

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-85-807

Т.Л.Бояджиев, Ю.С.Гальперн*, И.В.Пузынин,
А.Т.Филиппов

БИФУРКАЦИИ
СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ ФЛЮКСОНОВ
В НЕОДНОРОДНОМ ДЖОЗЕФСОНОВСКОМ
ПЕРЕХОДЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

* Институт радиотехники и электроники АН СССР,
Москва.

1985

1. Введение

В работах^{/1-3/} были обнаружены связанные состояния солитонов, локализованные на микронеоднородностях среды. Такие состояния могут существовать в различных средах, описываемых параметрами порядка ϕ , удовлетворяющими некоторым нелинейным дифференциальным уравнениям. В случае одного скалярного параметра порядка $\phi(x, t)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, соответствующее уравнение можно получить из Лагранжиана

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - V(x, \phi) \right] dx, \quad (1.1)$$

где

$$\dot{\phi} \equiv \partial_t \phi, \quad \nabla \phi = (\partial_{x_1} \phi, \partial_{x_2} \phi, \dots, \partial_{x_n} \phi).$$

Неоднородности среды учитываются зависимостью потенциальной энергии от x .

Удобно выделить энергию взаимодействия поля ϕ с неоднородностями в отдельный член, положив

$$V = V_0(\phi) + V_1(x, \phi, \mu_i), \quad \mu = (\mu_i).$$

Здесь параметры μ_i характеризуют интенсивность взаимодействия поля с неоднородностями; другие параметры, описывающие положение и форму неоднородностей, обозначены многоточием. Предполагается, что при $\mu_i = 0$ потенциал V_1 обращается в нуль, и система становится пространственно-однородной. Как показано в^{/1-3/}, некоторые свойства неоднородной системы могут качественно отличаться от свойств соответствующей однородной системы даже при сколь угодно малых значениях μ_i . Поэтому для изучения эффектов неоднородностей необходимо использовать приближенные аналитические или численные методы, не связанные с предположением о малости V_1 по сравнению с V_0 (в наиболее интересных для физических приложений системах это условие, как правило, не выполняется). В этой работе, как и в^{/1-3/}, считается что V_0 и V_1 сравнимы по величине, а разбиение V на V_0 и V_1 , как и представление о "соответствующей однородной системе", используется лишь при анализе результатов.

Уравнение для ϕ ($V_\phi \equiv \partial_\phi V$)

$$\ddot{\phi} - \nabla^2 \phi = V_\phi \quad (1.2)$$

должно быть дополнено условиями на границе $\partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Если система помещена во внешнее поле, то к лагранжиану (1.1) следует добавить соответствующие члены, описывающие взаимодействие с этим полем, например, линейный член $\gamma\phi$, $\gamma = \text{const}$. В реальной системе, кроме того, могут быть существенными эффекты затухания. Для их описания в левую часть уравнения (1.2) можно добавить простейший член $\alpha\dot{\phi}$, $\alpha = \text{const}$.

Если в соответствующей однородной системе, т.е. при $\mu_i = 0$, существуют солитоны, то они могут локализоваться на притягивающих неоднородностях, вблизи которых потенциал V_1 резко уменьшается на небольшом интервале. Такие статические (не зависящие от t) состояния мы и называем связанными состояниями солитонов.

Статические связанные состояния могут существовать и в том случае, когда при $\mu_i = 0$ нет солитонных состояний. В этом случае они образуются за счет неоднородностей, а также за счет влияния граничных условий и внешних полей. Простейшие точно решаемые модели такого типа рассмотрены в [4]. Они получаются, если в пространственно-одномерном случае ($n = 1$) положить $V_0 = \frac{1}{2}\phi^2$ и $V_1 = \mu\delta(x)F(\phi)$, где $F(\phi)$ - некоторая нелинейная функция поля ϕ , а $\delta(x)$ - функция Дирака. При различном выборе функции $F(\phi)$, определяющей энергию взаимодействия поля ϕ с точечной неоднородностью, можно получить различные связанные состояния и моделировать многие эффекты, изученные в [1-3], а также описываемые ниже.

Особый интерес с точки зрения возможных приложений представляют связанные состояния солитонов (флюксонов) в распределенных джозефсоновских переходах с микрон неоднородностями, которые можно приближенно задать δ -функциями^{*}. В одномерном случае состояние такого перехода описывается фазой $\phi(x, t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\phi} + \alpha\dot{\phi} - \phi'' + [1 - \sum \bar{\delta}(x, x_i, \mu_i)] \sin\phi = \gamma, \quad (1.5)$$

где символом $\bar{\delta}$ мы обозначили "размазанную" δ -функцию, т.е. функцию, определенную на небольшом интервале $|x| \leq \epsilon \ll 1$ и удовлетворяющую условию $\int \bar{\delta}(x) dx = 1$. При этом $\phi(x, t)$ определяет мгновенное значение электрического поля в точке x , а $\phi'(x, t)$

* Использование δ -функций удобно при аналитических расчетах. Реальные микрон неоднородности можно описывать δ -функциями лишь при условии, что поле ϕ достаточно мало изменяется на протяжении неоднородности. Здесь мы рассматриваем "размазанные" неоднородности небольшого размера. Это означает, в частности, что параметры в формуле (1.5) ограничены, скажем, $\mu_i \leq 1$ (см. подробнее [1-3]).

- значение магнитного поля (все величины безразмерны, о выборе соответствующих единиц см. [2]). Значения внешнего магнитного поля на концах перехода $x=0$ и $x=l$ определяют $\phi'(0, t)$ и $\phi'(l, t)$

$$\phi'(0, t) = h_0, \quad \phi'(l, t) = h_l. \quad (1.6)$$

Граничные условия могут быть и более сложными, но мы ограничимся рассмотрением наиболее типичных условий (1.6).

Если параметры h_0, h_l, γ , описывающие внешние воздействия на переход, не зависят от времени (параметры μ_i , описывающие неоднородности, мы считаем заданными, хотя и их, в принципе, можно изменять), то в переходе могут существовать статические состояния $\phi(x)$. Число и свойства этих состояний зависят от параметров P , $P = (h_0, h_l, \mu_i, x_i, l, \gamma)$. В общем случае пространство параметров постоянно, а на границах областей меняется скачком. Это явление называют бифуркацией решений, а границы областей соответственно называются поверхностями бифуркации (или поверхностями катастроф).

Для понимания основных физических свойств системы, в которой возможны бифуркации, необходимо прежде всего найти поверхности бифуркаций и число состояний в каждой области. Особый интерес представляют устойчивые состояния. Любое статическое состояние, удовлетворяющее уравнению (1.5) и граничным условиям (1.6), дает экстремум функционалу "свободной" энергии

$$\mathcal{G} = \int_0^l [\frac{1}{2}\phi'^2 + V(x, \phi)] dx + h_0\phi_0 - h_l\phi_l, \quad (1.7)$$

где $\phi_0 \equiv \phi(0)$, $\phi_l \equiv \phi(l)$ и для потенциальной энергии использовано общее обозначение

$$V(x, \phi) = g(x, x_i, \mu_i)(1 - \cos\phi); \quad g = 1 - \sum \bar{\delta}(x, x_i, \mu_i) \quad (1.8)$$

(основные рассуждения этого и следующего разделов по существу не зависят от конкретного вида $V(x, \phi)$). Энергия магнитных полей и токов внутри перехода определяется первым членом в правой части (1.7).

Условие обращения вариации \mathcal{G} в нуль ($\delta\mathcal{G} = 0$) при произвольных вариациях ϕ дает уравнения (1.5) и граничные условия (1.6). Если свободная энергия \mathcal{G} минимальна для некоторого решения $\phi_*(x)$ (т.е. $\delta^2\mathcal{G}[\phi_*] \geq 0$), то решение устойчиво. Это условие устойчивости выполнено, если все собственные значения λ линейной краевой задачи (где $V^{(2)} \equiv V_{\phi\phi}$)

$$-\psi'' + V^{(2)}(x, \phi_*(x))\psi = \lambda\psi, \quad \psi'(0) = \psi'(l) = 0 \quad (1.9)$$

неотрицательны. Если одно из собственных значений задачи (1.9) обращается в нуль, то имеет место бифуркация. Иными словами, уравнение $\lambda(\rho) = 0$

определяет поверхность бифуркаций.

В работе [2] было показано, как находить решения вблизи точек бифуркации (бифуркационная теория возмущений или БТВ), и была решена задача (1.5), (1.6) на полубесконечном интервале ($\ell = \infty$) с одной неоднородностью (в точке X_0). На конечном интервале общая картина более сложна, имеется больше связанных состояний и больше точек бифуркации. Как будет показано ниже, в этом случае встречаются и более сложные бифуркации, которых не было в полубесконечном переходе.

Цель этой работы - численное исследование статических связанных состояний и их бифуркаций при изменении всех параметров (h_0, κ_0, μ, ℓ) = ρ для конечного перехода $0 \leq x \leq \ell$ с одной микрон неоднородностью. Эти состояния определяются решением краевой задачи

$$\phi'' = g(x, \kappa_0, \mu) \sin \phi, \quad \phi'(0) = h_0, \quad \phi(\ell) = 0. \quad (1.10)$$

При этом одновременно решаются задачи (1.10) и (1.9), и основное внимание уделяется определению точек бифуркации. В непосредственной окрестности этих точек численное решение задачи затруднительно, но можно подойти к ним настолько близко, что становится применимой (БТВ). По формулам БТВ тогда можно определить точное положение точек бифуркации и все физические характеристики решений.

2. Бифуркационная теория возмущений и качественный характер решений

Как показано в [2], вблизи точки бифуркации по параметру h_0 (внешнее магнитное поле) решение задачи (1.10) обычно имеет вид

$$\phi(x, h_0) = \phi_c(x) + \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x) + \dots, \quad (2.1)$$

где $\varepsilon = |h_0 - h_c|^{1/2}$, $\phi_c(x)$ - решение при $h_0 = h_c$. Функция f_1 - решение задачи (1.9) при $h_0 = h_c$ (когда $\phi = \phi_c$, $\lambda(h_c) = 0$), а остальные функции f_n , $n \geq 2$ можно вычислять рекуррентно (см. [2]). Разложение (2.1) наиболее типично, оно имеет место, если

$$\int_0^\ell V_c^{(3)}(x, \phi_c) f_1^3(x) dx \neq 0. \quad (2.2)$$

Здесь $V_c^{(n)} \equiv \frac{d^n}{d\phi^n} V(x, \phi) |_{\phi = \phi_c}$. Если интеграл (2.2) обращается в нуль, но

$$\int_0^\ell (V_c^{(3)} f_1^2 f_2 + \frac{1}{6} V_c^{(4)} f_1^4) dx \neq 0, \quad (2.3)$$

то вместо (2.1) можно построить другое разложение

$$\phi(x, h_0) = \phi_c + \bar{\varepsilon} \bar{f}_1 + \bar{\varepsilon}^2 \bar{f}_2 + \dots, \quad (2.4)$$

где $\bar{\varepsilon} = |h_0 - h_c|^{1/3}$, $\bar{f}_1 = f_1$, а остальные функции \bar{f}_n определяются тем же способом, что и f_n (см. [2]). Можно показать, что в этом случае при $h_0 \rightarrow h_c$ сливаются две точки бифуркации, так что, например, при $h_0 > h_c$ вблизи h_c есть две точки бифуркации, при $h_0 = h_c$ - одна, а при $h_0 < h_c$ - ни одной. Пример такого слияния, полученный нами, будет описан ниже. Можно сказать, что в этом случае при $h_0 = h_c$ происходит бифуркация точек бифуркации (или вырожденная точка бифуркации). В нормальном случае (2.1) в точке бифуркации сливаются два решения. При этом одно из собственных значений задачи (1.9) обращается в нуль и при $h_0 \rightarrow h_c$ равно [2]

$$\lambda \approx -2\varepsilon f_1'(0) / \int_0^\ell f_1^2(x) dx. \quad (2.5)$$

Так как знак $f_1'(0)$ может быть как положительным, так и отрицательным, то вблизи $h_0 = h_c$ одно собственное значение обращается в нуль, при $h_0 \neq h_c$ одно из них положительно, а другое отрицательно. Если все остальные собственные значения задачи (1.9) положительны, то положительное собственное значение (2.5) соответствует устойчивому связанному состоянию при $h_0 \neq h_c$. Для обнаружения точек бифуркации не обязательно вычислять все собственные значения линейной задачи. На самом деле в любой точке бифуркации наблюдаемые величины, например, полный поток $\Delta\phi = \phi(\ell) - \phi(0)$, энергия и т.д. будут иметь особенности, например, вблизи регулярной точки бифуркации имеет место разложение [2]

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_c + \varepsilon^2 \phi_c'(0) + \frac{2}{3} \varepsilon^3 f_1'(0) + \dots \quad (2.6)$$

Таким образом, вторая производная \mathcal{J} по h_0 обращается в ∞ при $h_0 = h_c$ ($\varepsilon = 0$). Заметим, что для устойчивого решения $f_1'(0) < 0$. Поэтому при $h_0 \rightarrow h_c$ имеем

$$\frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial h_0^2} \approx \frac{1}{2} f_1'(0) |h_0 - h_c|^{-1/2} + \dots, \quad (2.7)$$

т.е. вблизи h_c функция $\mathcal{J}(h_0)$ выпукла. Как показано в [2], выпуклость \mathcal{J} имеет место и вдали от точки бифуркации для любого устойчивого состояния, даже если рассматривать \mathcal{J} как функцию двух переменных h_0 и h_e . Разложения по ε удобно использовать для определения параметров точек бифуркации по численным расчетам вблизи них. Например, положим

$$\phi_{\pm}(0, h_0) = \phi_{\pm}(0) \pm \varepsilon |f_1(0)| + O(\varepsilon^2).$$

Тогда

$$[\phi_{+}(0, h_0) - \phi_{-}(0, h_0)]^2 = 4(h_0 - h_c) f_1^2(0) + \dots \quad (2.8)$$

Таким образом, линейная экстраполяция величины $[\phi_{+} - \phi_{-}]^2$ вблизи точки, где она обращается в нуль, позволяет найти значения h_c и $f_1^2(0)$. Зная эти величины, можно найти решения с помощью БТВ^[2].

Заметим, что на модели, предложенной в^[4], легко построить все разложения БТВ, а также сравнивать их с точными решениями. Нетрудно смоделировать и слияние точек бифуркации. Мы предполагаем сделать это в отдельной работе.

3. Численный алгоритм

Рассмотрим семейство задач (1.10), зависящих от функции $\bar{\delta}(x, x_0, \mu)$, моделирующей простейшую микронеоднородность. В соответствии с этим $\bar{\delta}$ достаточно гладкая функция, быстро меняющаяся на отрезке малой, но конечной длины. В настоящей работе для проведения численных расчетов выбрана модель

$$\bar{\delta} = \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\rho}{\mu} (x - x_0) \right]. \quad (3.1)$$

Основная задача заключается в нахождении точек бифуркации решений задачи (1.10) в пространстве параметров. В общем случае число независимых параметров задачи равно пяти: ℓ - длина перехода, x_0 - координата неоднородности, μ - ее размер, h_0 и h_c - напряженности магнитного поля на концах перехода. Исходя из физических соображений (см. ^[1-3]) рассматриваются следующие области изменения параметров: $4 \leq \ell \leq 10$, $2 \leq x_0 \leq 6$, $0,4 \leq \mu \leq 1$, $|h_0| \leq 2,5$, причем всегда полагаем $h_c = 0$.

При заданных значениях ρ параметров нелинейная граничная задача (1.10) имеет несколько нетривиальных решений $\phi_{\pm}(x, \rho)$, $k = 1, 2, \dots, k_{\max}$, для которых выполняется, в частности, следующее свойство симметрии: если $\phi(x, h_0)$ - решение при фиксированных значениях величин ℓ , x_0 и μ , то функция $-\phi(x, -h_0)$ тоже является решением. Число обнаруженных нетривиальных решений существенно зависит от ρ и для указанных выше значений параметров менялось от $k_{\max} = 4$ до $k_{\max} = 24$. Решения отличаются значениями энергии

$$E_k(\rho) = \int_0^{\ell} \left[\frac{1}{2} \phi_k'^2 + (1 - \bar{\delta})(1 - \cos \phi_k) \right] dx \quad (3.2)$$

(или "свободной" энергии $\mathcal{E}_k(\rho) = E_k(\rho) + h_0 \phi_k(0, \rho)$) и значениями полного потока

$$\Delta \phi_k(\rho) = \phi_k(\ell, \rho) - \phi_k(0, \rho). \quad (3.3)$$

Для исследования устойчивости каждому решению ставится в соответствие задача Штурма-Лиувилля (1.9) (далее индекс k опускаем)

$$-\psi'' + [1 - \bar{\delta}(x, x_0, \mu)] \cos \phi(x, \rho) \psi = \lambda \psi, \quad (3.4)$$

$$\psi'(0) = \psi'(\ell) = 0.$$

Знак первого собственного значения λ_0 задачи (3.4) определяет устойчивость или неустойчивость соответствующего $\phi(x, \rho)$ (ср. с^[5]). При $\lambda_0 > 0$ решение устойчиво, при $\lambda_0 < 0$ - неустойчиво. Уравнение $\lambda_0(\rho) = 0$ определяет одну из поверхностей бифуркаций в пространстве параметров.

Исследование проводилось в следующей последовательности. Для конкретных значений ρ численным методом, описанным ниже, отыскивались нетривиальные решения граничной задачи (1.10). Для каждого найденного решения находились характеристики $E(\rho)$, $\mathcal{E}(\rho)$ и $\Delta \phi(\rho)$. Интеграл в правой части (3.2) вычислялся по квадратурной формуле Симпсона и, независимо, по сплайн-квадратурной формуле^[6]. При этом относительная погрешность $|(\mathcal{E}_{\text{spe}} - \mathcal{E}_{\text{imps}}) / \mathcal{E}_{\text{spe}}|$ для любых рассматриваемых значений ρ не превышала 2%. Далее методом итераций подпространств^[7] находились первые три собственных значения задачи Штурма-Лиувилля (3.4), соответствующей каждому из обнаруженных решений. При изучении зависимостей $\lambda_0(\rho)$, $E(\rho)$, $\mathcal{E}(\rho)$ и $\Delta \phi(\rho)$ решение, найденное для заданного набора ρ , рассматривалось как начальное приближение для решения, соответствующего новому, достаточно близкому, набору значений параметров. Обсуждение полученных результатов см. ниже в разделе 4.

Для решений нелинейной граничной задачи (1.10) использовался непрерывный аналог метода Ньютона (НАМН), предложенный в^[8]. Применению НАМН для решения нелинейных задач математической физики посвящено большое количество работ (см., например, ^[9-12]). Дискретная реализация НАМН на основе метода Эйлера сводит исходную задачу к последовательности линейных задач

$$-u_i'' + Q_i(x) u_i = F_i(x), \quad (3.5)$$

$$u_i'(0) = u_i'(\ell) = 0, \quad (3.6)$$

$$y_{i+1}(x) = y_i(x) + \tau_i u_i(x), \quad (3.7)$$

для функций $y_i(x)$ и $u_i(x)$, аппроксимирующих на сетке $\theta = \{t_i, i=0, 1, 2, \dots, t_{i+1} = t_i + \tau_i\}$ с шагом $0 < \tau_i \leq 1$ функции $\varphi(x, t)$ и $\psi(x, t)$ непрерывного параметра $t \in [0, \infty)$. Здесь положено $Q_i \equiv (1 - \delta) \cos y_i(x)$, $F_i \equiv y_i'' - (1 - \delta) \sin y_i(x)$. Начальное приближение считается заданным. Тогда на i -м шаге функция $u_i(x)$ находится из (3.5), (3.6); далее по формуле (3.7) вычисляется функция $y_{i+1}(x)$.

Полную дискретизацию, необходимую для применения ЭВМ, можно осуществить, например, конечно-разностной аппроксимацией задачи (3.5), (3.6) на некоторой сетке $\bar{\omega} = \{x_n, n=0, 1, 2, \dots, N, x_{n+1} = x_n + h_n\}$ с, вообще говоря, переменным шагом h_n . Сходимость таким образом полученного итерационного процесса изучалась в работе [12].

В настоящей работе для решения линейной задачи (3.5), (3.7) использовались кубические интерполяционные сплайны.

Пусть задано достаточно гладкое однопараметрическое семейство функций $\phi_0(x, c)$, где c - вещественный параметр. При фиксированном значении c в качестве начального приближения брался кубический сплайн $S_0(x, c)$, интерполирующий в узлах сетки $\bar{\omega}$ функцию $\phi_0(x, c)$ и удовлетворяющий краевым условиям (3.6). Далее строились последовательности $\sigma_i(x)$ и $S_i(x)$ кубических сплайнов, удовлетворяющих на сетке $\bar{\omega}$ уравнениям

$$-\sigma_i'' + \bar{Q}_i(x) \sigma_i = \bar{F}_i(x), \quad (3.8)$$

$$\sigma_i'(0) = \sigma_i'(\ell) = 0, \quad (3.9)$$

$$S_{i+1}(x) = S_i(x) + \tau_i \sigma_i(x), \quad (3.10)$$

где $\bar{Q}_i \equiv (1 - \delta) \cos S_i(x)$ и $\bar{F}_i = S_i''(x) - (1 - \delta) \sin S_i(x)$. Задача (3.8), (3.9) эквивалентна сплайн-разностной схеме (для простоты рассматривается сетка с постоянным шагом $h = \ell/(N-1)$)

$$\begin{aligned} (6 + 2h^2 \bar{Q}_{i,0}) \sigma_{i,0} + (-6 + h^2 \bar{Q}_{i,1}) \sigma_{i,1} &= h^2 (2\bar{F}_{i,0} + \bar{F}_{i,1}), \\ (-6 + h^2 \bar{Q}_{i,n-1}) \sigma_{i,n-1} + (12 + 4h^2 \bar{Q}_{i,n}) \sigma_{i,n} + (-6 + h^2 \bar{Q}_{i,n+1}) \sigma_{i,n+1} &= \\ = h^2 (\bar{F}_{i,n-1} + 4\bar{F}_{i,n} + \bar{F}_{i,n+1}); \quad n = 1, 2, \dots, N-1, & \\ (-6 + h^2 \bar{Q}_{i,N-1}) \sigma_{i,N-1} + (6 + 2h^2 \bar{Q}_{i,N}) \sigma_{i,N} &= h^2 (\bar{F}_{i,N-1} + 2\bar{F}_{i,N}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

которая решалась немонотонной прогонкой [9]. В формулах (3.11) для произвольной функции $f(x, t)$ положено $f_{i,n} = f(x_n, t_i)$.

Выбором значений параметра τ_i можно в широких пределах регулировать сходимость процесса. В настоящей работе используется алгоритм, предложенный в [13].

В табл. приведены результаты численной проверки сходимости решений при уменьшении числа узлов сетки $\bar{\omega}$. Решения вычислялись на трех сетках с 129, 65, 33 узлами. Для сравнения приведены значения минимального собственного числа и потока. Сходимость характеризуется отношением $\gamma = |(f_h - f_{h/2}) / (f_{h/2} - f_{h/4})|$, где f_h , $f_{h/2}$ и $f_{h/4}$ - значения величины f на сетках с шагом h , $h/2$ и $h/4$. Из таблицы видно, что полученные значения для γ близки к теоретическому значению $\gamma = 4^{1/4}$, соответствующему квадратичной по шагу h сходимости. Все приведенные ниже результаты получены на сетке со 129 узлами.

4. Описание основных результатов

4.1. Короткий переход

Наиболее простая картина связанных состояний получается в достаточно коротком переходе. При $\ell = 4$, $x_0 = 2$ существует лишь одно устойчивое состояние. Его полный поток $\Delta\phi$ монотонно растет с ростом h_0 между точками бифуркации $-h_c \leq h_0 \leq h_c$, где $h_c < 2$. В этом состоянии магнитное поле проникает с левого конца, лишь незначительно концентрируясь на неоднородности (такое состояние мы называем мейсснеровским). Если бы не было неоднородности, то полный поток в переходе при $h_0 = 2$ достиг бы значения $\Delta\phi = \mathcal{E}$, низшее собственное значение обратилось бы в 0, и при $h_0 \geq 2$ в переход вошел бы солитон. Для однородного перехода, таким образом, $h_c = 2$. В этой точке бифуркации сливаются стабильное и нестабильное решения. Первое (M_1) имеет при $h_0 < 2$ меньший поток и меньшую энергию, чем второе (M_2). При наличии притягивающей микро неоднородности эта точка бифуркации сохраняется, но $h_c < 2$; причем h_c очень медленно убывает при увеличении μ . Распределение магнитного поля $h = \phi'$ в состояниях M_1 и M_2 представлено на рис. 1.

Как показано в [2], в полубесконечном переходе ($\ell \rightarrow \infty$) при $x_0 = 2$ существуют и другие устойчивые статические состояния, в которых поток концентрируется вблизи неоднородности. Ниже будет показано, что такие состояния возникают уже при небольшом увеличении ℓ (и фиксированных значениях $x_0 = 2$ и $0.4 \leq \mu \leq 1$). В рассматриваемом случае других устойчивых состояний нет, но при достаточно малых значениях $|h_0|$ устройство неустойчивых состояний более сложно. Проще всего понять его на графике зависимости низшего собственного значения λ_0

Таблица

N_{∞}	$\phi(0)$	$\phi(l)$	$\lambda_0 \cdot 10^2$	$\Delta\phi$
33	- 0.178694	6.044059	- 2.187358	6.222753
65	- 0.179072	6.044398	- 1.633353	6.223469
129	- 0.179167	6.044481	- 1.494536	6.223647
γ	1.9664	4.0844	3.9909	4.0225

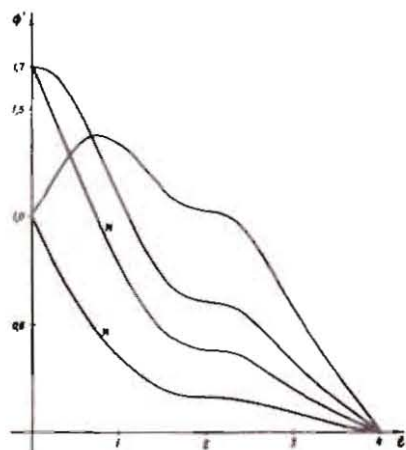


Рис. 1

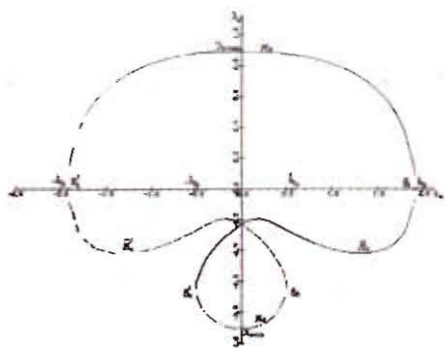


Рис. 2

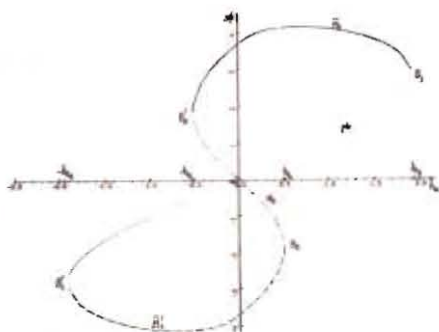


Рис. 3

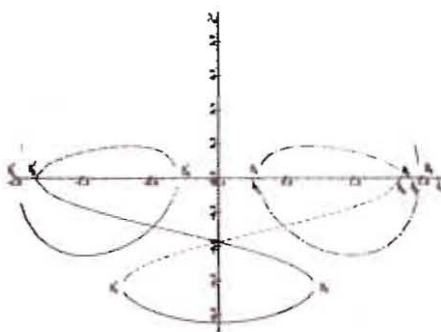


Рис. 4

от h_0 (рис.2). На рисунке ясно видно, что помимо точки бифуркации $B_2 (h_0 = h_{c2})$ и симметричной точки $B_2' (h_0 = -h_{c2})$, имеются еще две точки бифуркации $B_2 (h_0 = h_{c2})$ и $B_2' (h_0 = -h_{c2})$, в которых сливаются два неустойчивых состояния. Устойчивому состоянию M_2 соответствует кривая $B_1 B_1'$. Неустойчивому состоянию M_1 соответствует кривая $B_1 B_2'$, а состоянию M_1' - кривая $B_1' B_2$. Состояние M_1 существует на интервале $-h_{c2} < h_0 < h_{c1}$, а состояние M_1' - на интервале $-h_{c1} < h_0 < h_{c2}$. Магнитные потоки $\Delta\phi$ всех состояний резко отличаются (рис.3). На отрезке $-h_{c2} < h_0 < h_{c2}$ существует еще одно неустойчивое состояние M_2 (см.рис.2,3). Заметим, что в точках бифуркации B_2 и B_2' нижнее собственное значение не обращается в нуль, а имеет особенность (рис.2). Соответствующую особенность (обращение производной по h_0 в ∞) имеет и $\Delta\phi$ (рис.3).

4.2. Образование связанного состояния при увеличении длины перехода

Если, сохраняя значение $\chi_0 = 2$, $\mu = 1$, увеличивать l , то в интервале $4 \leq l \leq 4,4$ происходит резкая перестройка состояний с образованием четырех новых точек бифуркации B_3, B_3', B_4, B_4' (см. рис.4). При дальнейшем увеличении l расстояние между точками B_3, B_4 (и B_3', B_4') увеличивается, так что стабильные состояния существуют в достаточно широком интервале значений $h_0: h_{c3} < h_0 < h_{c4}$, $-h_{c3} < h_0 < -h_{c4}$. При увеличении l величина h_{c4} остается ограниченной снизу положительным числом. Приведем зависимость первого собственного числа λ_0 от h_0 при $l = 7$, $\chi_0 = 2$, $\mu = 1$ (рис.5). Здесь кривая $B_1 B_1'$ соответствует стабильному мейсснеровскому состоянию M_2 , $B_3 B_4$ и $B_4' B_3'$ соответствуют новым стабильным состояниям. Солитону (антисолитону) между правой границей и неоднородностью соответствует кривая $B_3 B_4'$ (соот. $B_3' B_4$). Модуль собственного значения λ_0 такого состояния при увеличении l убывает. Физически это означает, что солитон становится "почти свободным".

Для полноты представления различных состояний приведем их другие графические характеристики. На рис.6,7 построены графики зависимости полного потока и энергии (не включающей граничной энергии) от h_0 при $l = 5$, $\chi_0 = 2$, $\mu = 1$. Отметим, что для стабильных состояний ($B_4 B_3, B_4' B_3'$, $B_1' O B_1$) полный поток возрастает с ростом h_0 , а энергия растет при возрастании $|h_0|$.

Приведем также зависимость "свободной" (или "полной") энергии от h_0 (рис.8). Ветвь $O B_1 B_4 B_3 O'$ кривой $\mathcal{E}(h_0)$ качественно совпадает с полученной в работе [2]. В частности, хорошо видно, что кривые $O B_1$ и $B_4 B_3$, соответствующие устойчивым состояниям, выпуклы.

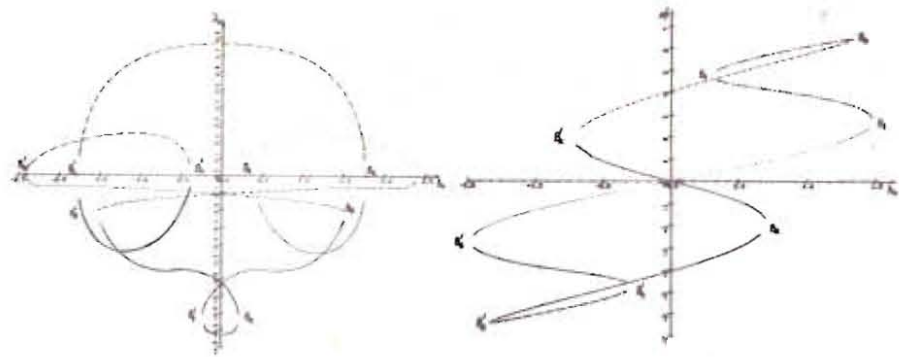


Рис. 5

Рис. 6

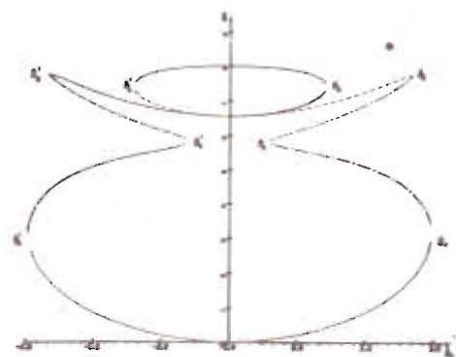


Рис. 7

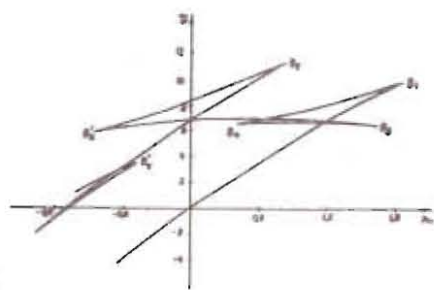


Рис. 8

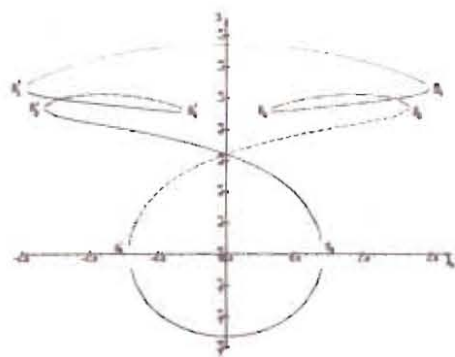


Рис. 9

На рис. 9 приведена зависимость второго собственного числа от h_0 . Это собственное число обращается в нуль в точках бифуркации B_2, B_2' и имеет особенности в точках $B_1, B_1', B_3, B_3', B_4, B_4'$ (ср. с рис. 4).

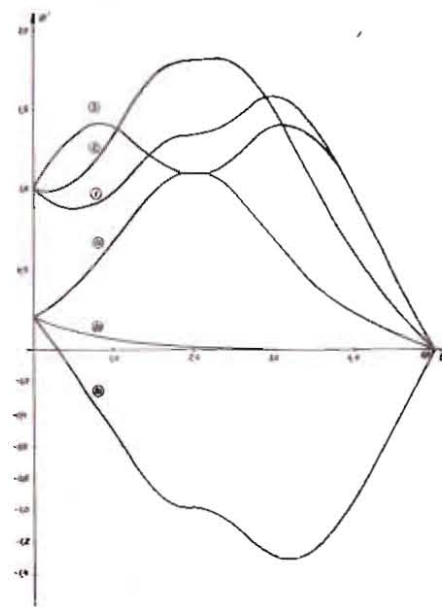


Рис. 10

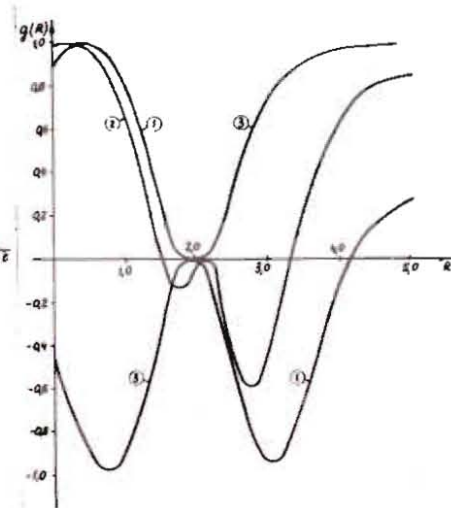


Рис. 11

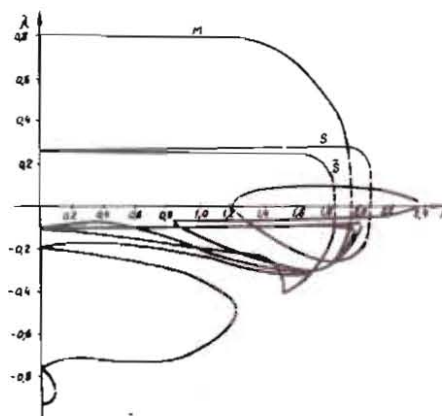


Рис. 12

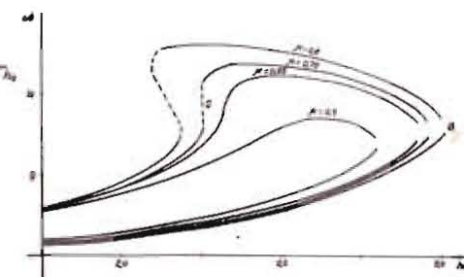


Рис. 13

На рис. 10 приведены распределения магнитного поля $\phi'(x)$ вдоль перехода для некоторых из решений при $h_0=1$ и $h_0=0,2$. Кривая (2) соответствует ветви $B_3 B_3'$, кривая (1) - $B_3 B_2'$, кривая (3) - $B_1 B_4$ (при $h_0=1$). Кривая (1а) соответствует ветви $B_3 B_3'$, кривая (2а) - ветви $B_2 B_3'$, (3а) - ветви $B_1 B_1'$. Решение (2) наиболее похоже на солитон локализованный на неоднородности и несколько деформированный взаимодействием с границей $x=0$. В неустойчивых решениях (1) и (3) поток концентрируется вне неоднородности.

Наконец, на рис. 11 приведены графики "потенциалов" уравнений (3.4), соответствующих различным решениям при $l=5$, $x_0=2$, $\mu=1$ и $h_0=1$. Кривые (1) и (3) относятся к неустойчивым решениям на ветвях $B_3 B_3'$ и $B_1 B_4$ (см. рис. 4). Для них $\lambda_0 \approx -0,211$ и $\lambda_0 \approx -0,439$ соответственно. Кривая (2) соответствует устойчивому решению на ветви $B_3 B_3'$ ($\lambda_0 \approx 0,178$). Видно, что потенциал устойчивого состояния имеет самую "мелкую" яму, что и обеспечивает положительный знак соответствующего наименьшего собственного значения.

4.3. Зависимость решений от x_0

С увеличением x_0 могут происходить новые явления, связанные с тем, что между левым концом и неоднородностью может быть помещаться большой поток. При небольшом l общая картина качественно не отличается от рассмотренной в п. 4.1. Например, если $l=5$, $x_0=3$, $\mu=1$, то структура состояний в переходе примерно такая же, как в случае $l=4$, $x_0=2$, $\mu=1$, отличия лишь количественные (h_{c2} ближе к 2, h_{c3} в 2,5 раза больше). При увеличении l также появляется новое устойчивое связанное состояние, которое может существовать и при $h_0=0$ (иначе говоря, $h_{c4} < 0$). Это состояние естественно считать несколько деформированным солитоном, локализованным на неоднородности. Чтобы он мог существовать, расстояния от неоднородности до границ должны быть достаточно большими (достаточно, чтобы x_0 , $l-x_0 \geq 3$). Это устойчивое состояние существует в широком интервале значений h_0 . Например, при $l=10$, $x_0=3$, $\mu=1$ оно существует в интервале $h_{c4} \approx -0,56 \leq h_0 \leq 2,46$. Его основная частота ω_0 , соответствующая минимальному собственному значению λ_0 , приблизительно постоянна на интервале $-0,2 < h_0 < 2,3$ и равна $\omega_0 \approx 0,5$. Она начинает быстро падать лишь вблизи точек бифуркации h_{c3} и h_{c4} . Наличие устойчивого связанного состояния при $h_0=0$ и его существование в широком интервале значений h_0 дает такой переход особенно интересным для приложений.

Нестабильные состояния мы не будем описывать, их достаточно много (при $l=8$ мы находили до 8 состояний при $0,2 \leq h_0 \leq 1,8$, а при

$l=10$ - до 12 состояний). Соответственно, имеется много точек бифуркации.

Для приложений наиболее интересно, что при достаточно большом x_0 возникает третье устойчивое состояние. Например, при $l=10$, $x_0=5$, $\mu=1$, помимо мейсснеровского состояния M и связанных состояний солитона (S) и антисолитона (\bar{S}), локализованных на неоднородности, существует еще две устойчивых ветви (в интервалах $1,2 < |h_0| < 2,38$). Заметим, что в этом случае локализованные состояния солитона и антисолитона существуют в очень широких интервалах значений $-1,87 < h_0 < 2,08$ и $-2,08 < h_0 < 1,87$. Таким образом, в интервалах $1,25 \leq |h_0| \leq 1,85$ имеется четыре ясно выраженных устойчивых состояния (см. рис. 12). При этом для мейсснеровского и солитонного состояний $\omega_0 \approx 0,5$, а для нового состояния $\omega_0 \approx 0,3$. Наличие столь богатой структуры устойчивых состояний в простейшем переходе представляется довольно неожиданным. Во всяком случае, в аналитических расчетах полубесконечного перехода¹²⁾ удалось найти лишь два устойчивых состояния.

Довольно неожиданно также обнаруженное нами весьма частое слияние точек бифуркации, происходящее при весьма малом изменении параметров. На диаграммах зависимости $\lambda_0(h_0)$ это вырождение бифуркаций выглядит как исчезновение петли. Подобным же образом выглядит слияние точек бифуркации на диаграммах зависимости $\Delta\phi(h_0)$ и $\mathcal{F}(h_0)$.

Вблизи точки слияния двух точек бифуркации можно найти аналитическое выражение для поверхности бифуркации. Это будет сделано в отдельной работе.

4.4. Зависимость решений от μ

При малых значениях μ мы не наблюдали существенной качественной зависимости общей картины от величины μ . Однако для достаточно больших μ при изменении μ может происходить рождение новых точек бифуркации. На рис. 13 изображена зависимость $\Delta\phi$ от h_0 для $l=10$, $x_0=3$ при различных μ . Нижняя ветвь соответствует стабильному состоянию, сливающемуся в точке B с нестабильным. При $\mu \approx 0,7$ в точке C , по-видимому, происходит рождение двух новых точек бифуркации. Однако состояния, соответствующие пунктирным линиям численным методом найти не удалось. Мы предполагаем в дальнейшем изучить это явление аналитическими методами, поскольку всегда удается настолько близко подойти к точке бифуркации, что становится применимой БТВ. Естественно, что еще большие трудности возникают при попытках численно находить решения вблизи слияния точек бифуркации. Очевидно, необходимо найти хорошее аналитическое описание такого

слияния и попытаться модифицировать численный метод таким образом, чтобы он позволял находить и состояния, образовавшиеся после слияния точек бифуркации.

б. Заключение

Кратко сформулируем основные результаты и их значение для физических приложений. Основной результат состоит в том, что все статические состояния - устойчивые и неустойчивые - можно эффективно находить численным методом. При этом удается настолько близко подходить к точкам бифуркации, что численные решения можно считать с аналитическими, полученными с помощью бифуркационной теории возмущений. Это позволяет с достаточной точностью находить точки бифуркации и решения в точках бифуркации.

Как показано выше, даже для простейшей системы с одной микро-неоднородностью получается богатая структура связанных состояний с большим числом точек бифуркации и сложной поверхностью бифуркаций.

Для приложений особенно интересна возможность реализации перехода с тремя устойчивыми ветвями состояний (например, $l=7, x_0=2, \mu=1$) и даже с пятью устойчивыми ветвями ($l=10, x_0=5, \mu=1$). При увеличении числа неоднородностей число состояний и их бифуркаций, очевидно, возрастает. Разумеется, система с двумя неоднородностями заслуживает специального численного исследования. При естественных с физической точки зрения ограничениях на ее параметры это исследование, по-видимому, удастся выполнить методами этой работы.

Наибольшие трудности при численных расчетах связаны с очень резкими изменениями качественной структуры связанных состояний при незначительном изменении параметров и с тем, что нет априорной информации о структуре поверхностей бифуркации в пространстве параметров. Это требует большого объема вычислений. Другая трудность связана с наглядным представлением результатов. Идеально, нужно было бы построить проекции поверхностей бифуркаций на различные оси (типа рис.б). В нашем распоряжении, к сожалению, пока нет достаточного количества точек на бифуркационных кривых. Наиболее интересно было бы найти области, в которых существуют стабильные состояния различного типа. Тогда можно было бы указать оптимальные параметры, при которых можно было бы изготавливать переходы с тем или иным "портретом" устойчивых состояний.

Пока мы можем выделить следующие типичные "портреты" переходов.

1. Одна устойчивая (мейсснеровская) ветвь (рис.2,4, типичные параметры $(l, x_0, \mu) = (4, 2, 1)$.

2. Три устойчивых ветви:

а) мейсснеровская ветвь и две ветви, соответствующие солитоноподобным устойчивым состояниям. (Рис.6-8), типичные параметры $(7, 2, 1)$;

б) мейсснеровская ветвь и две ветви, соответствующие солитону и антисолитону, локализованным на неоднородности; эти состояния существуют и при $h_0=0$ (типичные параметры $(8, 3, 1)$).

3. Пять устойчивых ветвей (типичные параметры $(10, 5, 1)$).

Заметим, что на динамику переходов между различными состояниями при изменении во времени, скажем h_0 или других внешних воздействий, будет также существенно влиять и структура уровней нестабильных состояний. Особенно это относится к долгоживущим состояниям (с малыми значениями λ_0). Конкретная роль этих состояний в динамике процессов в джоузефовском переходе пока остается неясной. В связи с этим возникает интересная задача: выяснить в численных экспериментах динамику процессов создания различных устойчивых связанных состояний в переходе типа I-III посредством изменения внешних полей h_0, h_c или же приложением внешнего тока j .*)

Выполненное выше исследование открывает возможности как для численных, так и для реальных физических экспериментов с переходами, содержащими неоднородности.

В заключение подчеркнем, что методы данной работы можно использовать и для изучения связанных состояний и их бифуркаций в других физических системах с неоднородностями, например, в магнетиках. Можно попытаться применить их и к задачам теории элементарных частиц, например, в теории взаимодействия полей Янга - Миллса с источниками или в солитонных моделях частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. Письма в ЖЭТФ, 1982, 35, с.470.
2. Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. ЖЭТФ, 1984, 86, с.1527.
3. Filippov A.T., Galpern Yu.S. Solid State Comm., 1983, 48, p.665.
4. Филиппов А.Т. Труды III Международ. симпозиума по избранным проблемам статистической механики. ОИЯИ, ДП7-84-850, Дубна, 1984.

*) В работах /15/ выполнены численные эксперименты, в которых изучали процессы притяжения солитона к неоднородности. В некоторых расчетах наблюдалась временная "задержка" решений на конфигурациях, соответствующих нестабильным решениям.

5. Касчиев М.С. и др. ОИЯИ, PII-84-832, Дубна, 1984.
6. Завьялов Ю.С. и др. Методы сплайн-функций, М., Наука, 1980.
7. Bathe K.J., Wilson E. Numerical Methods in Finite Element Analysis, 1976.
8. Гавурин М.К. Изв. ВУЗ, Математика, 1958, т. 5/6/, с. 18.
9. Жидков В.П., Пузынин И.В. ДАН СССР, 1967, 174, 2, с.271.
10. Жидков В.П., Пузынин И.В. ЭВМ и МФ, 1969, т. 9, № 2, с.442.
11. Жидков В.П., Макаренко С.П., Пузынин И.В. ФЭЧАЯ, т. 4, вып. I, 1973.
12. Баатар Д., Пузынина Т.П., Пузынин И.В. ОИЯИ, PII-82-97, Дубна, 1982.
13. Ермаков В.В., Калиткин Н.Н. ЭВМ и МФ, 1981, т. 21, № 2, с.491.
14. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М., Наука, 1978.
15. Казача Г.С., Сердюкова С.М., Филиппов А.Т. ОИЯИ, PII-84-76, Дубна, 1984; ОИЯИ, PII-85-60, Дубна, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 ноября 1985 года.

Вниманию организаций и лиц, заинтересованных в получении публикаций Объединенного института ядерных исследований

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ, включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

ИНДЕКС	ТЕМАТИКА	Цена подписки на год
1.	Экспериментальная физика высоких энергий	10 р. 80 коп.
2.	Теоретическая физика высоких энергий	17 р. 80 коп.
3.	Экспериментальная нейтронная физика	4 р. 80 коп.
4.	Теоретическая физика низких энергий	8 р. 80 коп.
5.	Математика	4 р. 80 коп.
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия	4 р. 80 коп.
7.	Физика тяжелых ионов	2 р. 85 коп.
8.	Криогеника	2 р. 85 коп.
9.	Ускорители	7 р. 80 коп.
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных	7 р. 80 коп.
11.	Вычислительная математика и техника	6 р. 80 коп.
12.	Химия	1 р. 70 коп.
13.	Техника физического эксперимента	8 р. 80 коп.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами	1 р. 70 коп.
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях	1 р. 50 коп.
16.	Дозиметрия и физика защиты	1 р. 90 коп.
17.	Теория конденсированного состояния	6 р. 80 коп.
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники	2 р. 35 коп.
19.	Биофизика	1 р. 20 коп.

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79.