85-488

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р11-85-488

Г.А.Емельяненко

О СВОЙСТВАХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОСОБЕННЫМИ ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫМИ, ЛЕНТОЧНЫМИ И КВАЗИТРЕХДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

Компактные устойчивые схемы обращения трехдиагональных матриц

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

1985

I. Введение

В настоящей статье продолжаются исследования, начатые на основе нетрадиционного подхода /I/, по алгебре систем линейных уравнений с матрицами трехдиагонального типа. Доказывается ряд новых теорем о свойствах последовательностей, на базе которых изучаются особенности структуры операторов обратных к трехдиагональным. Доказывается также существование различных устойчивых компактных схем получения на ЭВМ матриц высокого порядка обратных к трехдиагональным.

Результаты настоящей работы основываются на теореме 5, доказанной*) в /I/ : Если $\mathbb{C}$ – неособенная (в общем случае несимметрическая) трехдиагональная матрица вида

$$C = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & & p_m & q_m \end{bmatrix}, \tag{I.I}$$

все элементы которой – $\{q_i\}_{i=1}^{m}$, $\{r_j, p_j\}_{j=2}^{m}$ отличны от нуля, то для элементов $B = C^{-1}$ – обратной матрицы справедливо представление

$$B_{ij} = const \cdot \begin{cases} \tilde{V}_i \cdot W_j\ , & i \le j \\ \tilde{W}_i \cdot V_j\ , & j \le i\ , \end{cases} \tag{I.2}$$

где

$$W_j = \tilde{W}_j \cdot \varphi_j\ , \quad V_j = \tilde{V}_j \cdot \varphi_j\ , \quad \varphi_j = \prod_{k=2}^{j} \frac{r_k}{p_k}\ , \quad j = 1, \dots, m,$$

$$\tilde{V}_i = (-1)^{i+1} \cdot q_i^{-1} \cdot \prod_{k=2}^{i} \frac{q_k}{r_k} \cdot \alpha_i\ , \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{I.3}$$

$$\tilde{W}_j = (-1)^{j+1} \cdot \prod_{k=2}^{j} \frac{p_k}{q_k} \cdot \beta_j\ , \qquad j = m, m-1, \dots, 1\ ,$$

---

*) Отметим, что в данной серии работ сохраняется преемственность обозначений, а также общая нумерация теорем и лемм/I/.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_{i+1}=\alpha_i-\gamma_i\cdot\alpha_{i-1},\\ \beta_{j-1}=\beta_j-\gamma_{j+1}\cdot\beta_{j+1},\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha_{i+1}=1-\sum\limits_{k=1}^{i}\gamma_k\cdot\alpha_{k-1},\ i=1,\dots,m,\\ \beta_{j-1}=1-\sum\limits_{k=j}^{m}\gamma_{k+1}\cdot\beta_{k+1},\ j=m,\dots,1,\end{array}\right.$$

$$\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=1,\quad \beta_{m+1}=\beta_m=\beta_{m-1}=1, \tag{I.4}$$

$$\gamma_k=\frac{p_k}{q_{k-1}}\cdot\frac{r_k}{q_k},\quad \gamma_1=\gamma_{m+1}=0,\quad k=2,\dots,m,\quad const=(\alpha_{m+1}^{-1}=\beta_0^{-1})$$

а также ограниченные последовательности $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ удовлетворяют равенствам

$$const\cdot(\beta_i\cdot\alpha_{i+1}-\gamma_{i+1}\cdot\alpha_i\cdot\beta_{i+1})=1,\quad i=1,2,\dots,m. \tag{I.5}$$

Выполнив перемножения в (I.3), для W_j и V_j получаем

$$W_j=(-1)^{j+1}\cdot\prod_{k=2}^{j}\frac{r_k}{q_k}\cdot\beta_j,\quad V_j=(-1)^{j+1}\cdot q_j^{-1}\cdot\prod_{k=2}^{j}\frac{q_k}{p_k}\cdot\alpha_j. \tag{I.6}$$

2. Свойства базисных последовательностей

Лемма 6. Для числовых последовательностей

$$\alpha_{i+1}=\alpha_i-\gamma_i\cdot\alpha_{i-1},\quad \alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=1,\quad i=1,2,\dots,m,$$
$$\beta_{j-1}=\beta_j-\gamma_{j+1}\cdot\beta_{j+1},\ \beta_{m+1}=\beta_m=\beta_{m-1}=1,\quad j=m,m-1,\dots,1, \tag{2.I}$$

где $\gamma_1=0$, $\gamma_{m+1}=0$, а $\{\gamma_k\}_{k=2}^{m}$ – произвольные вещественные числа, равенства

$$\gamma_i\cdot(1-\gamma_{i+2})=0,\quad \gamma_{j+1}(1-\gamma_{j-1})=0 \tag{2.2}$$

являются необходимыми и достаточными условиями существования*) ближайших справа от $\alpha_i=0$ и слева от $\beta_j=0$ нулевых значений $\alpha_k=0$ и $\beta_n=0$

При этом, если

I⁰. $\gamma_i=0$ и $\gamma_{j+1}=0$, то все члены последовательностей, начиная с α_i и β_j, обращаются в нуль, т.е. $\{\alpha_k=0\}_{k=i}^{m+1}$ и $\{\beta_n=0\}_{n=0}^{j}$;

2⁰. $\gamma_i\neq 0$, но $\gamma_{i+2}=1$, соответственно $\gamma_{j+1}\neq 0$, но $\gamma_{j-1}=1$, то $\alpha_{i+1}=\alpha_{i+2}\neq 0$, а $\alpha_{i+3}=0$ и $\beta_{j-1}=\beta_{j-2}\neq 0$, а $\beta_{j-3}=0$.

Доказательство леммы является прямым следствием проверки ее условий (2.2) и I⁰, 2⁰ с использованием (2.I). Мы не будем поэтому здесь его приводить в силу ограниченности объема публикации.

Замечание. При расчетах на ЭВМ условия (2.2), очевидно, следует заменить условиями

*) Мы воспользовались здесь обозначениями последовательностей $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$, возникших при изучении B (I.2). Однако результаты этого раздела справедливы для любых последовательностей типа (2.I).

$$\alpha_{i+3}=\gamma_i\cdot(1-\gamma_{i+2})\cdot\alpha_{i-1}=0,\quad \beta_{j-3}=\gamma_{j+1}(1-\gamma_{j-1})\cdot\beta_{j+1}=0. \tag{2.3}$$

На самом деле, "машинные" нули α_{i+3} и β_{j-3} могут появиться и при невыполнении (2.2), но при выполнении (2.3), если α_{i-1} и β_{j+1} имеют малые значения.

Лемма 7. Равенство единице всех элементов последовательности $\{\gamma_i\}_{i=2}^{m}$, а также кратность тройке числа $m+1$ (m – число членов последовательности), т.е. условия

$$\gamma_i=1,\quad i=2,\dots,m;\quad m+1=3\cdot k,\quad k=1,2,\dots \tag{2.4}$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы α_{m+1} и β_0 – члены последовательностей (2.I) обращались в нуль (либо чтобы $\alpha_m\neq 0$ и $\beta_1\neq 0$).

Доказательство. Пусть $\alpha_{m+1}=\beta_0=0$, т.е. являются нулями последовательностей (2.I). Тогда, подставляя (2.4) в (2.2), убеждаемся в их справедливости. Необходимость доказана. Для доказательства достаточности следует подставить (2.4) в (2.I). Мы не будем на этом останавливаться.

Из сравнения (2.3) и (2.2) убеждаемся теперь, что множество вычисленных на ЭВМ изолированных нулей последовательностей $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$ может быть шире того же теоретического*) множества. Избежать этого можно лишь введением последовательностей, изоморфных последовательностям $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$, для которых критерии (2.2) и (2.3) существования ближайших изолированных нулей совпадали бы. Справедлива следующая

Лемма 8. Последовательностям $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$ (2.I) можно поставить в соответствие последовательности

$$\Lambda_{k+1}=1-\gamma_k\cdot\Lambda_k^{-1},\quad \Lambda_1=\Lambda_2=1,\quad k=2,3,\dots,m,$$
$$G_{k-1}=1-\gamma_{k+1}\cdot G_k^{-1},\quad G_m=G_{m-1}=1,\quad k=m-1,\dots,1, \tag{2.5}$$

где $\left\{\Lambda_k=\frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}},\ G_k=\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}}\right\}$. При этом, если $\alpha_i=0$ и $\beta_j=0$ – изолированные нули последовательностей (2.I), то

$$\Lambda_{i-1}=\gamma_{i-1},\ \Lambda_i=0,\ \Lambda_{i+2}=1,\ \text{а также}\ \Lambda_{i+1}=\infty\ \text{и}\ \Lambda_i\cdot\Lambda_{i+1}\equiv-\gamma_i,$$
$$G_{j+1}=\gamma_{j+2},\ G_j=0,\ G_{j-2}=1,\ \text{а также}\ G_{j-1}=\infty\ \text{и}\ G_{j-1}\cdot G_j\equiv-\gamma_{j+1}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Рекурсии (2.5) следуют из (2.I), если ни один из членов последовательностей (2.I) не обращается в нуль. Вычислительный процесс (2.5), очевидно, прерывается, если в (2.I) встречаются изолированные нули $\alpha_i=0$ и $\beta_j=0$. При этом равенства $\frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}=\Lambda_i=0$ и $\frac{\beta_j}{\beta_{j+1}}=G_j=0$ следуют из определения, а равенства $\Lambda_{i-1}=\gamma_{i-1}$,

*) В приложениях результатов этого раздела к пробеме получения $C^{-1}=B$ это приводит к несоответствию свойств теоретической обратной матрицы B и ее вычисленного на ЭВМ образа (I.2).

$\Lambda_{i+2}=1$ и $G_{j+1}=\gamma_{j+2}$, $G_{j-2}=1$ из подстановки $\alpha_i=0$ и $\beta_j=0$ в (2.I), а также лемм 6 и 7. Для доопределения процесса (2.5) в сингулярных точках $\Lambda_i=0$ и $G_j=0$ получим выражения α_{i+3} через α_i и α_{i-1}, а также β_{j-3} через β_j и β_{j+1}, воспользовавшись для этого (2.I). Из (2.7) с учетом лемм 6 и 7 получаем при $\alpha_i=0$ и $\beta_j=0$ формальные равенства

$$\frac{\alpha_{i+3}}{\alpha_{i-1}} \equiv \frac{\alpha_{i+3}}{\alpha_{i+2}}\cdot\frac{\alpha_{i+2}}{\alpha_{i+1}}\cdot\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\cdot\frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} = -\gamma_i\cdot(1-\gamma_{i+2}), \qquad (2.8)$$

$$\frac{\beta_{j-3}}{\beta_{j+1}} \equiv \frac{\beta_{j-3}}{\beta_{j-2}}\cdot\frac{\beta_{j-2}}{\beta_{j-1}}\cdot\frac{\beta_{j-1}}{\beta_j}\cdot\frac{\beta_j}{\beta_{j+1}} = -\gamma_{j+1}(1-\gamma_{j-1}).$$

Кроме того, из (2.I) при тех же условиях $\alpha_i=0$ и $\beta_j=0$ следуют равенства

$$\frac{\alpha_{i+3}}{\alpha_{i+1}}=(1-\gamma_{i+2}) \quad \text{и} \quad \frac{\beta_{j-3}}{\beta_{j-1}}=(1-\gamma_{j-1}). \qquad (2.9)$$

Откуда получаем (если подставить (2.9) в (2.8)), что

$$\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\cdot\frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} \equiv \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_{i-1}} = -\gamma_i \quad \text{и} \quad \frac{\beta_{j-1}}{\beta_j}\cdot\frac{\beta_j}{\beta_{j+1}} \equiv \frac{\beta_{j-1}}{\beta_{j+1}} = -\gamma_{j+1}. \qquad (2.I0)$$

Очевидно, тождества (2.I0) следует интерпретировать как способ раскрытия неопределенностей*)

$$\Lambda_{i+1}\cdot\Lambda_i \equiv \infty\cdot 0 = -\gamma_i \quad \text{и} \quad G_{j-1}\cdot G_j \equiv \infty\cdot 0 = -\gamma_{j+1}. \qquad (2.II)$$

Итак, показали, что из (2.I) следуют (2.5)÷(2.6). Доказательство обратного утверждения, т.е. что из (2.5)÷(2.6) следует (2.I), не вызывает затруднений. Для этого достаточно переписать (2.5) в виде

$$\Lambda_k\cdot(1-\Lambda_{k+1})=\gamma_k,\ k=2,\dots,m \quad \text{и} \quad G_k\cdot(1-G_{k-1})=\gamma_{k+1},\ k=m-1,\dots,1 \qquad (2.I2)$$

и воспользоваться (2.6), (2.I0). Лемма доказана.

3. Условия сингулярности главных миноров матрицы, обратной к трехдиагональной матрице

При вычислениях на ЭВМ C^{-1} особенно важно иметь простые критерии сингулярности как самой матрицы C, так и ее главных миноров. Справедлива следующая

Теорема 6. Для любой трехдиагональной матрицы C (I.I) с отличными от нуля элементами и при любых фиксированных i и j из указанных интервалов условия:

I°. $\alpha_i=0 \to \Lambda_i=0$, $2<i\le m+1$; $\beta_{m-j}=0\to G_{m-j}=0$, $2\le j\le m$ (3.I)

*) Остальные элементы подмножеств (а в случае отсутствия изолированных нулей множества $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$ целиком) ограничены с точностью до выполнения равенств (2.I2).

являются достаточными для сингулярности ее встречных*) главных миноров порядка i и j соответственно;

2°. $\alpha_{i-1}=0$, $\alpha_i=0\to\Lambda_{i-1}=\Lambda_i=0$, $3<i\le m$; (3.2)

$\beta_{m-j}=0$, $\beta_{m-j+1}=0\to G_{m-j}=G_{m-j+1}=0$, $3<j\le m$

являются достаточными для сингулярности всех ее встречных главных миноров, начиная с i и j и выше;

3°. $\alpha_i=\beta_i=0\to\Lambda_i=G_i=0$, $3\le i\le m-2$ (3.3)

являются достаточными для сингулярности самой матрицы C. Здесь $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$ есть (I.4), а $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$ есть (2.5)÷(2.6).

Доказательство теоремы следует из факта одновременной сингулярности (регулярности) встречных главных миноров самой матрицы C (I.I) и ей обратной (I.2). Из общего представления $B=C^{-1}$ (I.2)÷(I.5) следует, что равенство нулю любого из элементов последовательностей $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$, а следовательно, и последовательностей $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$, приводит к нулевым окаймлениям матриц порядка $m-i$, полученных из B (I.2) вычеркиванием первых i-строк и i-столбцов и порядка j, стоящих на пересечении первых ее j-строк и j-столбцов соответственно. Тем самым справедливость (3.I) установлена. Условия (3.2) мы включили в эту теорему лишь для полноты картины, хотя они могут реализоваться в соответствии с леммой 6 лишь при выполнении одновременных равенств $\alpha_i=0$ и $\gamma_i=0$, $\beta_j=0$ и $\gamma_{j+1}=0$. Мы же пока рассматриваем в (I.I)÷(I.5) случай $\{\gamma_k\ne 0\}$. И, наконец, условие (3.3) означает, учитывая (I.2), (I.3), что у $B=C^{-1}$ i-строка и i-столбец состоят из нулей. Теорема доказана.

4. Компактные схемы вычислений матриц, обратных к неособенным трехдиагональным

Исходя из результатов двух предыдущих параграфов легко построить различные компактные схемы вычисления $C^{-1}=B$. Справедлива следующая

Теорема 7. Если C (I.I) – неособенная трехдиагональная матрица с отличными от нуля элементами, то для элементов обратной ей матрицы $B=C^{-1}$ справедливо представление

$$B_{ij} = const\cdot\begin{cases} q_i^{-1}\cdot\alpha_i\cdot\beta_i, & i=j,\\ (-1)^{i+j}\cdot q_i^{-1}\cdot\alpha_i\cdot\beta_j\cdot\prod\limits_{k=i+1}^{j}\dfrac{r_k}{q_k}, & i\le j,\\ (-1)^{i+j}\cdot q_j^{-1}\cdot\beta_i\cdot\alpha_j\cdot\prod\limits_{k=j+1}^{i}\dfrac{p_k}{q_k}, & j\le i,\end{cases} \qquad (4.I)$$

*) Под встречными главными минорами матрицы C (I.I) мы понимаем /I/ главные миноры, начинающиеся соответственно с верхнего и нижнего концов ее главной диагонали.

где последовательности $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$ и $const$ задаются в виде (I.4) и удовлетворяют условиям (I.5). При этом:

$$
\begin{aligned}
&1^0.\ \text{Если } \alpha_i=0\ ,\ \text{то } B_{ii-1}=r_i^{-1}\ \text{ и } B_{ij}\overset{j\geq i}{=}0\ ,\ B_{ki}\overset{k\geq i}{=}0\ ;\\
&2^0.\ \text{Если } \beta_i=0\ ,\ \text{то } B_{ii+1}=P_{i+1}^{-1}\ \text{ и } B_{ij}\overset{j\leq i}{=}0\ ,\ B_{ki}\overset{k\leq i}{=}0\ ;\\
&3^0.\ \text{Если } B_{ii}=0\ (\text{т.е. } \alpha_i=0 \text{ или } \beta_i=0\ ),\ \text{то } B_{i+1\,i+1} \text{ и}\\
&\qquad B_{i-1\,i-1} \text{ одновременно в нуль не обращаются.}
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Доказательство. Представление (4.I) легко следует из (I.2)÷(I.3), если воспользоваться (I.6). Равенство нулю полустрок (полустолбцов) (4.2) является прямым следствием (4.I). Из условия (I.5) получаем при этом

$$const\cdot(\gamma_{i+1}\cdot\alpha_i\cdot\beta_{i+1})=-1\ .$$

С другой стороны, в соответствии с представлением (4.I) имеем

$$B_{ii+1}=const\cdot(-1)\cdot q_i^{-1}\cdot\alpha_i\cdot\beta_{i+1}\cdot\frac{r_{i+1}}{q_{i+1}}\ .$$

Подставив в последнее равенство предыдущее, а также воспользовавшись выражением (I.4) для γ_{i+1}, получаем равенство $B_{ii+1}=P_{i+1}^{-1}$. Аналогичным образом поступаем при доказательстве равенства $B_{ii-1}=r_i^{-1}$. Итак, I^0 и 2^0 в (4.2) также доказаны. Для доказательства 3^0 в (4.2) воспользуемся выражениями

$$B_{i-1\,i-1}=const\cdot q_{i-1}^{-1}\cdot\alpha_{i-1}\cdot\beta_{i-1}\ ,\ B_{ii}=const\cdot q_i^{-1}\cdot\alpha_i\cdot\beta_i\ ,\ B_{i+1\,i+1}=const\cdot q_{i+1}^{-1}\cdot\alpha_{i+1}\cdot\beta_{i+1}\ ,\tag{4.3}$$

которые следуют из (4.I). Получим теперь выражение $B_{i+1\,i+1}$ через B_{ii} и $B_{i-1\,i-1}$, не вдаваясь в подробности выкладок,

$$q_i\cdot B_{ii}=(1-2r_iB_{ii-1})+\gamma_{i+1}q_{i+1}B_{i+1\,i+1}-\gamma_i\cdot q_{i-1}\cdot B_{i-1\,i-1}\ ,\tag{4.4}$$

где, согласно I^0 и 2^0 (4.2) в этом случае,

$$B_{ii-1}=\begin{cases} r_i^{-1}\ , & \text{если } \alpha_i=0\ ,\\ 0\ , & \text{если } \beta_i=0\ ,\\ -B_{ii}\left(\frac{P_i}{q_{i-1}}\cdot\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right), & \text{если } \alpha_i\#0,\#\beta_i\to B_{ii}\#0\ .\end{cases}\tag{4.4'}$$

Если теперь $B_{ii}=0$, то приходим к 3^0 в (4.2), так как

$$(\mp 1\overset{(4.4)}{=}1-2\cdot r_i\,B_{ii-1})+\gamma_{i+1}\cdot q_{i+1}\cdot B_{i+1\,i+1}-\gamma_i\cdot q_{i-1}\cdot B_{i-1\,i-1}=0\ .\tag{4.5}$$

Теорема доказана.

Замечание. Как видим, представление (4.I), (4.2) матрицы, обратной к C (I.I), компактно и эффективно с точки зрения организации вычислений на ЭВМ. Однако это представление может накладывать иногда ограничения на порядок m матрицы C (I.I).

Докажем следующий результат.

Лемма 9. Пусть C – трехдиагональная матрица вида (I.I), тогда для вычисления обратной матрицы $C^{-1}=B$ достаточно знать лишь элементы ее диагонали – B_{ii}, поддиагонали – $B_{i-1\,i}$ и наддиагонали – B_{ii+1}.

Доказательство леммы следует из условия обратимости $C^{-1}\cdot C=E$, которое приводит к системам равенств

$$
\begin{aligned}
&B_{ii-1}\cdot r_i+B_{ii}\cdot q_i+B_{ii+1}\cdot P_{i+1}=1\ , && i=j\ ,\\
&B_{ij-1}\cdot r_j+B_{ij}\cdot q_j+B_{ij+1}\cdot P_{j+1}=0\ , && 1\leq i<j\leq m,\\
&B_{ij-1}\cdot r_j+B_{ij}\cdot q_j+B_{ij+1}\cdot P_{j+1}=0\ , && 1\leq j<i\leq m.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Прежде всего из (4.6) следует, что системы равенств для верхнего треугольника B_{ij} $(i\leq j)$ и нижнего треугольника ($j\leq i$) формально совпадают, хотя и приводят к различным итерационным процедурам

$$B_{ij+1}\overset{i<j}{=}-\left(\frac{r_j}{P_{j+1}}B_{ij-1}+\frac{q_j}{P_{j+1}}B_{ij}\right)\ ,\tag{4.7}$$

$$B_{ij-1}\overset{j<i}{=}-\left(\frac{P_{j+1}}{r_j}B_{ij+1}+\frac{q_j}{r_j}B_{ij}\right)\ ,$$

где B_{ii-1}, B_{ii} и B_{ii+1} удовлетворяют первому равенству в (4.6) и считаются заданными. Лемма доказана.

Замечание. Хотя процедуры (4.7) формально и определяют $C^{-1}=B$ при заданных B_{ii-1}, B_{ii}, B_{ii+1}, однако они оказываются часто непригодными при реализации их на ЭВМ.

Теорема 8. Пусть C (I.I) – неособенная трехдиагональная матрица с отличными от нуля элементами. Тогда элементы ей обратной матрицы $C^{-1}=B$ могут быть вычислены в общем случае устойчивым образом при $\{|\gamma_k|\leq 1\}$ в виде*):

$$B_{ii}\overset{1\leq i\leq m}{=}\begin{cases}0, \text{ если } \Lambda_i=0 \text{ или (и) } G_i=0\ ,\\ q_i^{-1}\cdot(G_{i-1}+\Lambda_{i+1}-1)^{-1}, \text{ если } \Lambda_i\#0\#G_i\ ;\end{cases}\tag{4.8}$$

$$B_{ij}=\begin{cases}B_{ii}(-1)^{i+j}\prod\limits_{k=i}^{j-1}\eta_k\ ,\ i<j\ , \text{ если } (\Lambda_i\#0\#G_i\to B_{ii}\#0),\\ B_{ii}(-1)^{i+j}\prod\limits_{k=j+1}^{i}\mu_k\ ,\ j<i\ , \text{ если } (\Lambda_i\#0\#G_i\to B_{ii}\#0);\end{cases}\tag{4.9}$$

$$B_{ij}=\begin{cases}\begin{cases}(P_{i+1}^{-1}=B_{ii+1})(-1)^{i+j-1}\prod\limits_{k=i+1}^{j-1}\eta_k\ ,\ i+1\leq j\leq m,\ (\Lambda_i\#0,\ G_i=0\to B_{ii}=0),\\ 0\ ,\ i\leq j, \text{ если } \Lambda_i=0\ ,\ G_i-\text{любое}\ ,\end{cases}\\ \begin{cases}0,\ j\leq i\ , \text{ если } G_i=0\ ,\ \Lambda_i-\text{любое}\ ,\\ (r_i^{-1}=B_{ii-1})\cdot(-1)^{i+j-1}\prod\limits_{k=j+1}^{i-1}\mu_k,\ j+1\leq i\leq m\ , \text{ если } (G_i\#0,\Lambda_i=0\to B_{ii}=0),\end{cases}\end{cases}\tag{4.10}$$

---

*) Здесь, как и прежде, $\prod\limits_{k=i}^{j}(\cdot)=\begin{cases}1, \text{ если } j<i\ ,\\ (\cdot)_i\cdots(\cdot)_j\ , \text{ если } i\leq j\ ,\end{cases}$ а также $(-1)^{i+j}=(-1)^{i-j}=(-1)^{j-i}$.

где[*)]

$$\begin{cases} G_{i-1} = 1 - \gamma_{i+1} \cdot G_i^{-1}, \quad G_m = G_{m-1} = 1, \quad i = m-1, \ldots, 1, \\ \Lambda_{j+1} = 1 - \gamma_j \cdot \Lambda_j^{-1}, \quad \Lambda_1 = \Lambda_2 = 1, \quad j = 3, 4, \ldots, m, \\ \gamma_k = \dfrac{p_k}{q_{k-1}} \cdot \dfrac{r_k}{q_k}, \quad \gamma_1 = \gamma_{m+1} = 0, \quad k = 2, 3, \ldots, m, \end{cases} \qquad (4.11)$$

$$\begin{cases} \eta_k = \dfrac{q_k}{p_{k+1}} \left[(1 - G_{k-1}) = \gamma_{k+1} \cdot G_k^{-1} \right], \quad \eta_m = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \\ \mu_k = \dfrac{q_k}{r_k} \left[(1 - \Lambda_{k+1}) = \gamma_k \cdot \Lambda_k^{-1} \right], \quad \mu_1 = 0, \quad k = 2, 3, \ldots, m, \end{cases}$$

а также[**)]

$$(\Lambda_{k-1} = \gamma_{k-1}, \ \Lambda_{k+1} = \infty, \ \Lambda_{k+2} = 1) \to \left(\mu_{k-1} = \frac{q_{k-1}}{r_{k-1}}, \ \mu_k = \infty, \ \mu_{k+1} = 0\right), \qquad (4.12)$$

но $\mu_{k+1} \cdot \mu_k = -\frac{p_{k+1}}{r_k}$, если $\Lambda_k = 0$ – изолированный нуль последовательности $\{\Lambda\}$; аналогично, если $G_k = 0$ – изолированный нуль последовательности $\{G\}$, то

$$(G_{k+1} = \gamma_{k+2}, \ G_{k-1} = -\infty, \ G_{k-2} = 1) \to \left(\eta_{k+1} = \frac{q_{k+1}}{p_{k+2}}, \ \eta_k = \infty, \ \eta_{k-1} = 0\right), \qquad (4.12)'$$

но $\eta_{k-1} \cdot \eta_k = -\frac{r_k}{p_{k+1}}$.

<u>Доказательство</u> теоремы существенным образом опирается на теорему 7, а также леммы 8 и 9. Итак, пусть справедлива теорема 7, где последовательности $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$ (1.4) удовлетворяют условиям (1.5). Тогда для этих последовательностей справедливы леммы 6÷8 и, следовательно, существуют последовательности $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$ (4.11), для которых в общем случае выполняются условия (4.12), если учесть также, что из (4.11) следуют равенства

$$G_k^{-1} = (1 - G_{k-1}) \cdot \gamma_{k+1}^{-1} \quad \text{и} \quad \Lambda_k^{-1} = (1 - \Lambda_{k+1}) \cdot \gamma_k^{-1}, \qquad (4.13)$$

из которых легко получить, воспользовавшись $\{\gamma_k\}$ (4.11),

$$\mu_k = \frac{p_k}{q_{k-1}} \Lambda_k^{-1} = \frac{q_k}{r_k} (\gamma_k \Lambda_k^{-1}) = \frac{q_k}{r_k} (1 - \Lambda_{k+1}), \qquad (4.14)$$

$$\eta_k = \frac{r_{k+1}}{q_{k+1}} G_k^{-1} = \frac{q_k}{p_{k+1}} (\gamma_{k+1} G_k^{-1}) = \frac{q_k}{p_{k+1}} (1 - G_{k-1}),$$

а также, воспользовавшись (4.12), тождества

$$(1 - G_{k-1})(1 - G_{k-2}) \equiv -\gamma_k \quad \text{и} \quad (1 - \Lambda_{k+1})(1 - \Lambda_{k+2}) \equiv -\gamma_{k+1}, \qquad (4.15)$$

если $G_k = 0$ и $\Lambda_k = 0$.

---

*) В (4.11) ввели запись $[(\cdot) = —]$, чтобы указать на экономию вычислений $\{\eta\}$ и $\{\mu\}$ на ЭВМ.

**) ($\Lambda_{k+1} = \infty = \mu_k$, если $\Lambda_k = 0$) и ($G_{k-1} = \infty = \eta_k$, если $G_k = 0$). Хранить ∞ в памяти ЭВМ можно в виде любого признака (например, холерической константы или "машинной бесконечности"-1). При этом реально в вычислениях B_{ij} ∞ фактически не участвует в силу (4.12) и (4.8).

Учитывая теперь (4.14 и (4.15), легко получить тождества

$$\frac{r_{k+1}}{q_{k+1}} G_k^{-1} \cdot \frac{r_k}{q_k} G_{k-1}^{-1} = \frac{q_k}{p_{k+1}} (1 - G_{k-1}) \frac{q_{k-1}}{p_k} (1 - G_{k-2}) \equiv -\frac{r_k}{p_{k+1}}, \qquad (4.16)$$

если $G_k = 0$ (или $\beta_k = 0$). И аналогично

$$\frac{p_k}{q_{k-1}} \Lambda_k^{-1} \cdot \frac{p_{k+1}}{q_k} \Lambda_{k+1}^{-1} = \frac{q_k}{r_k} (1 - \Lambda_{k+1}) \frac{q_{k+1}}{r_{k+1}} (1 - \Lambda_{k+2}) \equiv -\frac{p_{k+1}}{r_k}, \qquad (4.17)$$

если $\Lambda_k = 0$ (или $\alpha_k = 0$).

Итак, справедливость (4.11), (4.12) установлена. Заодно мы показали также справедливость тождеств (4.15), эквивалентных соответствующим тождествам (2.1'). Кроме того, мы ввели полезные в дальнейшем тождества (4.16), (4.17). Отметим теперь, что для C (1.1) в соответствии с условием 2° теоремы 6, а также теоремой 7, элементы B_{ii} и B_{ii-1} обращаются одновременно в нуль только при $G_i = 0$ (т.е. $B_{ij} = 0$ для $j \le i$ при этом условии). Аналогично имеем $B_{ii} = 0$ и $B_{ii+1} = 0$ одновременно, если $\Lambda_i = 0$ (т.е. $B_{ij} = 0$, для $i \le j$). Поэтому представление (4.8)÷(4.12) удовлетворяет также лемме 9, если учесть 1° и 2° теоремы 7. Другими словами, $C^{-1} = B$ полностью определяется устойчивым образом при $\{|\gamma_k| \le 1\}$ своими элементами $\{B_{ii-1}, B_{ii}, B_{ii+1}\}$. Исходя из этого найдем (4.9),(4.10). Итак, пусть $B_{ii} \# 0$ (т.е. $\Lambda_i \# 0 \# G_i$ одновременно). Тогда из (4.1) следует, что

$$B_{ij} \overset{i<j}{=} const \cdot q_i^{-1} \cdot \alpha_i \cdot \beta_i \left[(-1)^{i+j} \cdot \frac{\beta_j}{\beta_i} \cdot \prod_{k=i+1}^{j} \frac{r_k}{q_k} \right] =$$

$$= B_{ii} (-1)^{i+j} \left[\frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} \cdot \frac{\beta_{i+2}}{\beta_{i+1}} \cdots \frac{\beta_j}{\beta_{j-1}} \right] \cdot \prod_{k=i+1}^{j} \frac{r_k}{q_k} =$$

$$= B_{ii} (-1)^{i+j} \prod_{k=i}^{j-1} G_k^{-1} \cdot \prod_{k=i+1}^{j} \frac{r_k}{q_k} = B_{ii} (-1)^{i+j} \prod_{k=i}^{j-1} \left(\frac{r_{k+1}}{q_{k+1}} G_k^{-1} = \eta_k \right),$$

где произведение $\prod_{k=i}^{j-1} G_k^{-1}$ естественно понимается в смысле выполнения условий (4.12) для $\{G\}$. Аналогичным же образом показывается и равенство второе в (4.9). Итак, (4.9) установлено. При этом следует иметь в виду, что, если для любого k из интервала $i \le k \le j-1 \le m-1$ значение $G_{k-1} = 1$ (т.е. $G_k^{-1} = 0$) в соответствии с (4.14), то соответствующее $B_{ik} = 0$ при $B_{ii} \# 0$. Аналогично для $j+1 \le k \le i \le m-1$, если $\Lambda_{k+1} = 1$ (т.е. $\Lambda_k^{-1} = 0$) в соответствии с (4.14), то $B_{ik} = 0$, при $B_{ii} = 0$. В соответствии с этим B_{ii-1}, B_{ii+1} могут оказаться равными нулю исходя из (4.9), если $G_i \# 0 \# \Lambda_i$, но $G_{i-1} = 1$ и $\Lambda_{i+1} = 1$, что будет соответствовать $B_{ii} = q_i^{-1}$. Установим теперь (4.10). Равенства $B_{ij} = 0$ в (4.10) очевидным образом следуют, при отмеченных в них условиях, из теоремы 7. Равенства $B_{ii+1} = p_{i+1}^{-1}$

при $G_i=0$ и $B_{i\,i-1}=\tau_i^{-1}$ при $\Lambda_i=0$ нами уже были также установлены выше в теореме 7. Получим теперь исходя из (4.I) и (4.I2) выражения

$$B_{ij} \overset{i+1\le j\le m}{=\!=} const\cdot(-1)^{i+j}\cdot q_i^{-1}\cdot\alpha_i\cdot\beta_j\cdot\prod_{k=i+1}^{j}\frac{\tau_k}{q_k} =$$

$$=\Big[const\cdot(-1)\cdot\alpha_i\cdot\beta_{i+1}\,q_i^{-1}\frac{\tau_{i+1}}{q_{i+1}}\Big]\cdot(-1)^{i+(j-1)}\cdot\frac{\beta_j}{\beta_{i+1}}\prod_{k=i+2}^{j}\frac{\tau_k}{q_k} =$$

$$=B_{i\,i+1}\cdot(-1)^{i+j-1}\prod_{k=i+1}^{j-1}G_k^{-1}\prod_{k=i+2}^{j}\frac{\tau_k}{q_k},$$

если $\beta_{i+1}\neq 0$. Первое равенство в (4.I0), таким образом, установлено. Таким же образом доказывается и последнее равенство в (4.I0), если учесть, что $\frac{q_{i-1}}{q_j}\prod\limits_{k=j+1}^{i-1}\frac{P_k}{q_k}=\prod\limits_{k=j}^{i-2}\frac{P_{k+1}}{q_k}$. Докажем теперь справедливость (4.8) для диагональных элементов B_{ii}. Равенство $B_{ii}=0$ следует из (4.I) при любом из условий $\alpha_i=0\rightarrow\Lambda_i=0$ или $\beta_i=0\rightarrow G_i=0$, где $\{G\}$ и $\{\Lambda\}$ есть (4.II), (4.I2)$\Longleftrightarrow$(4.I5). Пусть теперь $B_{ii}\neq 0\rightarrow\alpha_i\neq 0\rightarrow\Lambda_i\neq 0$ и $\beta_i\neq 0\rightarrow G_i\neq 0$. Тогда условия (I.5) можно переписать в виде

$$const\cdot\alpha_i\cdot\beta_i\cdot\Big(\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}-\gamma_{i+1}\frac{\beta_{i+1}}{\beta_i}\Big)=1. \qquad (4.I8)$$

Откуда следует, если учесть (4.I), а также (2.5),

$$B_{ii}=q_i^{-1}(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-1)^{-1}\equiv q_i^{-1}(1-\gamma_i\Lambda_i^{-1}-\gamma_{i+1}G_i^{-1})^{-1}. \qquad (4.I9)$$

Тем самым можно считать законченным доказательство (4.8). Очевидно, равенство (4.I9) можно переписать в виде

$$B_{ii}=q_i^{-1}\cdot G_i\,\Lambda_i\cdot\big[G_i\cdot(\Lambda_i-\gamma_i)-\gamma_{i+1}\Lambda_i\big]^{-1}. \qquad (4.20)$$

Откуда следует, что при $G_i\rightarrow 0$ **или** $\Lambda_i\rightarrow 0$ (или $G_i\rightarrow 0$ и $\Lambda_i\rightarrow 0$ одновременно) $B_{ii}\rightarrow 0$ при конечных отличных от нуля q_i. С другой стороны, при конечных отличных от нуля q_i и ограниченных B_{ii}, G_i и Λ_i число, стоящее в $[\cdot]$ в (4.20), ограничено. И, следовательно,

$$G_i(\Lambda_i-\gamma_i)-\gamma_{i+1}\cdot\Lambda_i\neq 0,\quad i=1,2,\dots,m\,. \qquad (4.2I)$$

если G_i и Λ_i не обращаются в нуль одновременно, т.е. матрица C (I.I) не вырождена. Таким образом, (4.20) можно считать наиболее общей устойчивой (при $|\gamma_i|\le 1$ и $\{\Lambda\}$, $\{G\}$ (4.II), (4.I2)) формулой вычисления B_{ii} при всех i. Однако (4.I9) имеет более простой вид. И, наконец, в завершение доказательства теоремы отметим, что все величины $\{G\}$, $\{\Lambda\}$ и $\{B_{ii}\}$, а также $\{\eta\}$ и $\{\mu\}$ (4.8),(4.II) вычисляются устойчивым образом, если $\{|\gamma_k|\le 1\}$ (4.II). При этом, в соответствии с (4.I2) и отмеченными в сноске (ж) свойствами произведений, имеем

$$\prod_{k=i,i+1}^{j-1}\eta_k=\begin{cases}1, & \text{если } (j-1)<(i \text{ или } i+1)=\ell,\\ 0, & \text{если } \eta_{j-1}=0,\\ \eta_\ell\cdot\eta_{\ell+1}\cdots\eta_{j-1}, & \text{если } \eta_k\neq 0 \text{ для } \ell\le k\le j-1,\ \ell=i \text{ или } i+1,\\ \prod\limits_{k=i,i+1}^{j-1}\eta_k\cdot\prod\limits_{k_\tau}\Big(-\frac{\tau_{k_\tau}}{P_{k_\tau+1}}\Big)=(\eta_{i,i+1}\cdots\eta_{k_1-2})(\eta_{k_1-1}\eta_{k_1})(\eta_{k_1+1}\cdots\eta_{k_2-2})(\eta_{k_2-1}\eta_{k_2})\cdots\eta_{j-1}, & \\ \quad k\notin\bigcup\limits_{k_\tau}(k_\tau-1,k_\tau) & \end{cases} \qquad (4.22)$$

$$\prod_{k=j+1}^{i,i-1}\mu_k=\begin{cases}1, & \text{если } j+1>\ell,\ \ell=(i \text{ или } i-1),\\ 0, & \text{если } \mu_{j+1}=0,\\ \mu_{i,i-1}\cdots\mu_{j+1}, & \text{если } \mu_k\neq 0 \text{ для } j+1\le k\le\ell,\ \ell=i \text{ или } i+1,\\ \prod\limits_{k=j+1}^{i,i-1}\mu_k\cdot\prod\limits_{n_\tau}\Big(-\frac{P_{n_\tau+1}}{\tau_{n_\tau}}\Big)=\mu_{i-1,i}\cdots(\mu_{n_2+1}\mu_{n_2})(\mu_{n_2-1}\cdots\mu_{n_1+2})(\mu_{n_1+1}\mu_{n_1})\cdots\mu_{j+1}, & \\ \quad k\notin\bigcup\limits_{n_\tau}(n_\tau,n_\tau+1). & \end{cases} \qquad (4.23)$$

В последних тождествах $\bigcup\limits_{k_\tau}(k_\tau-1,k_\tau)$ – множество номеров пар членов последовательности $\{\eta\}$, таких, что $\eta_{k_\tau-1}=0$, $\eta_{k_\tau}=\infty$, а также $\bigcup\limits_{n_\tau}(n_\tau,n_\tau+1)$ – множество номеров пар членов последовательности $\{\mu\}$, таких, что ($\mu_{n_\tau}=\infty$, $\mu_{n_\tau+1}=0$). Другими словами, если в ряду из членов последовательностей $\{\eta_k\}_{k=i,i+1}^{j-1}$ и $\{\mu_k\}_{k=j+1}^{i,i-1}$ встречаются изолированные нули $\eta_{k_\tau-1}=0\Longleftrightarrow 0=G_{k_\tau}$ и $\mu_{n_\tau+1}=0\Longleftrightarrow 0=\Lambda_{n_\tau}$, то произведения из членов этих рядов разбиваются на сомножители с учетом свойств (4.I2) изолированных нулей. Выделим особо следующие факты и результаты.

Следствие. Представление (4.8)$\div$(4.I0) для элементов обратной матрицы обладает, очевидно, тем свойством, что ошибка элемента B_{ij} при его вычислении не превосходит ошибки B_{ii} (или $B_{i-1\,i}$, $B_{i+1\,i}$), если

$$\Big|\prod_{k=i,i+1}^{j-1}\eta_k\Big|\le 1 \quad\text{и}\quad \Big|\prod_{k=j+1}^{i,i-1}\mu_k\Big|\le 1 \text{ при } \{|\gamma_k|\le 1\}_{k=2}^{m},\ 1\le i,j\le m. \qquad (4.24)$$

При этом неравенства (4.24) понимаются в общем случае с учетом (4.22) ÷(4.23). Запишем теперь неравенства, которые, очевидно, являются <u>достаточными условиями</u> для выполнения (4.24), а именно

$$\{0<|\eta_k|\le 1\}_{k=1}^{m-1}, \quad \{0<|\mu_k|\le 1\}_{k=2}^{m} \quad \text{при} \quad \{|\gamma_k|\le 1\}_{k=2}^{m}. \tag{4.25}$$

Эти условия, кроме того, гарантируют монотонное убывание*) при $1\le i\le m$ элементов B_{ij} от диагонали B_{ii} к первому B_{i1}- и последнему B_{im}-столбцам. Условия (4.24), очевидно, могут выполняться и при других μ и η, которые не все удовлетворяют (4.25), а следовательно, и не обеспечивают монотонного поведения элементов в строках обратной матрицы B. Учитывая, что элементы $\{B_{ii}\}$ при $\{|\gamma_k|\le 1\}$ вычисляются устойчиво, выше это установлено, сформулируем следующий самостоятельный результат.

<u>Теорема 9</u>. Если C(I.I) - неособенная трехдиагональная матрица общего вида**), то неравенства (4.25) являются достаточными, а неравенства (4.24) необходимыми и достаточными условиями устойчивого вычисления элементов обратной $C^{-1}=B$ матрицы по (4.8)÷(4.12) и (4.22)÷(4.23).

<u>Доказательство</u> этой теоремы является фактически следствием доказательства теоремы 8.

В случае же выполнения неравенств, противоположных (4.24) и (4.25), будет справедлива

<u>Теорема I0</u>. Для любой неособенной трехдиагональной матрицы C(I.I) общего вида неравенства

$$\{|\eta_k|>1\}_{k=1}^{m-1} \quad \text{и} \quad \{|\mu_k|>1\}_{k=2}^{m} \quad \text{при} \quad \{|\gamma_k|\le 1\}_{k=2}^{m} \tag{4.26}$$

являются достаточными, а неравенства

$$\Big\{\Big|\prod_{k=j}^{m-1}\eta_k\Big|>1\Big\}_{j=1}^{m-1} \quad \text{и} \quad \Big\{\Big|\prod_{k=2}^{j}\mu_k\Big|>1\Big\}_{j=2}^{m} \quad \text{при} \quad \{|\gamma_k|\le 1\}_{k=2}^{m} \tag{4.27}$$

необходимыми и достаточными условиями устойчивого вычисления элементов $C^{-1}=B$ на основе представления

$$B_{ij}=\begin{cases}(-1)^{m+j}B_{im}\cdot\prod_{k=j}^{m-1}\eta_k^{-1}, & i\le j\le m,\\ (-1)^{j-1}\cdot B_{i1}\prod_{k=2}^{j}\mu_k^{-1}, & j\le i\le m,\end{cases} \tag{4.28}$$

где

---
*) Более точно было бы сказать невозрастание.

**) Мы имеем здесь в виду, что некоторые из встречных главных миноров C (I.I) могут обращаться в нуль.

$$B_{im}=\begin{cases}(-1)^{i+m}\cdot B_{ii}\cdot\prod_{k=i}^{m-1}\eta_k, & \text{если} \quad B_{ii}\neq 0\Longleftrightarrow G_i\neq 0\neq\Lambda_i,\\ 0, & \text{если} \quad \Lambda_i=0,\\ (-1)^{i+m-1}\cdot(P_{i+1}^{-1}=B_{i\,i+1})\cdot\prod_{k=i+1}^{m-1}\eta_k, & \text{если} \quad \Lambda_i\neq 0,\ G_i=0\to B_{ii}=0.\end{cases} \tag{4.29}$$

$$B_{i1}=\begin{cases}(-1)^{i+1}\cdot B_{ii}\cdot\prod_{k=2}^{i}\mu_k, & \text{если} \quad B_{ii}\neq 0\Longleftrightarrow G_i\neq 0\neq\Lambda_i,\\ 0, & \text{если} \quad G_i=0,\\ (-1)^{i}\cdot(\tau_i^{-1}=B_{i\,i-1})\cdot\prod_{k=2}^{i-1}\mu_k, & \text{если} \quad G_i\neq 0,\ \Lambda_i=0\to B_{ii}=0,\end{cases}$$

а $\{B_{ii},\eta_i,\mu_i\}$ удовлетворяют (4.8), (4.II)÷(4.I2), (4.22)÷(4.23).

<u>Доказательство</u> теоремы, как и теоремы 9, является также следствием доказательства теоремы 8. При этом следует дополнительно воспользоваться тождествами

$$\prod_{k=i,i+1}^{j-1}\eta_k=\prod_{k=j}^{m-1}\eta_k^{-1}\cdot\prod_{k=i,i+1}^{m-1}\eta_k \quad \text{и} \quad \prod_{k=j+1}^{i,i-1}\mu_k=\prod_{k=2}^{j}\mu_k^{-1}\cdot\prod_{k=2}^{i,i-1}\mu_k \tag{4.30}$$

при $\eta_{j-1}\neq 0$ и $\mu_{j+1}\neq 0$ и учесть, что в соответствии с (4.II) $\eta_{m-1}\neq 0$ и $\mu_2\neq 0$, если $\{\gamma_k\neq 0\}_{k=2}^{m}$. С учетом отличия η_{m-1} и μ_2 от нуля и (4.29) приходим к выводу, что нулевые элементы в последнем столбце B_{im} появляются только при равенстве соответствующего $\Lambda_i=0$, аналогично B_{i1}, если $G_i=0$. Отметим также, что для каждого из сомножителей (4.30) справедливы по-прежнему (4.22) или (4.23). Итак, монотонное убывание (в случае (4.26)) и немонотонное убывание в общем случае (4.27) элементов $C^{-1}=B$ от последнего (первого) столбцов к диагонали $\{B_{ii}\}$ обеспечивает их устойчивое вычисление по (4.28), если известны $\{B_{im}\}_{i=1}^{m}$ и $\{B_{i1}\}_{i=1}^{m}$. При этом, очевидно, ошибка в задании любого элемента строки верхнего треугольника $C^{-1}=B$ не превосходит ошибки соответствующего B_{im} элемента. Аналогичное утверждение справедливо и для нижнего треугольника, т.е. $|\Delta B_{ij}|\overset{i>j}{\le}|\Delta B_{i1}|$. Следовательно, если асимптотика в поведении элементов $C^{-1}=B$ такова, что истинные значения $\{B_{i1}, B_{im}\}\in$ разрядной сетки ЭВМ, то они могут быть вычислены устойчивым образом по (4.29), при этом следует лишь осуществлять контроль за правильным программным перемножением элементов $\{\eta_k\}$ и $\{\mu_k\}$ на основе /2/. Теорема доказана. Мы закончим также вместе с этим и доказательство теоремы 8, учитывая, что любой из случаев, не удовлетворяющих по отдельности теоремам 9 и I0, может быть рассчитан на основе их комбинаций.

Замечание Особенно просто, как видим, вычисляется матрица, обратная к трехдиагональной, если ни один из ее диагональных элементов $\{B_{ii} \neq 0\}_{i=1}^{m}$. Для этого достаточно воспользоваться в случае теоремы 9 формулами (4.II), (4.8), (4.9) и в случае теоремы I0 формулами (4.II), (4.8), (4.29), (4.28). При нулевых $B_{kk}=0$ эффективность алгоритмов повышается из-за нулевых полустрок.

Нам осталось остановиться на вопросе об асимптотике элементов $C^{-1}=B$. Ответ на этот вопрос можно получить, исследовав поведение $\{\eta\}$ и $\{\mu\}$. Справедлива следующая

Лемма I0. Для элементов последовательностей $\{\eta\}$ и $\{\mu\}$ (4.I')÷(4.I2) справедливы равенства

$$\eta_k \overset{2\le k\le m-1}{=\!=\!=} \frac{1}{2\cdot\tilde{p}_{k+1}}\left[(\tilde{q}_k-1)+(\gamma_{k+1}\tilde{q}_{k+1}-\gamma_k\tilde{q}_{k-1})\right], \tag{4.3I}$$

$$\mu_k \overset{2\le k\le m-1}{=\!=\!=} \frac{1}{2\,\tilde{r}_k}\left[(\tilde{q}_k-1)-(\gamma_{k+1}\tilde{q}_{k+1}-\gamma_k\tilde{q}_{k-1})\right],$$

где

$$\tilde{P}_{k+1}=P_{k+1}\cdot B_{kk},\ \tilde{r}_k=r_k\cdot B_{kk},\ \tilde{q}_k=q_k\cdot B_{kk}, \text{ если } B_{kk}\neq 0, \tag{4.32}$$

$$\eta_{k+1}=\frac{q_{k+1}}{P_{k+2}},\ \eta_k=\infty,\ \eta_{k-1}=0,\ \eta_{k-1}\cdot\eta_k\equiv-\frac{r_k}{P_{k+1}}, \text{ если } \Lambda_k\neq 0, G_k=0\to B_{kk}=0,$$

$$\mu_{k-1}=\frac{q_{k-1}}{r_{k-1}},\ \mu_k=\infty,\ \mu_{k+1}=0,\ \mu_k\cdot\mu_{k+1}\equiv-\frac{P_{k+1}}{r_k}, \text{если } G_k\neq 0, \Lambda_k=0\to B_{kk}=0, \tag{4.33}$$

$$\eta_m=0,\ \eta_1=\frac{q_1}{P_2}(1-\tilde{q}_1^{-1});\ \mu_1=0,\ \mu_m=\frac{q_m}{r_m}(1-\tilde{q}_m^{-1});\ \tilde{q}_1^{-1}=G_0,\ \tilde{q}_m^{-1}=\Lambda_{m+1}.$$

Доказательство леммы проведем, опираясь на формулы (4.4),(4.4)' теоремы 7, а также (4.8) теоремы 8. На подробном доказательстве останавливаться не будем.

Следствие I. Если $\{\tilde{q}_k=q_k\cdot B_{kk}\longrightarrow 1\}_{k=1}^{m}$, т.е. матрица C (I.I) стремится к диагональной, то в соответствии с (4.3I)÷(4.33) $\{\eta_k\}_{k=1}^{m}$ и $\{\mu_k\}_{k=1}^{m}$ стремятся к нулю и, следовательно, обратная матрица $C^{-1}=B$ также стремится к диагональной.

Следствие 2. Если C (I.I) – симметрическая матрица, у которой все диагональные элементы равны, т.е. $\{q_i=q\}_{i=1}^{m}$ и $\{r_i=r=P_i\}_{i=2}^{m}$, то для вычисления $C^{-1}=B$ достаточно вычислить лишь векторы $\{G\}$ и $\{\eta\}$, если $\{B_{ii}\neq 0\}_{i=1}^{m}$. Векторы $\{\Lambda\}$ и $\{\mu\}$ при этом совпадают с $\{G\}$ и $\{\eta\}$, поскольку $\{G_0=\Lambda_{m+1}, G_1=\Lambda_m,\dots,G_m=\Lambda_1\}$ и $\{\eta_m=\mu_1,\eta_{m-1}=\mu_2,\dots,\eta_1=\mu_m\}$, т.е. эти последовательности встречноравные.

Кроме того, для последовательностей $\{\eta\}$ и $\{\mu\}$ имеют место равенства в этом случае

$$\eta_k+\mu_k=\tilde{r}_k^{-1}(\tilde{q}_k-1),\ \eta_k-\mu_k=\tilde{r}_k^{-1}(\gamma_{k+1}\cdot\tilde{q}_{k+1}-\gamma_k\cdot\tilde{q}_{k-1}),\quad 2\le k\le m-1, \tag{4.39}$$

которые следуют из более общих равенств

$$\eta_k+\mu_k=2^{-1}\left\{\left[(\tilde{q}_k-1)\left(\frac{1}{\tilde{P}_{k+1}}+\frac{1}{\tilde{r}_k}\right)\right]+\left[(\gamma_{k+1}\tilde{q}_{k+1}-\gamma_k\tilde{q}_{k-1})\left(\frac{1}{\tilde{P}_{k+1}}-\frac{1}{\tilde{r}_k}\right)\right]\right\}, \tag{4.40}$$

$$\eta_k-\mu_k=2^{-1}\left\{\left[(\tilde{q}_k-1)\left(\frac{1}{\tilde{P}_{k+1}}-\frac{1}{\tilde{r}_k}\right)\right]+\left[(\gamma_{k+1}\tilde{q}_{k+1}-\gamma_k\tilde{q}_{k-1})\left(\frac{1}{\tilde{P}_{k+1}}+\frac{1}{\tilde{r}_k}\right)\right]\right\},\ 2\le k\le m-1.$$

Следствие 3. Характер поведения функций $\{\eta_k\}$ и $\{\mu_k\}$, а следовательно, и элементов $C^{-1}=B$ определяется, как следует из (4.3I), поведением функции $\{B_{ii}\}$. При этом, если C (I.I) – матрица с диагональным преобладанием, то $\{|\mu_k|\le 1$ и $|\eta_k|\le 1\}$.

5. Заключение

В настоящей статье на основе нетрадиционного подхода, развитого в /I/, получены компактные схемы обращения трехдиагональных операторов, одинаково эффективные как в теоретических, так и в численных исследованиях на ЭВМ. При этом полученные представления обратных операторов позволили:

I. Сформулировать простые конструктивные критерии обратимости C (I.I). Такими критериями являются $\alpha_{m+1}\neq 0\neq\beta_0$ для представления (4.I) и $G_0\neq 0\neq\Lambda_{m+1}$ для представлений теорем 8 и I0.

2. Сформулировать достаточные, а также необходимые и достаточные условия компактного устойчивого вычисления $C^{-1}=B$ на ЭВМ (теоремы 7,9,I0). При этом, если $\{|\gamma_k|\approx 1\}$, то для вычисления $C^{-1}=B$ предпочтительней процедура (4.I) перед более универсальными процедурами (4.8)÷(4.I2) и (4.28)÷(4.29).

3. Одинаково эффективно, в рамках общих универсальных процедур, находить $C^{-1}=B$ для случаев, когда ни один из главных миноров C (I.I) не обращается в нуль и когда некоторые из них сингулярны.

В следующей работе этой серии мы приведем универсальные эффективные методы решения систем уравнений с матрицей трехдиагонального вида.

Автор искренне признателен члену- корреспонденту АН СССР, профессору Н.Н.Говоруну, а также профессору Е.П.Жидкову и профессору И.Н.Силину за творческий интерес к исследуемой проблеме и полезные замечания.

Литература

I. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, PII-85-304, Дубна, I985

2. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. - М., Наука I977.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 июня 1985 года.

Емельяненко Г.А. Р11-85-488

О свойствах систем линейных уравнений с неособенными трехдиагональными, ленточными и квазитрехдиагональными матрицами. Компактные устойчивые схемы обращения трехдиагональных матриц

В настоящей статье, второй из серии работ [1], продолжаются исследования свойств матриц, обратных к неособенным трехдиагональным, на основе подхода, развитого в [1]. Доказывается ряд новых теорем о структурных особенностях обратных матриц. Получены достаточные, а также необходимые и достаточные условия устойчивого вычисления обратных матриц на ЭВМ.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод автора

Emelyanenko G.A. P11-85-488

On the Properties of Systems of Linear Equations with Non-Singular Tridiagonal, Band and Quasitridiagonal Matrices. The compact stability Methods of Inverse Metrices to Tridiagonal Ones

In the present article, the second from the series of the articles [1], the investigations of the properties of inverse matrices to non-singular tridiagonal ones are being continued on the basis of the approach, developed in [1]. A series of some new theorems about the structural properties of inverse matrices is proved. Sufficient, and also necessary and sufficient conditions of stable calculation of inverse matrices on the computer are received.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985