

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-85-552

П.Г.Акишин, Е.П.Жидков, В.Д.Кравцов*

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧАХ
МАГНИТОСТАТИКИ

*

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

1985

В работе рассматриваются вопросы, возникающие при использовании интегральной постановки задач магнитостатики в осесимметричном случае.

Пусть $\vec{B}(\vec{x})$ - индукция магнитного поля в точке \vec{x} ; $\vec{H}(\vec{x})$ - напряженность; $\vec{M}(\vec{x})$ - магнитный момент; $\mu = \mu(\vec{B}(\vec{x}))$ - магнитная проницаемость; $\vec{H}^s(\vec{a})$ - поле от токовых элементов. Пусть G - область, заполненная железом. Интегральная постановка задачи магнитостатики в трехмерном случае имеет вид [1]

$$\vec{H}(\vec{a}) = \vec{H}^s(\vec{a}) + \frac{\nabla_{\vec{a}}}{4\pi} \left[\int_G (\vec{M}(\vec{x}), \nabla_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{a}|}) dV_{\vec{x}} \right], \quad (1)$$

$$\vec{H}(\vec{x}) = \frac{\vec{B}(\vec{x})}{\mu(|\vec{B}(\vec{x})|)}, \quad (2)$$

$$\vec{M}(\vec{x}) = \vec{B}(\vec{x}) - \vec{H}(\vec{x}). \quad (3)$$

Пусть $(\vec{E}_z, \vec{E}_z, \vec{E}_\varphi)$ - система базисных векторов некоторой цилиндрической системы координат. Осесимметричный случай характерен тем, что ток \vec{J} в токовых обмотках в т. $\vec{x}(r, z, \varphi)$ коллинеарен с вектором \vec{E}_φ , область G получается вращением по углу φ некоторой двумерной области \hat{G} . В результате этого при каждом фиксированном значении $\varphi_{\vec{a}}$ векторы $\vec{H}(\vec{a})$, $\vec{H}^s(\vec{a})$, $\vec{B}(\vec{a})$, $\vec{M}(\vec{a})$ компланарны с векторами $\vec{E}_{z_{\vec{a}}}$, $\vec{E}_{z_{\vec{a}}}$ ($\vec{a} = (z_{\vec{a}}, z_{\vec{a}}, \varphi_{\vec{a}})$).

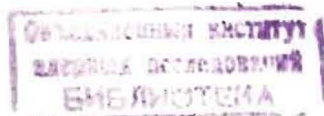
Аналогом уравнения (1) в осесимметричном случае будут следующие уравнения:

$$\vec{H}(\vec{a}) = \vec{H}^s(\vec{a}) - \frac{\nabla_{\vec{a}}}{4\pi} \int_G (\vec{M}(\vec{x}), \vec{F}(\vec{x}, \vec{a})) z_{\vec{x}} dz_{\vec{x}} d\vec{z}_{\vec{x}}, \quad (4)$$

компоненты вектора $\vec{F} = (F_1, F_2)^T$ в (4) есть

$$F_1 = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial z_{\vec{x}}} (z_{\vec{x}}^2 + z_{\vec{a}}^2 - 2z_{\vec{x}}z_{\vec{a}} \cos \varphi + (z_{\vec{x}} - z_{\vec{a}})^2)^{-\frac{1}{2}} \right] d\varphi,$$

$$F_2 = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial z_{\vec{x}}} (z_{\vec{x}}^2 + z_{\vec{a}}^2 - 2z_{\vec{x}}z_{\vec{a}} \cos \varphi + (z_{\vec{x}} - z_{\vec{a}})^2)^{-\frac{1}{2}} \right] d\varphi.$$



Векторы $\bar{H}(\bar{a}), \bar{H}^s(\bar{a}), \bar{M}(\bar{x})$ и область \hat{G} в (4) двумерны.

данная работа посвящена вопросам дискретизации уравнения (4) и решению возникающих нелинейных дискретизованных уравнений.

§ 1. Дискретизация интегрального уравнения

Разобьем область \hat{G} на непересекающиеся подобласти $\{G_i\}$

$$\hat{G} = \bigcup_{i=1}^N G_i.$$

В каждой G_i выберем точку наблюдения $\bar{a}_i(z_i, z_x)$:

$$\nu_i = \frac{\int_{G_i} z_x dV_x}{\int_{G_i} dV_x},$$

$$z_i = \frac{\int_{G_i} z_x dV_x}{\int_{G_i} dV_x}.$$

Приближим $\bar{M}(M_1, M_2)$ в каждой G_i следующим образом:

$$M_1 = \frac{z}{z_i} M_2^i,$$

$$M_2 = M_2^i,$$

где M_2^i, M_2^i постоянны в G_i .

Пусть $\bar{H}_i = \bar{H}(\bar{a}_i), \bar{B}_i = \bar{B}(\bar{a}_i)$. Для дискретизации (4) используется метод коллокации:

$$\bar{H}_i = \bar{H}^s(\bar{a}_i) - \frac{\nu \bar{a}}{4\pi} \left[\sum_{j=1}^N \int_{G_j} (M_2^j \frac{z_x}{z_j} F_1(\bar{a}, \bar{x}) + M_2^j F_2(\bar{a}, \bar{x})) z_x dV_x dZ_x \right] / \bar{a} \bar{a}_i \quad (5)$$

$i = 1, 2, \dots, N.$

Векторы $\bar{H}_i, \bar{B}_i, \bar{M}_i(M_2^i, M_2^i)$ удовлетворяют (2), (3). Введем следующие обозначения:

$$\hat{H}^s = (\bar{H}^s(\bar{a}_1), \dots, \bar{H}^s(\bar{a}_N))^T;$$

$$\hat{B} = (\bar{B}_1, \dots, \bar{B}_N)^T;$$

$$\hat{M} = (\bar{M}_1, \dots, \bar{M}_N)^T.$$

$[E]$ - единичная матрица размера $[2N \times 2N]$;

$[D]$ - матрица размера $[2N \times 2N]$ следующего вида:

$$[D] = \begin{pmatrix} [D_{11}], \dots, [D_{1N}] \\ \vdots \\ [D_{N1}], \dots, [D_{NN}] \end{pmatrix},$$

где $[D_{ij}]$ - матрицы размера $[2 \times 2]$, такие, что для любого $\bar{M}(M_z, M_x)$ имеет место равенство

$$[D_{ij}] \bar{M} = -\frac{\nu \bar{a}}{4\pi} \left[\int_{G_j} (M_z \frac{z_x}{z_j} F_1(\bar{a}, \bar{x}) + M_x F_2(\bar{a}, \bar{x})) z_x dV_x dZ_x \right] / \bar{a} = \bar{a}_i.$$

Используя эти обозначения, систему (5) можно записать следующим образом:

$$\hat{B} = \hat{H}^s + ([E] + [D]) \hat{M}(\hat{B}). \quad (6)$$

Предполагая равномерную ограниченность магнитного момента \bar{M} , можно доказать следующую теорему.

Теорема. Система нелинейных уравнений (6) имеет по крайней мере одно решение.

Доказательство теоремы проводится аналогично /2/.

Для решения дискретизованной системы уравнений (6) использовался следующий итерационный процесс /3/:

$$\hat{B}_{k+1} = \hat{H}^s + ([E] + [D]) \hat{M}(\hat{B}_k)$$

$$\hat{B}_0 = \hat{H}^s$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Процесс оканчивался в том случае, если относительная ошибка R_k

$$R_k = \frac{\| \hat{H}^s + ([E] + [D]) \hat{M}(\hat{B}_k) - \hat{B}_k \|}{\| \hat{B}_k \|}$$

становилась меньше заданной наперед величины.

§ 2. Вычисление интегралов

Для того чтобы выписать коэффициенты матрицы $[D]$ из (6), необходимо вычислить интегралы следующего вида:

$$I_1 = \int_{G_j} z_x^2 \frac{\partial}{\partial z \bar{a}} \frac{\partial}{\partial z \bar{x}} F_1(\bar{a}, \bar{x}) dV_x dZ_x / \bar{a} = \bar{a}_i,$$

$$I_2 = \int_{G_j} z_x^2 \frac{\partial}{\partial z \bar{a}} \frac{\partial}{\partial z \bar{x}} F_1(\bar{a}, \bar{x}) dV_x dZ_x / \bar{a} = \bar{a}_i$$

$$I_3 = \int_{G_j} \frac{\partial}{\partial z_a} \frac{\partial}{\partial z_{\bar{a}}} F_2(\bar{a}, \bar{x}) z_{\bar{x}} dz_{\bar{x}} d\bar{z}_{\bar{x}} / \bar{a} = \bar{a}_i, \quad (7)$$

$$I_4 = \int_{G_j} \frac{\partial}{\partial z_a} \frac{\partial}{\partial z_{\bar{a}}} F_2(\bar{a}, \bar{x}) z_{\bar{x}} dz_{\bar{x}} d\bar{z}_{\bar{x}} / \bar{a} = a_i.$$

В качестве $\{G_j\}$ брались треугольники. В случае, когда $i=j$, интегралы в (7) сингулярны. Интегралы I_1, I_2, I_3, I_4 сводились к интегралам по границе DG_j , что позволило избежать трудностей, возникающих при вычислении сингулярных интегралов. При вычислении интегралов по границе треугольников использовались квадратурные формулы Гаусса.

При интегрировании по угловой переменной φ возникала необходимость определения интегралов следующего вида:

$$J_1 = \int_0^{3/2} \sqrt{x^2 \cos^2 \varphi + y^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

$$J_2 = \int_0^{3/2} \frac{1}{\sqrt{x^2 \cos^2 \varphi + y^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi,$$

$$J_3 = \int_0^{3/2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 \cos^2 \varphi + y^2 \sin^2 \varphi}} \right) d\varphi, \quad (8)$$

$$J_4 = \int_0^{3/2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 \cos^2 \varphi + y^2 \sin^2 \varphi}} \right) d\varphi.$$

Для вычисления интегралов J_1, J_2 использовался процесс арифметико-геометрического среднего [4]. Рассмотрим рекуррентную последовательность троек чисел $\{a_k, b_k, c_k\}$:

$$a_0 = x$$

$$b_0 = y \quad (x \geq y > 0)$$

$$c_0 = \sqrt{|x^2 - y^2|}$$

$$a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2} \quad (9)$$

$$b_{k+1} = \sqrt{a_k b_k}$$

$$c_{k+1} = \frac{a_k - b_k}{2} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Процесс оканчивается на N -м шаге, когда c_N меньше заданной наперед величины. Интеграл J_2 полагается равным

$$J_2 = \frac{\pi}{2 a_N} \quad (10)$$

Интегралы J_1 и J_2 удовлетворяют следующему уравнению:

$$\frac{J_2 - J_1}{J_2} = \frac{1}{2} [c_0^2 + 2c_1^2 + 2^2 c_2^2 \dots + 2^N c_N^2]. \quad (11)$$

Для вычисления интегралов J_3, J_4 использовалась следующая процедура. Проинтегрируем (9) по переменной x . Пусть $\hat{a}_k = \frac{d}{dx} a_k$, $\hat{b}_k = \frac{d}{dx} (b_k)$. Имеем

$$\hat{a}_0 = 1$$

$$\hat{b}_0 = 0$$

$$\hat{a}_{k+1} = \frac{\hat{a}_k + \hat{b}_k}{2} \quad (12)$$

$$\hat{b}_{k+1} = \frac{1}{2} (\hat{a}_k \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} + \hat{b}_k \sqrt{\frac{a_k}{b_k}})$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Интеграл J_3 полагается равным

$$J_3 = -\frac{\pi}{2} \frac{\hat{a}_N}{a_{N^2}}$$

Аналогично для вычисления J_4 использовался процесс (12) с начальными условиями

$$\hat{a}_0 = 0$$

$$\hat{b}_0 = 1.$$

Интеграл J_4 полагается равным

$$J_4 = -\frac{\pi}{2} \frac{\hat{a}_N}{a_{N^2}}$$

Пусть x, y изменяются в пределах $c_2 \geq x \geq y \geq c_1 > 0$; $a(x, y)$ - предел a_k, b_k ($a(x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$). Имеет место следующая теорема.

Теорема. Последовательности $\{\hat{a}_k\}, \{\hat{b}_k\}$ из (12) сходятся к одному и тому же пределу $\hat{a}(x, y)$. Имеет место тождество

$$\hat{a}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (a(x, y)). \quad (13)$$

Доказательство. Оценим характер сходимости последовательностей $\{a_k\}, \{b_k\}$ из (9). Очевидно, имеет место неравенство

$$|a_k - b_k| \leq \frac{|a_0 - b_0|}{2^k}. \quad (14)$$

Из (9) также следует, что $\{a_k\}$ монотонно убывают, а $\{b_k\}$ монотонно возрастают и $a_k \geq b_k$. Для любого k имеет место тождество

$$a_{k+1} - b_{k+1} = \frac{(\sqrt{a_k} - \sqrt{b_k})^2}{2}. \quad (15)$$

Откуда вытекает неравенство

$$|a_{k+1} - b_{k+1}| \leq \frac{|a_k - b_k|^2}{8c_1}. \quad (16)$$

Из (I4), (I6) следует, что последовательности $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ имеют квадратичный характер сходимости к пределу, и для любого $\varepsilon > 0$ существует $d(\varepsilon)$, такое, что для любого k имеет место неравенство

$$|a_k - b_k| \leq d(\varepsilon) \varepsilon^k. \quad (I7)$$

Пусть $d_k = \max(|\hat{a}_k|, |\hat{b}_k|)$. Из (I2) следует, что

$$d_{k+1} \leq d_k \sqrt{\frac{a_0}{b_0}}.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$d_k \leq d_0 \left(\sqrt{\frac{a_0}{b_0}} \right)^k. \quad (I8)$$

Оценим разность $|\hat{a}_k - \hat{b}_k|$. Имеем

$$|\hat{a}_{k+1} - \hat{b}_{k+1}| = \frac{1}{2} \left| \hat{a}_k \left(1 - \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} \right) + \hat{b}_k \left(1 - \sqrt{\frac{a_k}{b_k}} \right) \right|. \quad (I9)$$

Заметим, что для достаточно малых x имеют место следующие тождества:

$$\begin{aligned} (1+x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{x}{2} + \theta_1(x) \\ (1+x)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{x}{2} + \theta_2(x) \end{aligned} \quad (20)$$

где $|\theta_i(x)| \leq x^2$ ($i=1,2$).

Из (I9), (20) следует

$$|\hat{a}_{k+1} - \hat{b}_{k+1}| \leq \frac{1}{4} |\hat{a}_k - \hat{b}_k| \left| \frac{b_k - a_k}{a_k} \right| + d_k \left| \frac{b_k - a_k}{a_k} \right|^2.$$

Отсюда, учитывая (I7), (I8), несложно показать, что имеет место неравенство

$$|\hat{a}_k - \hat{b}_k| \leq \hat{d}(\varepsilon) \varepsilon^k, \quad (21)$$

где $\hat{d}(\varepsilon)$ не зависит от k . Из (I2), (21) следует

$$\begin{aligned} |\hat{a}_{k+1} - \hat{a}_k| &\leq \hat{d}_1(\varepsilon) \varepsilon^k \\ |\hat{b}_{k+1} - \hat{b}_k| &\leq \hat{d}_2(\varepsilon) \varepsilon^k, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\hat{d}_1(\varepsilon)$, $\hat{d}_2(\varepsilon)$ также не зависят от k . Следовательно, последовательности $\{\hat{a}_k\}$, $\{\hat{b}_k\}$ сходятся к одному и тому же пределу равномерно для x, y из области $c_2 \geq x, y \geq c_1$. Но $\{\hat{a}_k\}$, $\{\hat{b}_k\}$ есть производные $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ соответственно. По известным теоремам математического анализа^{15/} следует тождество (I3), и теорема доказана. Продифференцировав (I5) по x , получаем, что $\{\hat{a}_k\}$, $\{\hat{b}_k\}$ сходятся так же быстро, как $\{a_k\}$, $\{b_k\}$.

Аналогично (I2) вычисляются более высокие производные J_1, J_2 по x и y .

Заключение

Вся вышеизложенная методика использовалась для создания комплекса фортранных программ расчета осесимметричных магнитостатических полей. В качестве входных данных для комплекса необходимо задавать:

1. Конфигурацию железа. Область, заполненная железом, задается в виде набора выпуклых многоугольников. В каждом многоугольнике задается средний диаметр разбиения многоугольника на треугольники.

2. Конфигурацию токовых обмоток (в виде многоугольников), плотности токов в обмотках.

3. Тип магнита. Возможны три ситуации:

- а) магнит без всякой симметрии;
- б) дипольный магнит;
- в) квадрупольный магнит.

4. Точки наблюдения, в которые производится пересчет поля после решения нелинейной системы уравнений (6).

Тестирование комплекса проводилось на примере расчета парамагнитного шара в постоянном внешнем магнитном поле. В этом случае есть аналитическое решение задачи^{16/}. Задача решалась в дипольном приближении. Четверть круга приближалась многоугольником и затем разбивалась на 30 треугольников (рис. I).

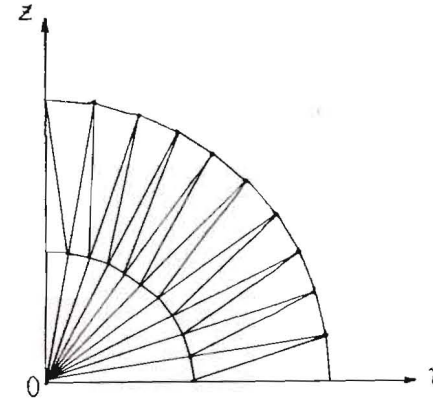


Рис. I

Время, затраченное на формирование матрицы из (6) и решение дискретизованной системы уравнений, составило 46 с на ЭВМ CDC-6500. Пересчет поля в 11 точек наблюдения потребовал 13 с. На рис. 2, 3 изображены силовые линии поля, расчетные и теоретические. Относительная ошибка расчетов составила 0,5%, причем какой-то вклад в нее вносит ошибка приближения круга многоугольником.

calculation

теория

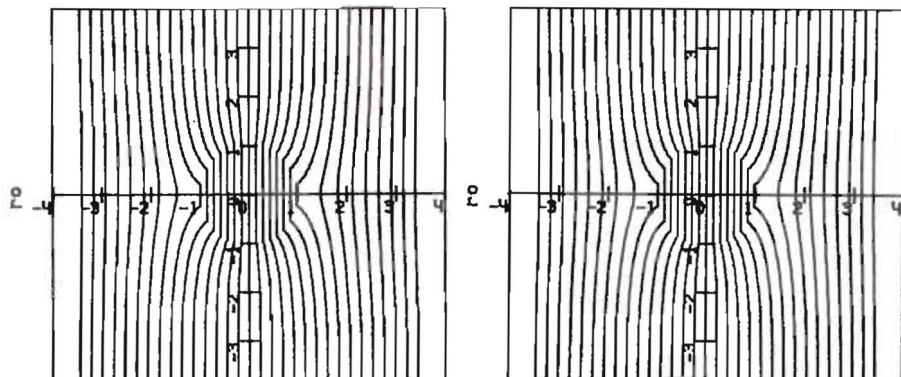


Рис.2

Рис.3

ЛИТЕРАТУРА

1. Trowbridge G.W. et al. GFUN3D User Guide, RL - 76 - 029/A.
2. Акишин П.Г., Жидков Е.П.. ОИЯИ, П11-81-826, Дубна, 1981.
3. Акишин П.Г., Жидков Е.П.. ОИЯИ, П11-83-427, дубна, 1983.
4. Абрамовиц М., Стиган И.. Справочник по специальным функциям. "Наука", М., 1979.
5. Титчмарш Е.. Теория функций. "Наука", М., 1980.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Электродинамика сплошных сред. "Наука", М., 1982.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 июля 1985 года.

Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. P11-85-552
Метод интегральных уравнений в осесимметричных задачах
магнитостатики

Исследуются вопросы, возникающие при решении осесимметричных задач магнитостатики методом интегральных уравнений. Рассматривается метод дискретизации этих уравнений. Предлагается процесс решения дискретизированных уравнений. Метод может быть рекомендован для широкого класса осесимметричных задач магнитостатики.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Akishin P.G., Zhidkov E.P., Kravtsov V.D. P11-85-552
The Integral Equation Method in Axial-Symmetric Problems
of Magnetostatics

Some problems arising in the process of solving axial-symmetric magnetostatical problems by the integral equation method are investigated. The algorithm of discretization is considered. The iterational method for solving discretization equations is proposed. The method could be recommended for a wide class of axial-symmetric problems of magnetostatics.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985