

**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P11-85-60

Г.С.Казача, С.И.Сердюкова, А.Т.Филиппов

**ПУЛЬСАЦИИ И ОСЦИЛЛЯЦИИ СОЛИТОНА
ВБЛИЗИ НЕОДНОРОДНОСТИ
В РАСПРЕДЕЛЕННОМ ДЖОЗЕФСОНОВСКОМ
ПЕРЕХОДЕ**

1984

I. В работах [1-3] были найдены и изучены статические состояния синус-гордоновских солитонов (флюксонов), локализованных на микронеоднородностях (микросопротивлениях) в длинном джозефсоновском переходе. В простейшем случае одной микронеоднородности распределение магнитного потока $\varphi(x, t)$ описывается уравнением

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} &= \varphi_{xx} - (1 - \mu \delta(x - x_0)) \sin \varphi - \alpha \varphi_t, \quad -l \leq x \leq l, \\ \varphi_x(\pm l) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где x_0 - положение микронеоднородности, $\mu > 0$, а член $\alpha \varphi_t$ описывает малые эффекты диссипации энергии в переходе ($\alpha > 0, \alpha \ll 1$).

При $l - x_0, l + x_0 \gg 1$ нетривиальные ($\varphi \neq 0$) устойчивые статические решения с наимизшей энергией соответствуют одному флюксону (антифлюксону), локализованному на микронеоднородности. С точностью до экспоненциально малых при $l \rightarrow \infty$ членов эти состояния можно представить в виде

$$\varphi_0(x) = 2 \arccos(\mp \operatorname{th} x) = 4 \arccos \operatorname{tg} e^{\pm x}, \quad (2)$$

где верхний знак соответствует флюксону, а нижний - антифлюксону.

Эволюция во времени состояний, мало отличающихся от $\varphi_0(x)$, полностью определяется [3]

$$\varphi(x, t) = \varphi_0(x) + e^{-\alpha t/2} \sum_{n=0}^{\infty} \psi^{(n)}(x) (a_n e^{-i\bar{\omega}_n t} + a_n^* e^{i\bar{\omega}_n t}), \quad (3)$$

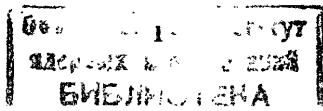
где $\psi^{(n)}(x)$ - собственные функции краевой задачи

$$-\psi_{xx}^{(n)}(x) + [1 - \mu \delta(x - x_0)] \psi^{(n)}(x) \cos \varphi_0(x) = \omega_n^2 \psi^{(n)}(x), \quad (4)$$

$$\psi_x^{(n)}(\pm l) = 0.$$

Здесь

$$\omega_n^2 = \bar{\omega}_n^2 + \alpha^2/4,$$



а коэффициенты a_n определяются начальными условиями:

$$a_n = \frac{1}{2} \left[\langle (\varphi(x,0) - \varphi_0(x)) \psi^{(n)} \rangle (1 - i \frac{\alpha}{2\omega_n}) - \langle \varphi_+(x,0) \psi^{(n)} \rangle \frac{i}{\omega_n} \right] \quad (5)$$

Скобки $\langle \rangle$ обозначают интегрирование в пределах от $-\ell$ до ℓ , а собственные функции $\psi^{(n)}(x)$ ортогональны и нормированы условием $\langle \psi^{(n)} \psi^{(m)} \rangle = \delta_{nm}$.

Спектр значений ω_n^2 содержит один дискретный уровень ω_0^2 .
При $\ell \rightarrow \infty$

$$\omega_0^2 \approx \frac{\mu}{2} \left[\left(1 + \frac{\mu^2}{16}\right)^{1/2} - \frac{\mu}{4} \right], \quad \psi^{(0)} \approx N_0 e^{-p_0 |x|} (p_0 + th |x|), \quad (6)$$

где $p_0^2 = 1 - \omega_0^2$. Остальные уровни образуют квазинепрерывный спектр $\omega_n^2 \approx 1, n \geq 1$ с расстоянием между соседними уровнями $\sim 1/\ell$. Ближайший к ω_0^2 уровень соответствует функции $\psi^{(1)} \approx N_1 th x$ и собственному значению $\omega_1^2 \approx 1$ (с экспоненциальной точностью).

Если начальное состояние мало отличается от $\varphi_0(x)$ и медленно меняется, т.е. $\langle (\varphi(x,0) - \varphi_0(x))^2 \rangle \ll 1$ и $\langle \varphi_+(x,0)^2 \rangle \ll 1$, то коэффициенты a_n малы. Тогда нелинейными поправками, не учтенными в (3), действительно можно пренебречь, и разложение (3) хорошо описывает переход начального состояния в статическое при $t \gg 1/\alpha$. В простейшем случае, когда

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x - \xi), \quad \varphi_+(x,0) = 0, \quad |\xi| \ll 1, \quad (7)$$

можно убедиться, что при $n \geq 1$ $|a_n| \ll |a_0| \sim \xi$. При этом линейное приближение (3) описывает медленно затухающие осцилляции флюксона вблизи микрогетерогенности.

Для начальных условий (7) при достаточно малом μ такое поведение флюксона вблизи микрогетерогенности может сохраниться и при довольно больших значениях ξ . Действительно, заменим в разложении (3) затухающие периодические функции на новые "координаты" $\eta_n(t)$ (см. /10/):

$$\varphi(x,t) = \varphi_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \psi^{(n)}(x) \eta_n(t). \quad (8)$$

Пользуясь уравнениями (1), (2), (4) и условием ортонормированности собственных функций $\psi^{(n)}(x)$, можно найти уравнения для $\eta_n(t)$:

$$\dot{\eta}_n + \alpha \dot{\eta}_n + \bar{\omega}_n^2 \eta_n = f_n(\eta_0, \eta_1, \dots), \quad (9)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени. Явный вид функций f_n можно найти в виде разложения по степеням координат η_n ,

начинающегося с членов второй степени. Начальные значения $\eta_n(0)$ и $\dot{\eta}_n(0)$ равны

$$\eta_n(0) = a_n + a_n^*, \quad \dot{\eta}_n(0) = -\frac{\alpha}{2} \eta_n(0) - i\omega_n(a_n - a_n^*), \quad (10)$$

где a_n определяется формулой (5).

Если параметр μ достаточно мал, то основная частота ω_0 много меньше остальных ($\omega_n \geq 1$), и даже при не очень малых амплитудах η_n зависимость φ от времени может определяться, в основном, членом $\psi^{(0)}(x) \eta_0(t)$ в разложении (8). Для этого необходимо, чтобы начальные значения $\eta_n(0)$ и $\dot{\eta}_n(0)$ при $n \geq 1$ были достаточно малыми. При выполнении этого условия в системе (9) могут существовать одночастотные колебания с частотой, близкой к ω_0 . Они и будут описывать медленные осцилляции флюксона. При $\mu \ll 1$ такие осцилляции описываются хорошо известной теорией возмущений /4/, в которой солитон считается недеформируемым, а его движение описывается уравнением Ньютона для одной частицы в некотором эффективном поле, определяемом микрогетерогенностью.

Такие одночастотные колебания можно вычислить методом Боголюбова-Крылова /5/. Хотя в высших членах соответствующих разложений могут появиться малые резонансные знаменатели, практически в системе с затуханием ими можно пренебречь. С ростом μ основная частота растет (см. (6)), и резонансные знаменатели могут появиться уже в первых приближениях. Соответствующие координаты η_n могут оказаться большими, даже если $\eta_n(0) = \dot{\eta}_n(0)$, и ими пренебрегать нельзя. Тем не менее и в этом случае можно ожидать, что при некоторых условиях зависимость $\varphi(x,t)$ от t будет определяться лишь небольшим числом членов в разложении (8). Точная формулировка этих условий представляет собой сложную задачу.

2. Естественно поэтому рассмотреть численное решение задачи (I) с начальными условиями (7) или с более общими условиями, когда начальный флюксон $\varphi_0(x - \xi)$ движется с небольшой скоростью v_0 , т.е. $\varphi_+(x,0) = \varphi_0'(x - \xi) v_0$. Такое исследование было нами выполнено в работе /6/. Оказалось, что при малых значениях μ флюксон притягивается к микрогетерогенности и медленно осциллирует около нее, очень слабо деформируясь. Однако при $\mu = 0,5$ наблюдалось заметное изменение формы флюксона (пульсации). Флюксон с нулевой начальной скоростью притягивался к микрогетерогенности и некоторое время пульсировал на ней. Эти пульсации быстро затухали, так как примененная в /6/ численная схема вносила довольно значительное затухание (даже при $\alpha = 0$ энергия за время счета заметно убывала).

Для численного моделирования движения флюксона в работе /6/ использовалась схема Лакса с пересчетом по кресту. Для проверки корректности счета использовалось энергетическое соотношение

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \int_{-l}^l \left[\frac{\psi_x^2}{2} + \frac{\psi_y^2}{2} + (1 - \cos \psi) \right] dx - \mu (1 - \cos \psi(x_0)) \right\} = 0,$$

которое должно выполняться точно при $\alpha = 0$. Расчетное значение энергии $\tilde{E}(t)$ падало на интервале $0 \leq t \leq 81$ в среднем на 1. Из разностного энергетического соотношения следует, что убывание связано с наличием у решения разрыва

$$\psi_x(x_0 + 0) - \psi_x(x_0 - 0) = -\mu \sin \psi(x_0).$$

Для более корректного счета в окрестности разрыва мы перешли на счет по схеме Русанова /7/. Схема Русанова устойчива в C и хорошо приспособлена для счета разрывных решений /8,9/. Энергия $\tilde{E}(t)$ стала убывать медленнее, но все же от затухания избавиться не удалось.

По этой причине мы переходим к расчетам со "сглаженной" δ -функцией. Уравнение (I) заменяется системой /6/ относительно $u = \psi_x$ и $v = \psi_y$. Пусть τ, h - шаги по t, x соответственно. В расчетах $h = 0,06, \tau = 0,03, l = 9, N = 2l/h = 300, \alpha = 0$. "Сглаженная" δ -функция задается соотношением

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} b^{-1} \exp \left[\frac{\Delta^2}{(x-x_0)^2 + \Delta^2} \right], & |x-x_0| < \Delta, \\ 0, & |x-x_0| \geq \Delta. \end{cases}$$

Постоянная b выбирается так, чтобы

$$\int_{-l}^l \mathcal{D}(x) dx = 1.$$

В наших расчетах $\Delta = 0,6$, т.е. δ -функция "размывается" на 20 точек, $x_0 = 0$. Положим

$$f_v^n = f(-l + v h, n \tau), \quad f_{v+1/2}^{n+1/3} = f(-l + (v + \frac{1}{2}) h, (n + \frac{1}{3}) \tau),$$

$$f_{v+2/3}^{n+2/3} = f(-l + v h, (n + \frac{2}{3}) \tau).$$

Пусть значения u_v^n, v_v^n известны. Счет u_v^{n+1}, v_v^{n+1} ведется в три этапа. Вводятся два вспомогательных слоя $n + \frac{1}{3}, n + \frac{2}{3}$. На слое $n + \frac{1}{3}$ счет ведется по схеме Лакса:

$$u_{v+1/2}^{n+1/3} = \frac{1}{2} (u_v^n + u_{v+1}^n) + \frac{\tau}{3h} (v_{v+1}^n - v_v^n), \quad v = 0, \dots, N-1,$$

$$v_{v+1/2}^{n+1/3} = \frac{1}{2} (v_v^n + v_{v+1}^n) + \frac{\tau}{3h} (u_{v+1}^n - u_v^n) -$$

$$- \frac{\tau}{6} \left\{ [1 - \mu \mathcal{D}(-l + (v+1)h)] \sin [\varphi(-l + (v+1)h, 0)] + \frac{\tau}{6} \sum_{l=1}^n (v_{v+1}^l + v_{v+1}^{l-1}) \right\} +$$

$$+ [1 - \mu \mathcal{D}(-l + v h)] \sin [\varphi(-l + v h, 0)] + \frac{\tau}{6} \sum_{l=1}^n (v_v^l + v_v^{l-1}) \left\}.$$

На слое $n + \frac{2}{3}$ счет ведется по схеме-крест:

$$u_v^{n+2/3} = u_v^n + \frac{2\tau}{3h} (v_{v+1/2}^{n+1/3} - v_{v-1/2}^{n+1/3}), \quad v = 1, \dots, N-1,$$

$$v_v^{n+2/3} = v_v^n + \frac{2\tau}{3h} (u_{v+1/2}^{n+1/3} - u_{v-1/2}^{n+1/3}) -$$

$$- \frac{\tau}{6} \left\{ [1 - \mu \mathcal{D}(-l + (v + \frac{1}{2})h)] \sin [\varphi(-l + (v + \frac{1}{2})h, 0)] + \frac{\tau}{6} (v_{v+1/2}^0 + v_{v+1/2}^{4/3}) \right\} +$$

$$+ \frac{\tau}{6} \sum_{l=1}^n (v_{v+1/2}^{l+1/3} + v_{v+1/2}^{l-1+1/3}) \left\} + [1 - \mu \mathcal{D}(-l + (v - \frac{1}{2})h)] \times$$

$$\times \sin [\varphi(-l + (v - \frac{1}{2})h, 0)] + \frac{\tau}{6} (v_{v-1/2}^0 + v_{v-1/2}^{4/3}) + \frac{\tau}{6} \sum_{l=1}^n (v_{v-1/2}^{l+1/3} + v_{v-1/2}^{l-1+1/3}) \left\} \right\},$$

$$u_0^{n+2/3} = u_N^{n+2/3} = 0.$$

Значения $v_0^{n+2/3}, v_N^{n+2/3}$ находятся из неявной аппроксимации $u_{\pm} = v_{\pm}$ второго порядка точности:

$$v_0^{n+2/3} = v_{\frac{1}{2}}^{n+2/3} + v_{\frac{1}{2}}^n - v_0^n - \frac{3h}{2\tau} (u_0^{n+2/3} + u_{\frac{1}{2}}^{n+2/3} - u_0^n - u_{\frac{1}{2}}^n),$$

$$v_N^{n+2/3} = v_{N-1}^{n+2/3} + v_{N-1}^n - v_N^n + \frac{3h}{2\tau} (u_N^{n+2/3} + u_{N-1}^{n+2/3} - u_N^n - u_{N-1}^n).$$

Наконец, приводим расчетные формулы для u_v^{n+1}, v_v^{n+1} :

$$u_v^{n+1} = u_v^n - \frac{\tau}{12} (u_{v+2}^n - 4u_{v+1}^n + 6u_v^n - 4u_{v-1}^n + u_{v-2}^n) +$$

$$+ \frac{\tau}{24h} (-2v_{v+2}^n + 7v_{v+1}^n - 7v_{v-1}^n + 2v_{v-2}^n) + \frac{3\tau}{8h} (v_{v+1}^{n+2/3} - v_{v-1}^{n+2/3}),$$

$$v = 2, \dots, N-2,$$

$$v_v^{n+1} = v_v^n - \frac{1}{12} (v_{v+2}^n - 4v_{v+1}^n + 6v_v^n - 4v_{v-1}^n + v_{v-2}^n) +$$

$$+ \frac{\tau}{24h} (-2u_{v+2}^n + 7u_{v+1}^n - 7u_{v-1}^n + 2u_{v-2}^n) + \frac{3\tau}{8h} (u_{v+1}^{n+2/3} - u_{v-1}^{n+2/3}) -$$

$$- \tau [1 - \mu \mathcal{D}(-l + vk)] \left\{ \frac{1}{4} \text{Sin} [\varphi(-l + vk, 0)] + \frac{\tau}{2} \sum_{\ell=1}^n (v_v^\ell + v_v^{\ell-1}) \right\} +$$

$$+ \frac{3}{4} \text{Sin} [\varphi(-l + vk, 0)] + \frac{\tau}{2} \sum_{\ell=1}^n (v_v^\ell + v_v^{\ell-1}) + \frac{\tau}{3} (v_v^n + v_v^{n+2/3}) \Big\}.$$

Значения u_i^{n+1} , u_{N-1}^{n+1} , v_i^{n+1} , v_{N-1}^{n+1} находятся из аппроксимации системы по схеме Лакса с пересчетом по кресту: $u_{v+1/2}^{n+1/2}$, $v_{v+1/2}^{n+1/2}$, $v=0, 1, N-1, N-2$ считаются по формулам, аналогичным формулам для $u_{v+1/2}^{n+1/2}$, $v_{v+1/2}^{n+1/2}$. Естественно, $\frac{\tau}{3}$ заменяется на $\frac{\tau}{2}$. Приведем формулы для расчета u_i^{n+1} , v_i^{n+1} , u_{N-1}^{n+1} , v_{N-1}^{n+1} :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\tau}{h} (v_{3/2}^{n+1/2} - v_{1/2}^{n+1/2}),$$

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \frac{\tau}{h} (u_{3/2}^{n+1/2} - u_{1/2}^{n+1/2}) - \tau [1 - \mu \mathcal{D}(-l + h)] \times$$

$$\times \text{Sin} [\varphi(-l + h, 0)] + \frac{\tau}{2} \sum_{\ell=1}^n (v_i^\ell + v_i^{\ell-1}) + \frac{\tau}{4} (v_{1/2}^{n+1/2} + v_{3/2}^{n+1/2}),$$

$$u_{N-1}^{n+1} = u_{N-1}^n + \frac{\tau}{h} (v_{N-1/2}^{n+1/2} - v_{N-3/2}^{n+1/2}),$$

$$v_{N-1}^{n+1} = v_{N-1}^n + \frac{\tau}{h} (u_{N-1/2}^{n+1/2} - u_{N-3/2}^{n+1/2}) - \tau [1 - \mu \mathcal{D}(-l + (N-1)h)] \times$$

$$\times \text{Sin} [\varphi(-l + (N-1)h, 0)] + \frac{\tau}{2} \sum_{\ell=1}^n (v_{N-1}^\ell + v_{N-1}^{\ell-1}) + \frac{\tau}{4} (v_{N-1/2}^{n+1/2} + v_{N-3/2}^{n+1/2}).$$

Граничные точки считаются аналогично граничным точкам на слое $n + \frac{2}{3}$

$$u_0^{n+1} = u_N^{n+1} = 0,$$

$$v_0^{n+1} = v_1^{n+1} + v_1^n - v_0^n - \frac{h}{\tau} (u_0^{n+1} + u_1^{n+1} - u_0^n - u_1^n),$$

$$v_N^{n+1} = v_{N-1}^{n+1} + v_{N-1}^n - v_N^n + \frac{h}{\tau} (u_N^{n+1} + u_{N-1}^{n+1} - u_N^n - u_{N-1}^n).$$

3. Кратко перечислим основные результаты расчетов. На расчетном интервале $t = 10000 \times \tau = 300$ значение $\bar{\xi}$ практически остается неизменным: $\bar{\xi}(0) = 7,906$, $\bar{\xi}(300) = 7,853$. При $\Delta = 0,6$, $\xi(0) = -2$, $\ell = 9$, $\alpha = v_0 = x_0 = 0$, $\mu = 0,6$ флюксон достаточно быстро притягивается к микро неоднородности, совершая около нее осцилляции от $-1,4$ до $1,4$ по оси x и достаточно сильно пульсируя (высота флюксона меняется от $1,4$ до $2,35$). В этом случае $\varphi(0, t)$ регулярно осциллирует с частотой $\omega \approx 0,3$ в первой трети расчетного времени и $\omega \approx 0,3\pi$ в конце счета* (см. рисунок). Зависимость от времени магнитного поля $\varphi_x(0, t)$, наоборот, содержит лишь высокочастотные компоненты, а положение центра флюксона $\xi(t)$ (точка, где магнитное поле максимально) описывается кривой, основная фурье-компонента которого имеет частоту ω (см. рис.).

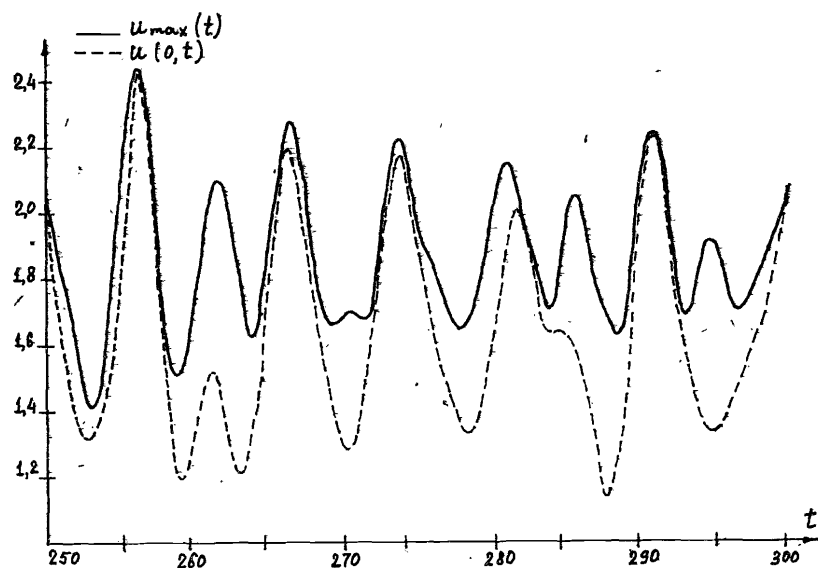
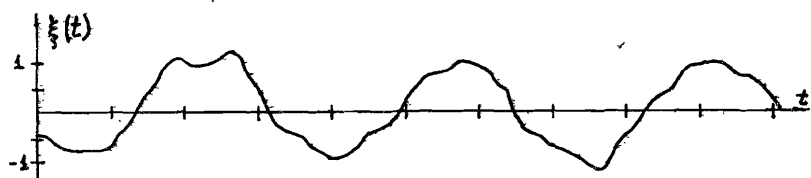
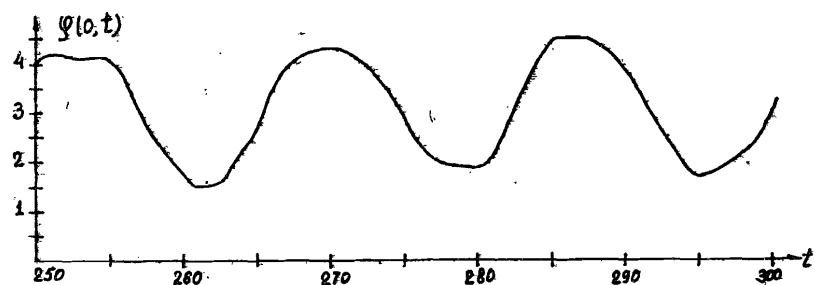
Наиболее сложный характер имеют пульсации флюксона, определяемые зависимостью от времени максимального значения магнитного поля $\varphi_x(\xi(t), t) \equiv u_{\max}(t)$. В последней трети расчетного времени пульсации имеют наиболее регулярный вид. Чтобы выяснить характер пульсаций, мы разлагали $u_{\max}(t)$ по высшим гармоникам основной частоты ω на хорошо просматриваемых периодах осцилляции $\varphi(0, t)$. В частности, на участках $250,8 \leq t \leq 267,6$ и $267,6 \leq t \leq 284,4$, соответствующих периоду ($T=16,8$) $\varphi(0, t)$, получено

$$u_{\max} = 1,87 - 0,33 \cos 3\omega t - 0,19 \sin 2\omega t - 0,073 \sin 3\omega t,$$

$$u_{\max} = 1,86 - 0,09 \cos 2\omega t - 0,19 \sin 2\omega t - 0,093 \sin 3\omega t,$$

соответственно. Остальные фурье-компоненты имеют коэффициенты на порядок ниже.

* При счете на большом промежутке времени оказалось, что частота медленно меняется. Возможно, это также проявление нелинейных эффектов. Это явление заслуживает специального изучения.



Зависимость от времени на интервале $250 \leq t \leq 300$ $\varphi(0, t)$, положения центра флюксона $\xi(t)$, магнитного поля при $x=0$ $\varphi_x(0, t) \equiv u(0, t)$ и его максимального значения $\varphi_x(\xi(t), t) \equiv u_{max}(t)$.

Основному расчетному варианту предшествовали численные эксперименты, в которых пульсации не были столь ярко выражены. Эти расчеты проводились с микросопротивлением $\mu=0,3$. В частности, при $\mu=0,3$, $\xi(0)=-2$, $\Delta=0,3$, $\alpha=V_0=X_0=0$ флюксон осциллирует около центра, пульсации очень слабые (u_{max} меняется от 1,9 до 2). При $\Delta=0,3$, $\xi(0)=-4$, $\mu=0,3$, $\alpha=V_0=X_0=0$ в течение $t=54$ флюксон стоит на месте. В случае $\mu=0,3$, $\xi(0)=-2$, $\Delta=0,3$, $V_0=0,2$, $\alpha=X_0=0$ флюксон за время $t=45$ доходит до правой стенки, переворачивается, превращаясь в антифлюксон, и возвращается к центру ($t=87$). Пульсации выражены очень слабо, u_{max} меняется от 1,956 до 2,1.

4. Дадим интерпретацию полученных результатов на языке модели п.1 (см. также /10/). Так как $\varphi(0, t)$ содержит лишь малую высокочастотную компоненту, то в разложении (8) для ее описания достаточно оставить лишь один член $\psi^{(0)}(0)\eta_0(t)$. Таким образом, из численных расчетов мы непосредственно находим $\eta_0(t)$. Формула (6) при $\mu=0,6$ дает для частоты ω_0 значение $\omega_0 \approx 0,5$. Отличие ω_0 от найденного значения $\omega=0,37$, возможно, объясняется сглаживанием δ -функции в уравнении (4). Другой источник поправок к ω_0 — нелинейное взаимодействие $\eta_0(t)$. Если бы в разложении (8) действительно можно было оставить лишь один этот член, то мы получили бы для $\varphi_x(0, t)$ нулевое значение, так как для сглаженной δ -функции $\psi_x^{(0)}(0)=0$. Сравнивая результаты расчетов для $\varphi(0, t)$ и $\varphi_x(0, t)$, можно заключить, что для их описания необходимо оставить в разложении (8) по крайней мере два члена: $\psi^{(0)}(x)\eta_0(t)$ и, скажем, $\psi^{(1)}(x)\eta_1(t)$. Заметим, что четность собственных функций $\psi^{(n)}(x)$ совпадает с четностью номера n . Поэтому нечетные члены разложения $\psi^{(n)}(x)\eta_n(t)$ не дают вклада в $\varphi(0, t)$ и определяют высокочастотные осцилляции $\varphi_x(0, t)$.

Зависимость $\xi(t)$ (в линейном приближении по $\xi(t)$) имеет вид

$$\xi(t) = -\frac{\varphi(0, t) - \pi}{\varphi'(0, t)} \approx \frac{\eta_0(t)\psi^{(0)}(0)}{2 + \eta_1\psi^{(1)}(0)}$$

Уже в первом приближении получается модулированное колебание, качественно описывающее численные результаты. Хорошо видно, что низкочастотные компоненты в $\varphi(0, t)$ и в $\xi(t)$ колеблются в противофазе.

Сложный характер пульсаций объясняется нелинейными поправками или же влиянием отброшенных членов в разложении (8).

Таким образом, простая модель нелинейно взаимодействующих осцилляторов (уравнения (8)-(9)) позволяет качественно понять результаты численного эксперимента при учете двух-трех членов в разложении (8). Для количественной проверки модели необходимо исследовать уравнения (9), оставив в них лишь η_0 и η_1 и положив остальные равными нулю (в дальнейшем их можно оценить по теории возмущений). Это можно сделать численно или же методом Боголюбова-Крылова ^{1/5}. Найденные нами пульсации, по-видимому, имеют резонансный характер. Для проверки этой гипотезы мы в дальнейшем предполагаем более тщательно изучить зависимость пульсаций от величины μ и начальных условий.

Хотя рассмотренные выше результаты получены в конкретной теории джоуфсоновского перехода с микронеоднородностью, обнаруженный нами эффект, как следует из рассуждений пп. I, 3, имеет общую природу и может наблюдаться в других системах, в которых существует устойчивое связанное состояние солитона или солитоноподобного объекта.

За полезные обсуждения авторы благодарны Ю.С. Гальперн.

Литература

1. Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. Письма в ЖЭТФ, 1982, 35, с.470.
2. Filippov A.T., Galpern Yu.S. Solid State Comm., 1983, 48, p.665.
3. Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. ЖЭТФ, 1984, 86, с.1527.
4. Fogel M.V. et al. Phys. Rev. B, 1977, 15, p.1578.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. "Наука", М., 1974.
6. Казача Г.С., Сердюкова С.И., Филиппов А.Т. ОИЯИ, РИ-84-76, Дубна, 1984.
7. Rusanov V.V. Fluid Dynam. Trans., 1969, v.4, p.285.
8. Сердюкова С.И. ДАН СССР, 1967, 173, 3, с.526.
9. Сердюкова С.И. ОИЯИ, Р5-10708, Дубна, 1977.
10. Филиппов А.Т. Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. ОИЯИ, Д17-84-850, Дубна, 1984.

СООБЩЕНИЯ, КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ, ПРЕПРИНТЫ И СБОРНИКИ ТРУДОВ КОНФЕРЕНЦИЙ, ИЗДАВАЕМЫЕ ОБЪЕДИНЕННЫМ ИНСТИТУТОМ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ЯВЛЯЮТСЯ ОФИЦИАЛЬНЫМИ ПУБЛИКАЦИЯМИ.

Ссылки на СООБЩЕНИЯ и ПРЕПРИНТЫ ОИЯИ должны содержать следующие элементы:

- фамилии и инициалы авторов,
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс публикации,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы /при необходимости/.

Пример:

1. Первушин В.Н. и др. ОИЯИ, Р2-84-649, Дубна, 1984.

Ссылки на конкретную СТАТЬЮ, помещенную в сборнике, должны содержать:

- фамилии и инициалы авторов,
- заглавие сборника, перед которым приводятся сокращенные слова: "В кн."
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс издания,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы.

Пример:

Колпаков И.Ф. В кн. XI Международный симпозиум по ядерной электронике, ОИЯИ, Д13-84-53, Дубна, 1984, с.26.

Савин И.А., Смирнов Г.И. В сб. "Краткие сообщения ОИЯИ", № 2-84, Дубна, 1984, с.3.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 января 1985 года.