations is suggested. The process of solution consists of four stages: 1) matrix linearization of original equations both by one and by all the unknowns; 2) construction of corresponding matrices for each unknown; 3) solution of spectral problem for finding the unknowns; 4) definition of corteges of solutions of original algebraic system. The algorithm created on the base of this method is realized as computer program. Its efficiency is demonstrated on a numerical calculation.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985