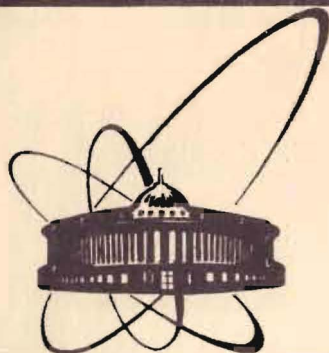


85-489



сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна

P11-85-489

Г.А.Емельяненко

О СВОЙСТВАХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ  
С НЕОСОБЕННЫМИ ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫМИ,  
ЛЕНТОЧНЫМИ И КВАЗИТРЕХДИАГОНАЛЬНЫМИ  
МАТРИЦАМИ

О стратегии решения систем уравнений

1985



где  $\{q_i\}_{i=1}^m$ ,  $\{r_j, p_j\}_{j=2}^m$  — последовательности чисел для случаев трехдиагональных матриц; квадратных матриц для случая ленточной структуры  $c$  (при этом все матрицы  $r_j$  — нижнетреугольные,  $p_j$  — верхнетреугольные, а  $q_i$  — квадратные (в общем случае разных размерностей, что влечет за собой прямоугольность блоков-матриц  $\{r_j, p_j\}$  и их соответствующие размерности. Перенесение основных результатов /1,2/ на операторы (1.2) указанной общей структуры является не совсем простой задачей. Однако эта задача с помощью "метода аналогий" может быть значительно облегчена, если воспользоваться следующими результатами.

2. Основные свойства матриц, обратных к  $c$  (1.2), с отличными от нуля главными минорами

В/4,5/ была доказана следующая теорема: Если  $c$  — неособенная квазитрехдиагональная матрица типа (1.2) с отличными от нуля главными минорами, то

элементы-блоки  $B_{ij}$  обратной матрицы  $c^{-1}=B$  могут быть представлены в виде

$$B_{mm} = \omega_m^{-1}, \quad B_{i-1, i-1} = \omega_{i-1}^{-1} + c_i \cdot B_{ii} \cdot B_i, \quad i=m, m-1, \dots, 2, \quad (2.1)$$

$$B_{ij-1} = B_{ij} \cdot B_j, \quad 1 \leq j \leq i, \quad B_{i-1, j} = c_i \cdot B_{ij}, \quad 1 \leq i \leq j;$$

здесь матрицы  $\omega_i$ ,  $c_i$  и  $B_i$  имеют вид

$$c_{i+1} = \omega_i^{-1} \cdot (-r_{i+1}), \quad B_{i+1} = (-p_{i+1}) \omega_i^{-1}, \quad i=1, 2, \dots, m-1, \quad (2.2)$$

$$\omega_i = q_i + p_i \cdot c_i, \quad i=1, 2, 3, \dots, m,$$

где  $q_i$ ,  $p_i$ ,  $r_i$  — элементы исходной матрицы  $c$  (1.2), а  $c_1=0$ ;  $p_1=E$  — единичная матрица. Выполнив последовательную свертку выражений (2.1), получаем для элементов-блоков  $B=c^{-1}$

$$B_{ij} = \begin{cases} B_{ii} \prod_{k=j+1}^i \beta_k, & i \geq j, \\ \prod_{k=i+1}^j c_k \cdot B_{jj}, & i \leq j. \end{cases} \quad (2.3)$$

Итак, из (2.1), или, что то же самое (2.3), следует, что для вычисления обратной матрицы  $c^{-1}$  необходимо и достаточно знать все диагональные блоки  $\{B_{ii}\}$ , а также последовательности матриц  $\{B_i\}$  и  $\{c_i\}$ . При этом существование  $\{\omega_i^{-1}\}$ , т.е. неособенных матриц  $\{\omega_i\}$ , есть прямое следствие /4,5/ отличия от нуля всех главных (блочных) миноров  $c$ . Представление обратной матрицы  $c^{-1}$  в виде (2.3) эквивалентно, очевидно, представлению

$$B_{ij} = \begin{cases} W_i \cdot V_j, & i \geq j, \\ Z_i \cdot Q_j, & i \leq j, \end{cases} \quad (2.4)$$

если предположить неособенность матриц  $\{r_j$  и  $p_j\}$ , а также обозначить

$$V_j = \prod_{k=j+1}^m \beta_k = \beta_m \cdot \beta_{m-1} \cdot \dots \cdot \beta_{j+1}, \quad W_i = B_{ii} \left( \prod_{k=i+1}^m \beta_k \right)^{-1}, \quad (2.5)$$

$Z_i = \prod_{k=i+1}^m c_k = c_{i+1} \cdot c_{i+2} \cdot \dots \cdot c_m$ ,  $Q_j = \left( \prod_{k=j+1}^m c_k \right)^{-1} \cdot B_{jj}$ . Произведение  $\prod_{k=p}^q (\cdot) = E$  — единичной матрице, если  $p < q$ . Если  $c$  (1.2) симметрична, т.е.  $p_2 = r_2^T$ , тогда, согласно (2.2),  $\beta_i = c_i^T$ ,  $Z_i = V_i^T$ ,  $Q_j = W_j^T$ , где  $T$  — знак транспонирования. В этом случае, согласно /4/, имеем

$$B_{ij} = \begin{cases} W_i \cdot V_j, & i \geq j, \\ V_i^T \cdot W_j^T, & i \leq j \end{cases} \quad (2.6)$$

Следовательно, представление (2.3) является наиболее общим, поскольку оно справедливо для любой несимметричной неособенной квазитрехдиагональной матрицы  $c$  (1.2), у которой отличны от нуля все главные миноры. Представление (2.4) есть частный случай (2.3) для случая неособенных матриц  $\{p_j, r_j\}$ . Представление же (2.6) есть частный случай представления (2.4) для симметрической  $c$  (1.2). Итак, воспользовавшись общим видом представлений (2.3), (2.4) и (2.6), можно попытаться обобщить результат /1,2/ на общий вид оператора  $c$  (1.2). При этом проблемы устойчивого вычисления  $c^{-1}=B$ , очевидно, связаны будут с требованиями  $\|B_i\| \leq 1$  и  $\|c_i\| \leq 1$ . Однако мы не будем здесь выписывать явный вид  $c^{-1}$  с учетом указанных представлений, а также требований не отличия от нуля главных блок-миноров по аналогии с /1,2/, поскольку мы поставили в этой работе задачу лишь наметить стратегию получения  $c^{-1}$ . Решению задачи в явном виде будет посвящена одна из следующих публикаций. Сейчас же сформулируем лишь один из самостоятельных результатов для пятидиагональных матриц.

**Теорема.** Всякая квазитрехдиагональная матрица  $c$  (1.2), у которой матрицы  $\{q_i\}_{i=1}^m$ , а также  $\{r_j\}_{j=2}^m$  и  $\{p_j\}_{j=2}^m$  имеют размерности  $2 \times 2$ , с помощью ортогонального преобразования  $R$

$$R_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i=2j-1, \text{ где } j=1, 2, \dots, m, \\ 1, & \text{если } j=2i-1, \text{ где } i=1, 2, \dots, m, \\ 0, & \text{во всех других случаях} \end{cases} \quad (2.7)$$





Учитывая второе равенство в (3.4), предыдущее выражение перепишем в виде

$$x_i = c_{i+1} x_{i+1} + \omega_i^{-1} F_i, \quad i=m, m-1, \dots, 1, \quad x_{m+1} = 0. \quad (3.5)$$

Итак, рекуррентные выражения (3.5) вместе с (3.3) и (2.1), как легко видеть, есть не что иное, как формулы левой прогонки<sup>/3/</sup>. Применяя аналогичную технику, легко получить формулы правой, а также встречной прогонки. Следовательно, как общее решение (3.1), так и решения на основе различных вариантов монотонной прогонки, например, (3.5), могут быть получены устойчивым образом, если являются неособенными матрицы главных миноров  $\{\omega_i\}$  (2.2), а также при выполнении условий  $\|c_i\| \leq 1$  и  $\|\beta_i\| \leq 1$ . Однако представление решения (3.1) в отличие от, например, (3.5), допускает обобщение и на случай, когда некоторые из главных миноров обращаются в нуль. Этот результат получить исходя из (3.5) весьма затруднительно, даже если известны результаты<sup>/1,2/</sup>.

Сохранение формы решения (3.1) в указанной ситуации делает ее весьма предпочтительной и перед различными вариантами немонотонной прогонки<sup>/3/</sup>.

#### 4. Заключение

В настоящей статье мы наметили основную схему обобщения результатов<sup>/1,2/</sup> на случай операторов более общей структуры, а также их применения для решения линейных уравнений.

Автор искренне признателен члену-корреспонденту АН СССР профессору Говоруну И.И., а также профессору Лидкову Е.И. и профессору Сильну И.И. за творческий интерес к исследуемой проблеме и полезные замечания.

#### Литература

1. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, РИ-85-304, Дубна, 1985.
2. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, РИ-85-488, Дубна, 1985.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М., Наука, 1978.
4. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, РИ-693, Дубна, 1973.
5. Emelyanenko G.A. On methods of calculation with sparse matrices, Preprint JINR, E11-83-71, Dubna, 1983.
6. Rizvi S.A.H. Inverses of quasitridiagonal matrices. "Linear Algebra and Appl.", 56, p.177-184, 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел  
25 июня 1985 года

Вниманию организаций и лиц, заинтересованных в получении публикаций Объединенного института ядерных исследований

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ, включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

ИНДЕКС	ТЕМАТИКА	Цена подписки на год
1.	Экспериментальная физика высоких энергий	10 р. 80 коп.
2.	Теоретическая физика высоких энергий	17 р. 80 коп.
3.	Экспериментальная нейтронная физика	4 р. 80 коп.
4.	Теоретическая физика низких энергий	8 р. 80 коп.
5.	Математика	4 р. 80 коп.
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия	4 р. 80 коп.
7.	Физика тяжелых ионов	2 р. 85 коп.
8.	Криогеника	2 р. 85 коп.
9.	Ускорители	7 р. 80 коп.
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных	7 р. 80 коп.
11.	Вычислительная математика и техника	6 р. 80 коп.
12.	Химия	1 р. 70 коп.
13.	Техника физического эксперимента	8 р. 80 коп.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами	1 р. 70 коп.
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях	1 р. 50 коп.
16.	Дозиметрия и физика защиты	1 р. 90 коп.
17.	Теория конденсированного состояния	6 р. 80 коп.
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники	2 р. 35 коп.
19.	Биофизика	1 р. 20 коп.

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79.



В Объединенном институте ядерных исследований начал выходить сборник "Краткие сообщения ОИЯИ". В нем будут помещаться статьи, содержащие оригинальные научные, научно-технические, методические и прикладные результаты, требующие срочной публикации. Будучи частью "Сообщений ОИЯИ", статьи, вошедшие в сборник, имеют, как и другие издания ОИЯИ, статус официальных публикаций.

Сборник "Краткие сообщения ОИЯИ" будет выходить регулярно.

The Joint Institute for Nuclear Research begins publishing a collection of papers entitled *JINR Rapid Communications* which is a section of the JINR Communications and is intended for the accelerated publication of important results on the following subjects:

Physics of elementary particles and atomic nuclei.

Theoretical physics.

Experimental techniques and methods.

Accelerators.

Cryogenics.

Computing mathematics and methods.

Solid state physics. Liquids.

Theory of condensed matter.

Applied researches.

Being a part of the JINR Communications, the articles of new collection like all other publications of the Joint Institute for Nuclear Research have the status of official publications.

*JINR Rapid Communications* will be issued regularly.



Емельяненко Г.А.

P11-85-489

О свойствах систем линейных уравнений с неособенными трех-диагональными ленточными и квазитрехдиагональными матрицами.  
О стратегии решения систем уравнений

В настоящей статье, третьей из работ этой серии, намечены основные направления обобщения результатов<sup>1,2/</sup>, а также приводится общая стратегия решения систем уравнений с матрицами указанных типов.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Emelyanenko G.A.

P11-85-489

On the Properties of Systems of Linear Equations with Non-Singular Tridiagonal, Band and Quasitridiagonal Matrices.  
On the Strategy of the Solution of Systems of Equations

In the present article, the third from these series, we show the main directions of the generalization of results<sup>1,2/</sup> and also the whole strategy of the solution of the systems of equations with matrices of indicated types.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985