

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P11-85-714

В. Чик

АЛГОРИТМ
И ПРОГРАММА ПОСТРОЕНИЯ КАРТ ИЗОЛИНИЙ
В ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ

1985

ВВЕДЕНИЕ

Для изображений карт изолиний в прямоугольных сетках или топологически эквивалентных им сетках существует ряд известных методов^{/9,10/}, которые нашли широкое применение на практике. Относительную точность карт можно повысить путем применения бикубических или параметрических бикубических сплайнов^{/1,4,5/}.

Однако на практике часто встречаются задачи, где получение данных в прямоугольной сетке невозможно, например, при обработке метеорологических, физических, геологических и других измерений. Эти данные могут быть получены опытным путем или рассчитаны, например, путем применения метода конечных элементов, и располагаться в произвольном порядке. Если данные расположены "удобно", т.е. отсутствует несколько точек прямоугольной сетки, то можно восполнить эту сетку достаточно просто, применяя метод наименьших квадратов для функции двух переменных. Если данные расположены в произвольном порядке, то для области измерений не может быть построена неравномерная прямоугольная сетка, как в описанном выше случае; для ее построения требуются более сложные процедуры. Задача построения карт для данных, расположенных в любом порядке, сводится к методу, описанному в^{/9,10/}.

В настоящей работе рассматривается способ построения изолиний для произвольного расположения данных непосредственно на основе построения треугольной сетки.

В первом разделе описан интерполяционный метод для данных, расположенных в произвольном порядке. Его применение позволяет пользователям восполнить прямоугольную сетку и пользоваться программами^{/9,10/}.

Второй раздел содержит описание алгоритма вычерчивания изолиний в треугольных сетках. Преимуществом этого алгоритма, по сравнению с традиционным решением, является уменьшение затрат времени и памяти ЭВМ за счет исключения перехода к прямоугольным сеткам.

Третий раздел содержит спецификацию программ; в заключительном разделе приведено несколько примеров их применения.

1. МЕТОД ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДАННЫХ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В ПРОИЗВОЛЬНОМ ПОРЯДКЕ

Рассмотрим один из традиционных методов интерполяции данных, расположенных в произвольном порядке, который позволяет выполнить построение прямоугольной сетки путем интерполяции данных в треугольной сетке.

Пусть задано множество точек (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, где пара (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ - координаты нерегулярно расположенных точек в плоскости $X-Y$ и $z_i = f(x_i, y_i)$. Нашей целью является построение интерполяционной функции F так, чтобы:

$$z_i = f(x_i, y_i) = F(x_i, y_i) \quad /1.1/$$

и выполнялось условие непрерывности для функции F и ее первых частных производных. Разработанные для решения этой задачи методы в большинстве своем основаны на методе наименьших квадратов для функции двух переменных. Примером этого подхода является работа /8/, где находится подробное описание модифицированного метода наименьших квадратов. Мы уделим внимание методу /2,3/, который основан на представлении области определения функции в виде треугольной сетки /триангуляции/.

При построении треугольной сетки должны быть выполнены следующие три условия:

1.2. Множество вершин треугольной сетки совпадает с множеством данных точек (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$.

1.3. Общим элементом двух треугольников сетки могут быть или вершина, или отрезок /сторона треугольника/, или пустое множество.

1.4. Объединение всех треугольников сетки покрывает область, ограниченную выпуклой границей множества (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$.

Следует отметить, что для множества точек можно построить несколько триангуляций. С другой стороны, количество треугольников и отрезков, составляющих треугольную сетку, построенную при использовании условий 1.2-1.4, определяется соотношениями:

$$N_t = N_0 + 2(N_v - 1), \quad /1.2/$$

$$N_b = 2N_0 + 3(N_v - 1), \quad /1.3/$$

где N_t - количество треугольников, N_b - количество граней треугольной сетки, N_0 - количество точек, лежащих на выпуклой границе области, N_v - количество внутренних точек.

Алгоритмы большинства применяемых на практике программ выполняют триангуляцию области определения функции; они устроены таким образом, что обеспечивают из нескольких возможных вариантов выбор таких треугольников, которые наиболее "близки" к равно-сторонним треугольникам. Это достигается путем применения неко-

торого критерия, эквивалентного критерию максимизации минимального угла треугольника.

Интерполяционный метод /2/ определяет функцию F в виде:

$$F(x, y) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^{5-i} a_{i,j} x^i y^j \quad /1.4/$$

для каждой точки (x, y) некоторого треугольника. Определение коэффициентов полинома /1.4/ происходит отдельно для каждого треугольника и основано на методе конечных элементов /7,8/. Для каждого треугольника следует, согласно /1.7/, определить 21 коэффициент. Значения частных производных $F_x, F_y, F_{xx}, F_{xy}, F_{yy}$ вычисляются локально из значений z_i в точках (x_i, y_i) , лежащих в некоторой окрестности данной вершины треугольной сетки, и вместе со значениями z_i определяют 18 условий для вычисления коэффициентов. Остальные три условия получаются из локально вычисленных производных, направленных нормально серединам сторон треугольника.

Преимуществом описанного выше метода является то, что для приблизительного вычисления частных производных используются локальные данные, расположенные вблизи рассматриваемой точки. Недостатком метода является невозможность обеспечения сглаживания, т.е. отсутствие непрерывности вторых частных производных и гарантий точности из-за неточного вычисления частных производных $F_x, F_y, F_{xx}, F_{xy}, F_{yy}$ в вершинах треугольной сетки, а также частных производных в серединах сторон треугольников. Аналогичные недостатки свойственны и другим интерполяционным методам, применимым для интерполяции данных, расположенных в произвольном порядке.

С другой стороны, реализация интерполяционных методов на ЭВМ, применимых в качестве подготовительного этапа к построению изолиний, сама по себе требует значительных затрат машинного времени и памяти ЭВМ.

В настоящее время в направлении интерполяционных методов для нерегулярно расположенных точек проводятся интенсивные исследования. Поэтому важное значение имеет вопрос выбора подходящего интерполяционного метода для конкретного применения.

2. ПОСТРОЕНИЕ КАРТ ИЗОЛИНИЙ В ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ

Проблема вычерчивания линий уровня для нерегулярно определенных данных не является новой. Эта проблема часто встречается в различных областях науки, особенно в геологии и географии. Применяемые известные методы действуют без построения треугольной сетки. Из-за этого возникают проблемы, связанные с эффектом "слипания" отдельных изолиний и стыковкой различных частей одной

и той же изолинии. Предлагаемый алгоритм позволяет устранить эти проблемы путем применения треугольных сеток. Процесс состоит из двух этапов:

1. Построение треугольной сетки с учетом условий /1.2-1.4/.
2. Построение изолиний для отдельного уровня.

Второй этап включает в себя следующие шаги:

- 2.1. Устранение для заданного уровня вырожденных точек, т.е. точек, в которых плоскость сечения совпадает со значением z_i путем увеличения этого значения на малую величину.
- 2.2. Поиск и маскирование для каждого уровня тех граней сетки, для которых выполняется условие $(z_i - c)(z_j - c) < 0$, где c - значение плоскости сечения, и z_i, z_j - концевые точки грани, т.е. происходит маскирование граней, через которые проходит расследуемая изолиния.
- 2.3. Вычерчивание открытых изолиний, т.е. изолиний, концевые точки которых лежат на выпуклой границе области; при этом точки пересечения изолинии с гранями определяются линейной интерполяцией с одновременным размаскированием граней, через которые проходит изолиния.
- 2.4. Вычерчивание закрытых линий уровня, т.е. изолиний, первая и последняя точки которых совпадают. При построении этих изолиний также происходит размаскирование соответствующих граней.

Шаги 2.3 и 2.4 повторяются до тех пор, пока не будут размаскированы все грани треугольной сетки. Этап 2 повторяется для каждого уровня.

С точки зрения времени центрального процессора ЭВМ, основные затраты его требуются для построения треугольной сетки. Важным вопросом является и выбор подходящей структуры данных для вычерчивания изолиний. При реализации на ЭВМ принят список граней сетки с номерами граней, которые являются по отношению к данной грани соседними, т.е. принадлежат тем же двум треугольникам, что и данная грань.

Преимуществом данного алгоритма является минимизация шагов графопостроителя. Изолинии можно чертить отрезками или сплайнами при помощи соответствующих подпрограмм MTRLN и MTRLN1.

3. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММ

Программа MTRLN

Назначение программы:

Вычисление и построение линий уровня отрезками, соединяющими отдельные точки изолинии на гранях треугольной сетки. Программа позволяет одновременно выполнить построение как выпуклой границы, так и всей треугольной сетки. Выбор размеров рабочих массивов учитываем соотношениями /1.2/ и /1.3/.

Форма обращения:

CALL MTRLN(XD,YD,ZD,IPT,ND,CR,NR,ISD,IVPL,IKON,IPL,IL,IP,WA,IPAR)

Назначение параметров:

XD,YD,ZD - массивы длиной ND, содержащие координаты входных нерегулярно расположенных точек;

IPT - массив размерностью $(6*ND-15)$, используемый для запоминания номеров вершины треугольников;

ND - число входных точек;

CR - массив длины ND, содержащий значения плоскостей сечений;

NR - число сечений;

ISD - массив размерностью $(6*ND,4)$, в котором хранятся номера четырех соседних граней;

IVPL - массив размерностью $(6*ND)$, содержащий 1, если изолиния пересекает данную грань;

IKON - массив размерностью ND, содержащий номера точек выпуклой границы;

IPL - массив размерностью $(6*ND)$, используемый для запоминания номеров граней;

IL - рабочий массив размерностью $(18*ND)$;

IP - рабочий массив размерностью ND;

WA - рабочий массив размерностью $(8*ND)$;

IPAR - параметр, определяющий режим черчения треугольной сетки;

IPAR=0 - отказ от черчения;

IPAR=1 - вычерчивание выпуклой границы;

IPAR=2 - вычерчивание всей треугольной сетки;

Требуемые подпрограммы: IDTANG, INTER,MOVE,TMF.

Общие блоки: отсутствуют.

Язык: Фортран.

Программа MTRLN1

Назначение программы:

Построение и вычерчивание линий уровня при помощи локальных сплайнов. Программа также позволяет вычерчивание выпуклой границы или целой треугольной сетки.

Форма обращения:

CALL MTRLN1(XD,YD,ZD,IPT,ND,CR,NR,ISD,IUPL,IKON,IPL,IL,IP,WA,IPAR,XPK,YPK,MD).

Назначение параметров:

Назначение всех параметров, кроме XPK, YPK и MD, совпадает с назначением подобных параметров программы MTRLN.

XPK, } - рабочие массивы для хранения точек пересечения изолиний
YPK } и граней сетки. Их размерность рекомендуется выбрать $(3*ND)$;
MD - число подынтервалов между двумя соседними точками изолинии при пересечении изолинии сплайнами. Определяет гладкость изолинии.

Требуемые подпрограммы: IDTANG, CRVF11, TMF, MOVE, INTER.

Общие блоки: отсутствуют.

Язык: Фортран.

Программа IDTANG

Назначение программы:

Построение треугольной сетки из исходных данных.

Форма обращения:

CALL IDTANG(ND, XD, YD, NT, IPT, NL, IPI, IL, IP, WA)

Назначение параметров:

NT - число треугольников сетки;

NL - число граней треугольной сетки;

Назначение остальных параметров описано в программе MTRLN.

Требуемые подпрограммы: IDCHNG.

Общие блоки: отсутствуют.

Язык: Фортран.

Программа INTER

Назначение программы:

Вычисление точек изолиний на гранях треугольной сетки при помощи линейной интерполяции.

Форма обращения:

CALL INTER(XD, YD, ZD, I1, I2, XK, YK).

Назначение параметров:

XD, YD, ZD - массивы координат точек;

I1 - номер первой граничной точки грани;

I2 - номер второй граничной точки грани;

XK, YK - координаты точки изолинии на грани, определенной параметрами I1, I2.

Требуемые подпрограммы: отсутствуют.

Общие блоки: отсутствуют.

Язык: Фортран.

Программа CRVF11

Назначение программы:

Вычерчивание изолиний локальными сплайнами.

Форма обращения:

CALL CRVF11(X, Y, LD, IUK, MD)

Назначение параметров:

X, Y - массивы размерностью LD, применяемые для хранения точек изолинии, определенных на гранях треугольной сетки;

LD - число точек изолинии;

IUK - параметр закрытости изолинии;

IUK=0 - изолиния открыта;

IUK=1 - изолиния закрыта;

MD - число подынтервалов между двумя соседними точками изолинии /рекомендуемое значение MD=5/

Требуемые подпрограммы: TMF, MOVE.

Общие блоки: отсутствуют.

Язык: Фортран.

Функция IDXCHG

Применяется для оптимизации выбора треугольников при создании треугольной сетки.

4. ПРИМЕРЫ

Рис.1-10 показывают, как применяются программы MTRLN и MTRLN1 к выбранным данным с различными значениями параметра IPAR. Рис.5 и 10 построены при помощи регулярной сетки методом, аналогичным описанному в /10/. На рис.8 и 9 виден недостаток метода применения локальных сплайнов, состоящих в пересечении изолиний. Этот недостаток можно устранить путем добавления "искусственных точек" в треугольную сетку. При этом z-координаты определяются линейной интерполяцией из трех значений в вершинах треугольника, в котором лежит точка.

Автор признателен за помощь и критические замечания А.А.Карлову и П.Дюришу, а также Т.Ф.Смоляковой и В.А.Степаненко - за помощь в работе.

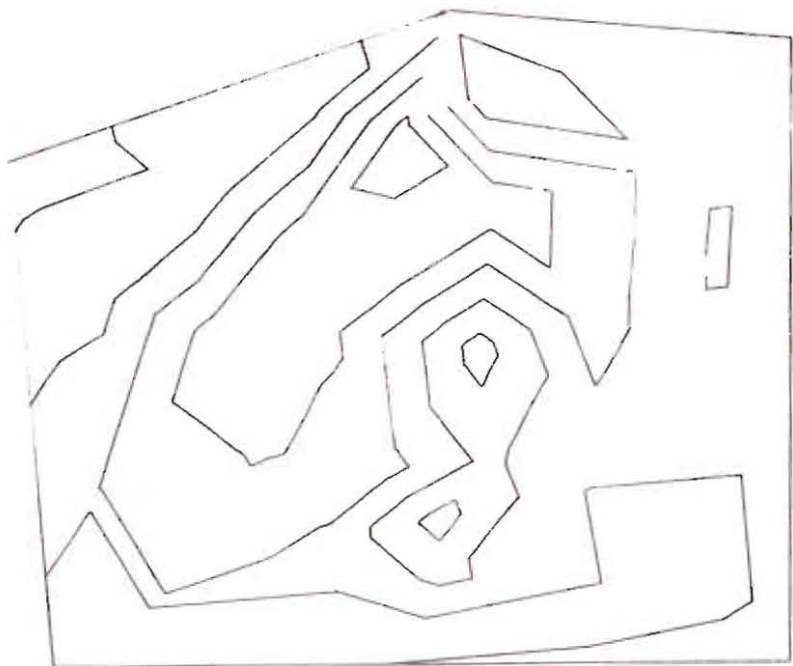


Рис. 1

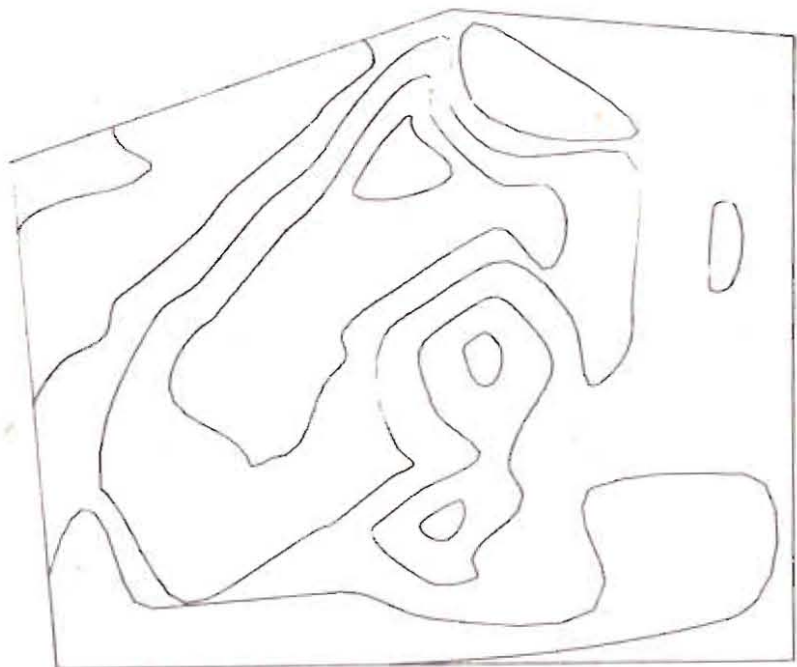


Рис. 2

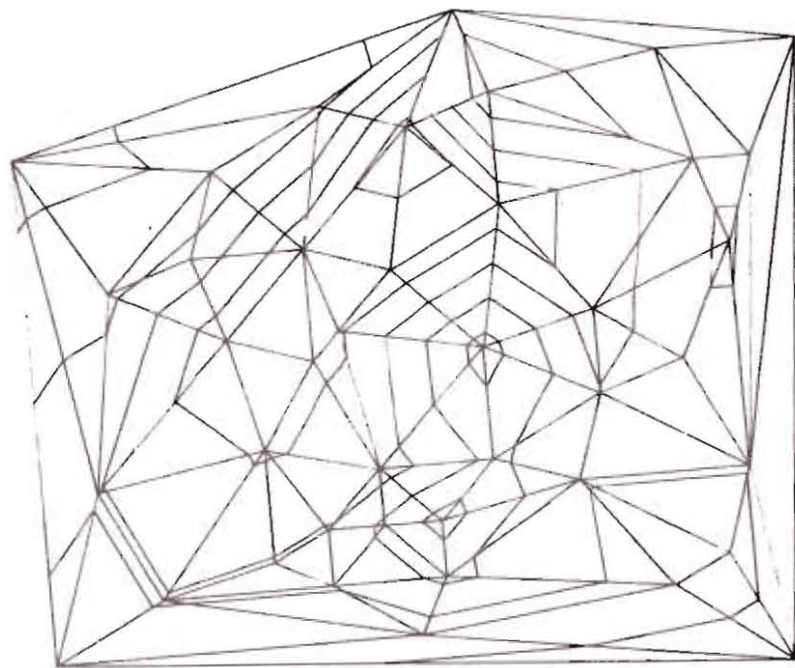


Рис. 3

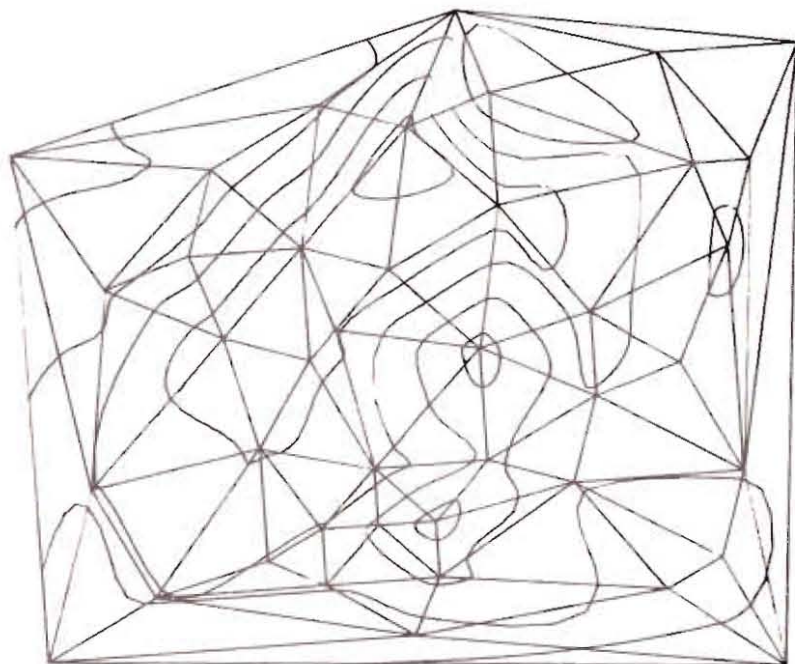


Рис. 4

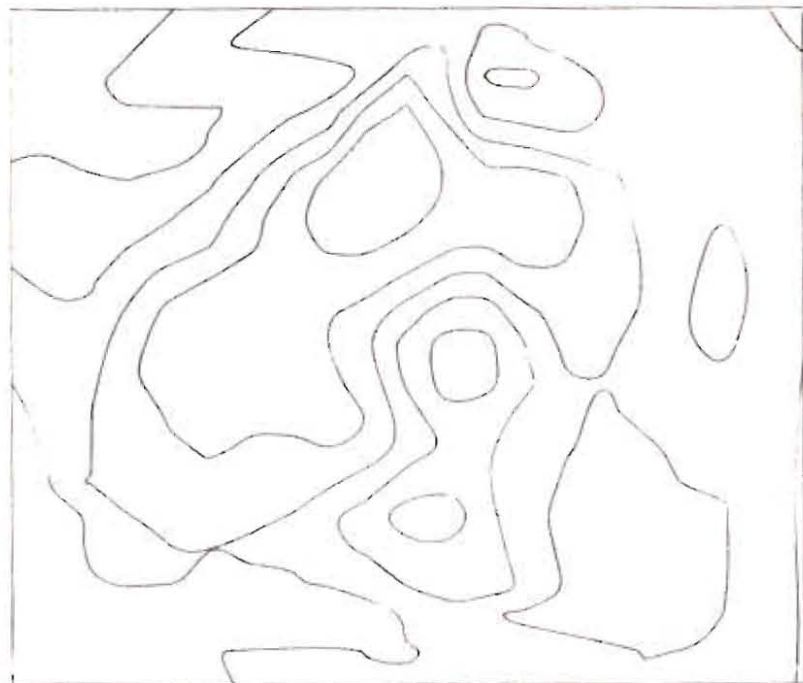


Рис. 5

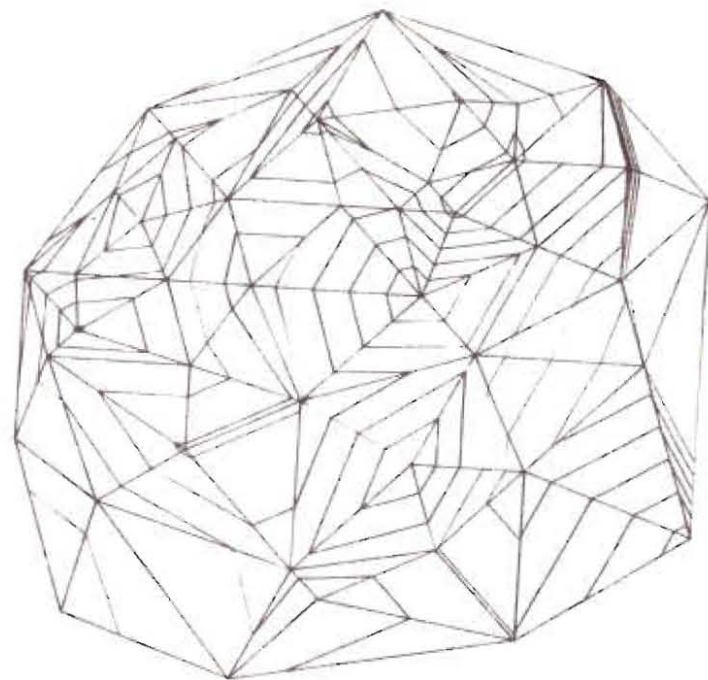


Рис. 7



Рис. 6

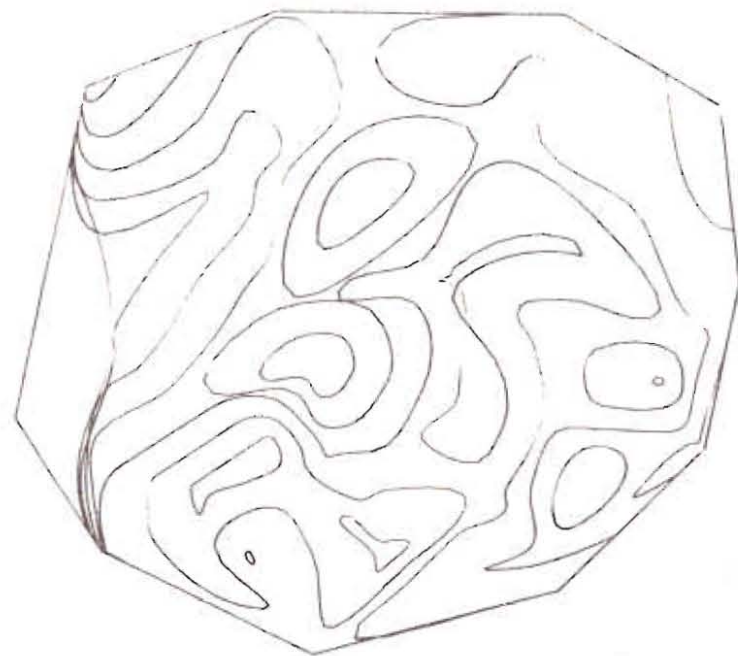


Рис. 8

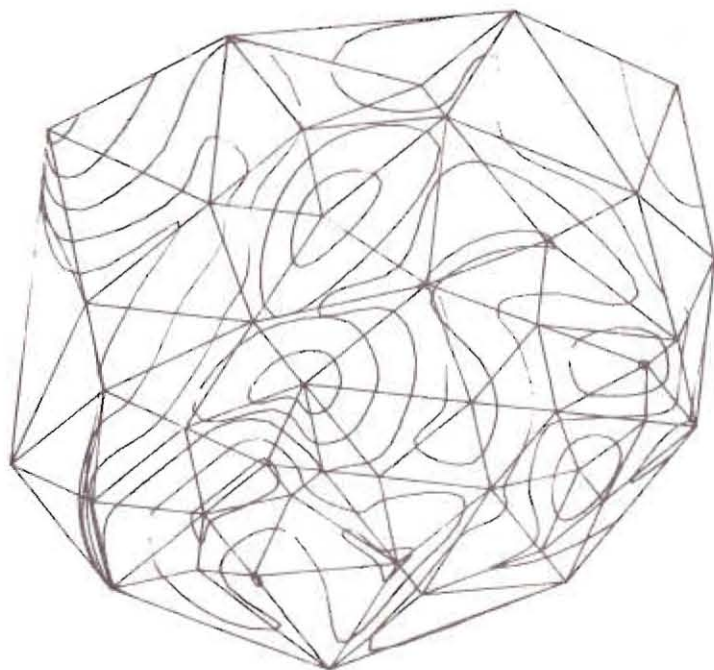


Рис. 9

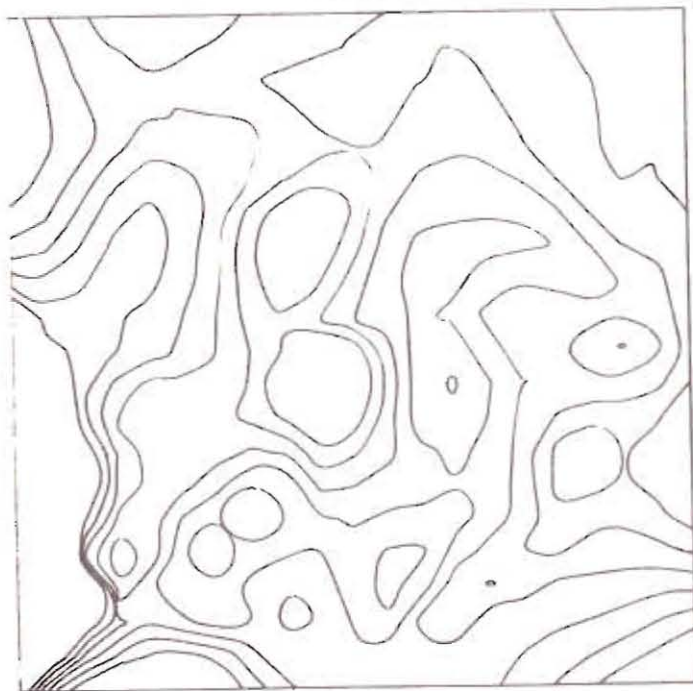


Рис. 10

ЛИТЕРАТУРА

1. Akima H. A Method of Bivariate Interpolation and Smooth Surface Fitting Based on Local Procedures. CACM vol.17, No.1, Jan.1974.
2. Akima H. A Method of Bivariate Interpolation and Smooth Surface Fitting for Irregularly Distributed Data Points CACM, vol.21, No.4, 1978.
3. Akima H. Algorithm 526. Bivariate Interpolation and Smooth Surface Fitting for Irregularly Distributed Data Points. CACM, vol.21, No.4, 1978.
4. Fergusson J. Multivariable Curve Interpolation. JACM, vol.11, No.2, 1964.
5. De Boor C. Bicubic Spline Interpolation J.Math.and Phys. 4, 1962.
6. Franke R., Nielson G. Smooth Interpolation of Large Sets of Scattered Data. IJNME, vol.15, 1980.
7. Zenisek A. Interpolation Polynomials on the Triangle Numer. Math.15, 1970.
8. Zlamal M. On the Finite Element Method Numer.Math.12,1968.
9. Баяковский Ю.М. и др. ГРАФОР. Комплекс графических программ на ФОРТРАНе. Часть 1. Препринт ИПМ АН СССР, Москва, 1983 г.
10. Баяковский Ю.М., Шайтура С.В. ГРАФОР. Комплекс графических программ на ФОРТРАНе. Часть 2. Препринт ИПМ АН СССР, Москва, 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 октября 1985 года

Чик В.

P11-85-714

Алгоритм и программа построения
карт изолиний в треугольных сетках

Рассматривается способ построения изолиний для произвольного расположения данных на основе построения треугольной сетки. Описан интерполяционный метод, применение которого позволяет преобразовать треугольную сетку в прямоугольную и пользоваться традиционными методами. Предложены алгоритм и программа на его основе для вычерчивания изолиний непосредственно в треугольных сетках, что позволяет уменьшить затраты времени и памяти ЭВМ по сравнению с традиционными методами.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Chik V.

P11-85-714

Algorithm and Program for Plotting
Isoline Maps in Triangular Nets

Isoline plotting for arbitrary data scattering based on triangular net construction is considered. The interpolation method for conversion of a triangular net into rectangular one that allows one to use the traditional methods is described. The algorithm and program for plotting isolines directly in triangular nets permitting to save processor time and computer memory are considered.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985