85-371

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-85-371

А.В.Егоров, Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский

АЛЬТЕРНИРУЮЩИЕ ПРОЦЕССЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАГНИТОСТАТИКИ В СЛУЧАЕ ТРЕХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1985

ВВЕДЕНИЕ

При численном решении краевых задач для системы уравнений Максвелла во всем пространстве R^3 в случае физической системы вакуум-среда с однородными магнитными свойствами важной проблемой является точный учет краевых условий на бесконечности. В настоящей работе для решения этой проблемы построены альтернирующие итерационные процессы по подобластям без налегания в рамках постановки метода скалярного потенциала, основанные на соответствующих алгоритмах для оператора Лапласа /1,4/.

Магнитная среда погружается внутрь некоторой вспомогательной области Ω с границей Γ, являющейся кубом, квадратным параллелепипедом, цилиндром или шаром. Тогда скалярный потенциал во внешней области по отношению к Ω удовлетворяет уравнению Лапласа, которое заменяется граничным интегральным уравнением /ГИУ/ только на поверхности Γ. Построенное таким образом ГИУ является специальным краевым условием интегрального типа для дифференциального уравнения в области Ω /комбинированная постановка/, а предлагаемые итерационные процессы предназначены для эффективного решения возникающей краевой задачи. При этом на каждом шаге итераций решается задача Дирихле внутри области Ω /здесь наиболее эффективными являются сеточные методы/ и ГИУ на поверхности Γ, соответствующее задаче Неймана во внешней области.Последняя проблема решается экономичным итерационным методом /в случае параллелепипеда/, разработанным в /1/, для которого затраты памяти ЭВМ такого же порядка, как при решении внутренней задачи в дифференциальной постановке методом сеток. Например, в случае кубической области Ω для решения всей проблемы указанным комбинированным методом с точностью $O(N^{-2})$ необходим массив порядка $Q = \frac{27}{8} \cdot N^3 + O(N^2)$,где N - размерность сеточной области по одной переменной внутри куба.

Отметим, что при дискретизации ГИУ на поверхности цилиндра возникают одноуровневые блочно-циркулянтные матрицы, имеющие дополнительную специфику внутри блоков первого уровня. Это дает новые возможности для оптимизации алгоритмов решения ГИУ. Шаровую поверхность можно рассматривать как частный случай поверхности вращения. В случае шаровой границы в /4/ получены также точные решения ГИУ для уравнения Лапласа с краевыми условиями первого, второго и третьего рода. Таким образом, использование границы специального вида /исходя из геометрии области магнитной среды/ в построенных альтернирующих процессах позволяет эффективно решать широкий круг задач магнитостатики в случаях трех пространственных переменных.

Исследование сходимости процессов проведено на основе рассмотрения ГИУ, записанных на границах областей альтернирования и условий непрерывности определенных компонент векторов магнитного поля. Показана применимость процессов для всего диапазона изменения магнитной проницаемости среды μ. Наибольшая эффективность итерационных процессов достигается в случаях $\mu \gg 1$ и $\mu \ll 1$.

§1. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАГНИТОСТАТИКИ В РАМКАХ МЕТОДА СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Рассмотрим систему уравнений Максвелла для физической системы вакуум-среда с магнитной проницаемостью μ /рис.1/ в форме:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0 \\ &\operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ &\vec{B} = \mu \vec{H} \\ &(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n}_1 = 0, \quad (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \vec{n}_1 = 0 \\ &\lim_{R \to \infty} H = 0 \end{aligned} \qquad /1.1/$$

Рис. 1

Здесь $\vec{R}$ - радиус-вектор текущей точки M с декартовыми координатами x, y, z; $R = |\vec{R}|$ - длина $\vec{R}$; $\vec{R}'$ - радиус-вектор точки источника; Ω_1 - односвязная область магнитной среды, ограниченная поверхностью Ляпунова Γ_1; Ω_2 - область вакуума, содержащая бесконечно удаленную точку; $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma_1 = R^3$, $\vec{n}_1$ - внутренняя нормаль к области Ω_1 в точках Γ_1; $\vec{H}$ - вектор напряженности магнитного поля; $\vec{B}$ - вектор индукции; $\vec{j}_0$ - вектор объемной плотности токов. Токи размещены в области Ω_2; v' - область локализации токов $\vec{j}_0$; $dv' = dx'dy'dz'$ — элемент объема v'; $\vec{H}_i$, $\vec{B}_i$, $i = 1,2$ - предельные значения векторов напряженности магнитного поля и магнитной индукции при переходе на границу Γ_1 соответственно из области Ω_1 и области Ω_2; c - скорость света в вакууме.

Задача состоит в нахождении $\vec{H}(x, y, z)$ и $\vec{B}(x, y, z)$ в некоторой подобласти R^3. Используем метод скалярного потенциала, основанный на представлении поля в виде суммы поля источников в вакууме $\vec{H}^{(0)}$ и поля намагниченной среды $\vec{H}^{(m)}$: $\vec{H} = \vec{H}^{(0)} + \vec{H}^{(m)}$ /3/.

Вектор $\vec{H}^{(0)}$ удовлетворяет в R^3 системе уравнений

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \vec{H}^{(0)} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0 \\ &\operatorname{div} \vec{H}^{(0)} = 0. \end{aligned} \qquad /1.2/$$

Для $\vec{H}^{(m)}$ имеем краевую задачу:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \vec{H}^{(m)} = 0 \\ &\operatorname{div}(\mu \vec{H}^{(m)}) = -\operatorname{div}(\mu \vec{H}^{(0)}) \\ &(\vec{H}_2^{(m)} - \vec{H}_1^{(m)}) \times \vec{n}_1 = 0 \\ &(\mu_{\Gamma_1} \vec{H}_1^{(m)} - \vec{H}_2^{(m)}) \cdot \vec{n}_1 = (\vec{H}^{(0)}, \vec{n}_1)(1 - \mu_{\Gamma_1}), \quad \mu_{\Gamma_1} = \mu|_{\Gamma_1} \\ &\lim_{\xi \to \infty} H^{(m)}(\xi) = 0. \end{aligned} \qquad /1.3/$$

Решение /1.2/ вычисляется по закону Био и Савара [3]:

$$\vec{H}^{(0)}(R) = \frac{1}{c} \int_{v'} \frac{\vec{j}_0 \times (\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3} \, dv'.$$

Задача /1.3/ после замены $\vec{H}^{(m)}(M) = \begin{cases} -\operatorname{grad} \phi_1^{(m)}, & M \in \Omega_1 \\ -\operatorname{grad} \phi_2^{(m)}, & M \in \Omega_2 \end{cases}$ переходит в следующую:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \phi_1^{(m)}) = -(\vec{H}^{(0)}, \operatorname{grad} \mu), \quad M \in \Omega_1 \\ &\Delta \phi_2^{(m)} = 0, \quad M \in \Omega_2 \\ &u_1 = u_2, \quad v_2 = \mu_{\Gamma_1} v_1 + (\vec{H}^{(0)}, \vec{n}_1)(1 - \mu_{\Gamma_1}), \end{aligned} \qquad /1.4/$$

где

$$u_i = \phi_i(M)|_{M \in \Gamma_1}, \quad i = 1, 2$$

$$v_i = \frac{\partial \phi_i(P)}{\partial \vec{n}_1}\Big|_{P \to M}, \quad M \in \Gamma_1, \quad P \in \Omega_i, \quad i = 1, 2$$

$$\mu_{\Gamma_1} = \mu(P)|_{P \to M}, \quad M \in \Gamma_1, \quad P \in \Omega_1.$$

Здесь ограничимся случаем $\mu = \text{const}$, т.е. среда в области Ω_1 обладает однородными магнитными свойствами. Тогда система /1.4/ принимает вид

$$\Delta\phi_1^{(m)} = 0, \quad M \in \Omega_1$$

$$\Delta\phi_2^{(m)} = 0, \quad M \in \Omega_2 \qquad /1.5/$$

$$u_1 = u_2, \quad \mu v_1 = v_2 + f,$$

где $f(M) = ((\mu - 1)\vec{H}^{(0)}, n_1)$, $M \in \Gamma_1$.

Задача /1.5/ состоит в нахождении, с учетом условий на границе Γ_1, гармонических функций $\phi_1^{(m)}$ и $\phi_2^{(m)}$. Соответствующая этой задаче постановка в рамках метода граничных интегральных уравнений имеет вид /1.6/:

$$Ku - u = Lv$$

$$Ku + u = \mu Lv + F, \qquad /1.6/$$

где

$$u = \phi_1^{(m)}(M)\big|_{M\in\Gamma_1} = \phi_2^{(m)}(M)\big|_{M\in\Gamma_1};$$

$$v = \frac{\partial\phi_1^{(m)}(P)}{\partial\vec{n}_1}\Big|_{P\to M}; \quad P \in \Omega_1; \quad M \in \Gamma_1; \quad F = -Lf;$$

$$K\cdot = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1} \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_1)}{r_{MP}^2}\cdot d\sigma_P; \quad M, P \in \Gamma_1;$$

$$L\cdot = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1} \frac{1}{r_{MP}}\cdot d\sigma_P; \; M, P \in \Gamma_1; \; \vec{r}_{PM} = \vec{R}_M - \vec{R}_P.$$

Неизвестными в задаче /1.6/ являются функции u и v. На основе постановки /1.6/ в работе [2] построен альтернирующий процесс по подобластям Ω_1 и Ω_2, быстро сходящийся при $\mu \ll 1$.

Замечание. Хотя решение системы /1.6/ может быть найдено непосредственно по формулам $u = [(1+\mu)E + (1-\mu)K]^{-1}F$, $v = L^{-1}(Ku - u)$, однако их численная реализация требует значительных затрат, если область Ω_1 не является областью некоторого специального вида.

В настоящей работе построены альтернирующие процессы по трем областям без налегания /см. рис.2/, позволяющие эффективно решать систему /1.4/. Они имеют наибольшую скорость сходимости в случаях $\mu \gg 1$ и $\mu \ll 1$.

Обозначения: Ω_1 - односвязная область с однородными магнитными свойствами и границей Γ_1; Ω_2 - область вакуума, ограниченная

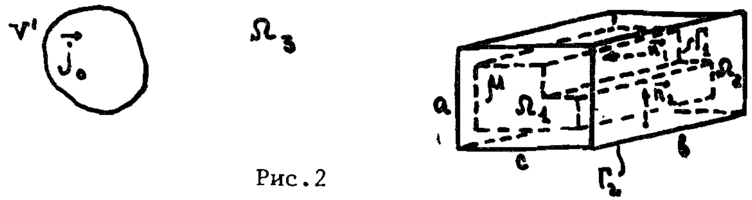

Рис.2

Γ_1 и некоторой стандартной поверхностью Ляпунова Γ_2 /на рис.2 - поверхность Ляпунова, геометрически близкая к поверхности параллелепипеда/, Ω_3 - внешняя область вакуума с бесконечно удаленной точкой и границей Γ_2; $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1,2,3$.

С учетом выделения трех областей, в которых предполагается решать задачу магнитостатики для физической системы вакуум-среда с $\mu = \text{const}$, получаем, согласно подходу скалярного потенциала, задачу:

$$\Delta\psi(M) = 0, \quad M \in \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \qquad /1.7а/$$

$$(K_2 + E)u_2 = L_2 v_2, \; M \in \Gamma_2 \qquad /1.7б/$$

$$u_2 = \phi_3^{(m)}\big|_{M\in\Gamma_2} = \phi_2^{(m)}\big|_{M\in\Gamma_2}$$

$$\phi_2^{(m)}\big|_{M\in\Gamma_1} = \phi_1^{(m)}\big|_{M\in\Gamma_1}; \qquad /1.7/$$

$$v_2 = \frac{\partial\phi_3^{(m)}}{\partial\vec{n}_2}\Big|_{M\in\Gamma_2} = \frac{\partial\phi_2^{(m)}}{\partial\vec{n}_2}\Big|_{M\in\Gamma_2};$$

$$\mu\frac{\partial\phi_1^{(m)}}{\partial n_1}\Big|_{M\in\Gamma_1} = \frac{\partial\phi_2^{(m)}}{\partial n_1}\Big|_{M\in\Gamma_1} + f.$$

Здесь

$$\vec{H}^{(m)} = \begin{cases} \psi = \begin{cases} -\operatorname{grad}\phi_1^{(m)}, & M \in \Omega_1 \\ -\operatorname{grad}\phi_2^{(m)}, & M \in \Omega_2 \end{cases} \\ -\operatorname{grad}\phi_3^{(m)}, \quad M \in \Omega_3 \end{cases}$$

$\vec{n}_2$ - внутренняя нормаль к области Ω_2 в точках $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$; $\vec{n}_1$ - внутренняя нормаль к области Ω_1 в точках Γ_1;

$$f = ((\mu - 1)\vec{H}^{(0)}, \vec{n}_1); \qquad K_2\cdot = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2}\frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_2(P))}{r_{MP}^2}\cdot d\sigma_P;$$

$$L_2\cdot = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2}\frac{1}{r_{MP}}\cdot d\sigma_P; \quad M, P \in \Gamma_2;$$

$\vec{r}_{MP}$ - радиус-вектор из M в P, $d\sigma_P$ - элемент площади Γ_2.

Соотношение /1.7б/ отражает тот факт, что при численном нахождении гармонического решения в области Ω_3 естественно использовать постановку метода граничных интегральных уравнений. Этот подход решает проблему учета условий на бесконечности для внешних краевых задач. Использование некоторого вида стандартных поверхностей Γ_2 /шаровой, параллелепипеда, цилиндра и др./ позволяет провести оптимизацию вычислительных ресурсов с учетом свойств интегральных операторов K_2 и L_2 и их дискретных аналогов. Соотношение /1.7б/ можно также интерпретировать как специальное краевое условие интегрального типа для дифференциального уравнения /1.7а/ в области Ω. Предлагаемые итерационные методы предназначены для эффективного решения возникающей краевой задачи.

§2. АЛЬТЕРНИРУЮЩИЕ ПРОЦЕССЫ ПО ОБЛАСТЯМ Ω_1, Ω_2 И Ω_3

Проведем построение и исследование альтернирующих процессов решения задачи /1.7/. При этом используем соответствующую /1.7/ постановку /2.1/ в рамках метода граничных интегральных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&(K_2+E)u_2 = L_2 v_2\\
&(K_1+E)u_1 - K_{12}u_2 = \mu L_1 v_1 - \phi - L_{12}v_2\\
&(K_1-E)u_1 = L_1 v_1\\
&K_2 u_2 + K_{21}u_1 - u_2 = L_2 v_2 - \mu L_{21} v_1 + \psi
\end{aligned}
\qquad /2.1/
$$

Обозначения:

$$K_1\cdot = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{\cos(\vec{r}_{PM},\vec{n}_1(P))}{r^2_{MP}}\cdot d\sigma_P;\quad L_1\cdot = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{1}{r_{MP}}\cdot d\sigma_P;\ M,\ P\in\Gamma_1;$$

$$K_{12}\cdot = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2}\frac{\cos(\vec{r}_{PM},\vec{n}_2(P))}{r^2_{PM}}\cdot d\sigma_P;\quad L_{12}\cdot = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2}\frac{1}{r_{PM}}\cdot d\sigma_P;\ P\in\Gamma_2,\ M\in\Gamma_1;$$

$$K_{21}\cdot = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{\cos(\vec{r}_{PM},\vec{n}_1(P))}{r^2_{PM}}\cdot d\sigma_P;\quad L_{21}\cdot = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{1}{r_{MP}}\cdot d\sigma_P;\ M\in\Gamma_2,\ P\in\Gamma_1.$$

$$v_1 = \frac{\partial\phi_1^{(m)}}{\partial\vec{n}_1}\Big|_{M\in\Gamma_1};\quad v_2 = \frac{\partial\phi_3^{(m)}}{\partial\vec{n}_2}\Big|_{M\in\Gamma_2};\quad u_1 = \phi_1^{(m)}\Big|_{M\in\Gamma_1};\quad u_2 = \phi_3^{(m)}\Big|_{M\in\Gamma_2}$$

$\phi = L_1 f$; $\psi = L_{21} f$.

Выпишем операторные свойства, которые используем в дальнейшем.

1. Операторы K_i /i = 1,2/ являются фредгольмовыми и отображают $L_2(\Gamma_i)\to C(\Gamma_i)$.
2. $\lambda = -1$ - не является собственным значением операторов K_i/i = 1,2/.
3. $\lambda = 1$ является однократным собственным значением K_i /i = 1,2/, максимальным по модулю, соответствующая собственная функция равна const.
4. $\mathrm{Jm}\,\sigma(K_i) = 0$, где $\sigma(K_i)$ - спектр операторов K_i, i = 1,2.
5. L_i - симметрический оператор в $L_2(\Gamma_i)$, ограниченный в $C(\Gamma_i)$ /i = 1,2/.
6. L_i - компактный оператор из L^∞ в Lip_β; β- показатель Ляпунова соответствующей поверхности /i = 1,2/.
7. $L_i > 0$ в $L_2(\Gamma_i)$, /i = 1,2/.
8. $K_i(K_i + (-1)^i E)^{-1}$ - компактен из $L_2(\Gamma_i)$ в $C(\Gamma_i)$, i = 1, 2.
9. В случае, когда Γ_1 и Γ_2 - шаровые поверхности с радиусами R_1 и R_2, имеем:

$$K_i = \frac{1}{2R_i}L_i,\quad \lambda_n(K_i) = \frac{1}{2(n+0.5)},\quad n = 0,1,2,\ldots,\quad i = 1,2,$$

$\lambda_n(K_i) - n^e$ - собственное значение кратности $(2n+1)$ оператора K_i.

Для задачи /2.1/ рассмотрим следующие альтернирующие итерационные процессы.

Процесс I.

Заданы приближения v_2^J, u_1^J. Очередные значения u_2^{J+1}, v_1^{J+1}, u_1^{J+1} и v_2^{J+1} последовательно находятся из уравнений:

$$(K_2+E)u_2^{J+1} = L_2 v_2^J,\quad (K_1+E)u_1^J - K_{12}u_2^{J+1} = \mu L_1 v_1^{J+1} - \phi - L_{12}v_2^J$$

$$(K_1-E)u_1^{J+1} = L_1 v_1^{J+1}$$

$$K_2 u_2^{J+1} + K_{21}u_1^{J+1} - u_2^{J+1} = L_2 v_2^{J+1} - \mu L_{21} v_1^{J+1} + \psi$$

Итерационный цикл данного процесса включает в себя решение задач Неймана в областях Ω_3 и Ω_1, двух задач Дирихле в области Ω_2.

Процесс II.

Заданы приближения v_2^J, u_1^J. Очередные значения u_2^{J+1}, v_1^{J+1}, u_1^{J+1}, v_2^{J+1} последовательно находятся из уравнений:

$$(K_2+E)u_2^{J+1} = L_2 v_2^J,\quad (K_1-E)u_1^J = L_1 v_1^{J+1}$$

$$(K_1 + E)u_1^{J+1} - K_{12}u_2^{J+1} = \mu L_1 v_1^{J+1} - \phi - L_{12} v_2^{J}$$

$$K_2 u_2^{J+1} + K_{21} u_1^{J+1} - u_2^{J+1} = L_2 v_2^{J+1} - \mu L_{21} v_1^{J+1} + \psi.$$

Цикл данного процесса включает в себя решение задачи Неймана в области Ω_3, задачи Дирихле в Ω_1 и двух смешанных задач в области Ω_2.

Пусть Γ_1 и Γ_2 - концентрические поверхности шаров радиусов R_1 и R_2 $(R_2 > R_1)$. В этом случае сходимость процессов I и II вытекает из сходимости последовательности $(a_\ell^m)^J$ - каждого из коэффициентов разложения /т.е. для $\forall\, m, \ell$ - фиксированных/ функций u_1^J и $L_2 v_2^J$ по системе фундаментальных сферических функций $\{Y_\ell^m\}$. Исследование сходимости основывается на приводимых ниже тождествах, полученных при анализе свойств интегральных операторов.

$$K_{12}\omega \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k+0.5}\right)\cdot\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k Y_k(\theta, \phi \setminus \omega)$$

$$L_{12}\omega \equiv R_2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k \cdot \frac{1}{(k+0.5)} \cdot Y_k(\theta, \phi \setminus \omega)$$

$$K_{21}\omega \equiv \frac{R_1^2}{R_2^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)}{(k+0.5)} \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k \cdot Y_k(\theta, \phi \setminus \omega)$$

$$L_{21}\omega \equiv \frac{R_1^2}{R_2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+0.5)} \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k \cdot Y_k(\theta, \phi \setminus \omega) \qquad /2.2/$$

$$K_0\omega \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} Y_k(\theta, \phi \setminus \omega)$$

$$L(R_i)\omega \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_i}{k+0.5} Y_k(\theta, \phi \setminus \omega), \quad i = 1, 2.$$

Обозначения:

$$\omega \equiv \sum_{\ell=1}^{\infty} Y_\ell(\theta, \phi \setminus \omega) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_\ell^m(\omega) Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

ω функция, обозначающая либо u_i, либо v_i /i = 1,2/; θ, ϕ - угловые компоненты в сферической системе координат; $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ - фундаментальная сферическая функция ℓ-го порядка,

$$Y_\ell(\theta, \phi \setminus \omega) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_\ell^m(\omega) Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

- сферическая функция ℓ-го порядка; K_0 обозначает один из операторов K_i; $L(R_i) \equiv L_i$; i = 1,2. Символ ω в выражениях $Y_\ell(\theta, \phi \setminus \omega)$ и $a_\ell^m(\omega)$ означает функцию, раскладываемую по системе сферических.

Отсутствие в разложении для ω члена с $\ell = 0$ /т.е. постоянной функции/ связано с отмеченными[4] свойствами разрешимости граничных интегральных уравнений для оператора Лапласа, заданных на поверхности шара. На основе /2.2/ легко видеть, что для обеспечения выполнения этих свойств от цикла к циклу в процессах I и II достаточно потребовать: $(f, 1) = (u_1^0, 1) = (v_2^0, 1) = 0$. Используя тождества /2.2/ в системах уравнений для альтернирующих процессов I и II и учитывая свойства полноты и ортогональности фундаментальных сферических функций, получаем сходимость процессов I и II /покажем, как сходятся $a_\ell^m(u_1^J)$ и $a_\ell^m(L_2 v_2^J)$/.

Процесс I /сходимость при $\mu > 2$ /

$$a_\ell^m(u_1^{J+1}) = -\left(\frac{\ell+1}{\ell}\right)\frac{1}{\mu}\, a_\ell^m(u_1^J) - \frac{\ell+0.5}{\ell}\, a_\ell^m(\phi),$$

$$a_\ell^m(L_2 v_2^{J+1}) = -\frac{\ell}{\ell+1}\, a_\ell^m(L_2 v_2^J) + f(u_1^J, u_1^{J+1}, \phi, \psi),$$

где

$$f(u_1^J, u_1^{J+1}, \phi, \psi) = \frac{R_1^2}{R_2^2}\cdot\frac{(\ell+1)}{(\ell+0.5)}\cdot\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^\ell a_\ell^m(u_1^{J+1}) +$$

$$+ \frac{R_1}{R_2}\cdot\left(\frac{1}{\ell+0.5}\right)\cdot\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^\ell \cdot \{a_\ell^m(\phi)\cdot(\ell+0.5) + (\ell+1)\cdot a_\ell^m(u_1^J)\} - a_\ell^m(\psi).$$

В частности, процесс эффективен в случае Ω_1 - область железа $(\mu \gg 1)$.

Процесс II /сходимость при $\mu < 1$/

$$a_\ell^m(u_1^{J+1}) = -\frac{\ell}{\ell+1}\,\mu\, a_\ell^m(u_1^J) - \mu\,\frac{\ell+0.5}{\ell+1}\, a_\ell^m(\phi)$$

$$a_\ell^m(L_2 v_2^{J+1}) = -\frac{\ell}{\ell+1}\, a_\ell^m(L_2 v_2^J) + \bar{f}(u_1^{J+1}, u_1^J, \psi),$$

где

$$\bar{f} = \frac{R_1^2}{R_2^2}\cdot\frac{(\ell+1)}{(\ell+0.5)}\cdot\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^\ell \cdot a_\ell^m(u_1^{J+1}) - \mu\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\ell+1}\cdot\frac{\ell}{\ell+0.5}\cdot a_\ell^m(u_1^J) - a_\ell^m(\psi).$$

Этот процесс эффективен при $\mu \ll 1$.

<u>Примечание 1</u>

При рассмотрении модельной задачи становится понятно соответствие рассматриваемым физическим системам итерационных процессов I и II. Интересен характер сходимости процессов: последовательность $\{a_\ell^m(u_1^J)\}$ сходится со скоростью геометрической прогрессии /коэффициенты сжатия $q_1 = \frac{\ell+1}{\ell}\cdot\frac{1}{\mu}$ и $q_2 = \frac{\ell}{\ell+1}\mu$ соответственно для процессов I и II/, $\{a_\ell^m(L_2 v_2^J)\}$ сходится со скоростью геометрической прогрессии ($q = \ell(\ell+1)^{-1}$) после того, как сойдется последовательность $\{a_\ell^m(u_1^J)\}$.

Рассмотрим общий случай: Γ_1 и Γ_2 - произвольные поверхности Ляпунова. Вместо алгоритмов I и II используем двухпараметрическое семейство процессов, содержащих релаксационные параметры ω и τ, что расширит диапазон физических систем вакуум-среда с однородными магнитными свойствами, в котором возможно применение этих процессов. Алгоритмы I и II соответственно принимают вид I′ и II′.

I′.
$$(K_2+E)\,u_2^{J+1} = L_2 v_2^J$$

$$(K_1+E)\,u_1^J - K_{12}u_2^{J+1} = \mu L_1 v_1^{J+1} - \phi - L_{12} v_2^J$$

$$(K_1-E)\,u_1^{J+1/2} = L_1 v_1^{J+1}$$

$$u_1^{J+1} = \omega u_1^J + (1-\omega)\,u_1^{J+1/2}, \quad 0 \le \omega \le 1$$

$$K_2 u_2^{J+1} + K_{21} u_1^{J+1} - u_2^{J+1} = L_2 v_2^{J+1/2} - \mu L_{21} v_1^{J+1} + \psi$$

$$L_2 v_2^{J+1} = \tau L_2 v_2^J + (1-\tau) L_2 v_2^{J+1/2}, \quad 0 \le \tau \le 1.$$

II′.
$$(K_2+E)\,u_2^{J+1} = L_2 v_2^J$$

$$(K_1-E)\,u_1^J = L_1 v_1^{J+1}$$

$$(K_1+E)\,u_1^{J+1/2} - K_{12}u_2^{J+1} = \mu L_1 v_1^{J+1} - \phi - L_{12} v_2^J$$

$$u_1^{J+1} = \omega u_1^J + (1-\omega)\,u_1^{J+1/2}, \quad 0 \le \omega \le 1$$

$$K_2 u_2^{J+1} + K_{21} u_1^{J+1} - u_2^{J+1} = L_2 v_2^{J+1/2} - \mu L_{21} v_1^{J+1} + \psi$$

$$L_2 v_2^{J+1} = \tau L_2 v_2^J + (1-\tau) L_2 v_2^{J+1/2}, \quad 0 \le \tau \le 1$$

Используя соотношение $K_{12} u_2^{J+1} = L_{12} v_2^J$/из постановки задачи по нахождению гармонической функции в области Ω_3 / и уравнения в I′ и II′, получаем следующие условия, при которых альтернирующие процессы сходятся.

Процесс I′.
Условие /A/.

$$\|T_1\| < 1, \quad \|T_2\| < 1, \qquad /A/$$

где

$$\|T_i\| = \sup_{\phi \in D(T_i)} \frac{(T_i\phi,\, T_i\phi)}{(\phi,\, \phi)}, \quad T_1 = \omega E + (1-\omega)\frac{(K_1-E)^{-1}(K_1+E)}{\mu},$$

$$T_2 = \tau E + (1-\tau)(K_2-E)(K_2+E)^{-1},$$

$D(T_i)$ - область определения оператора T_i, i = 1,2,

$$(w_1, w_2) = \int_{\Gamma_1} w_1(P)\,w_2(P)\,d\sigma_P,$$

если w_j /j = 1,2/ заданы на Γ_1 и

$$(w_1, w_2) = \int_{\Gamma_2} w_1(P)\,w_2(P)\,d\sigma_P, \quad \text{если } w_j \ (j = 1, 2)$$

заданы на Γ_2.

Предполагается, что процесс I′ определен на подпространстве $X \equiv \{u_1 \in L_2(\Gamma_1) : (u_1, 1) = 0\}$. При этом условии существует оператор $(K_1-E)^{-1}$/см. свойство 3/.

Частные случаи выполнения /A/.

а/ $K_1 < 0$ ($K_1 \le 0$) на X, $K_2 > 0$ в $L_2(\Gamma_2)$.

В этом случае условие /A/ выполнено по лемме Келлога[5] при $\mu \ge 1$ ($\mu > 1$) для $\forall \omega : 0 \le \omega < 1$ и $\forall \tau : 0 \le \tau < 1$.

б/ $\mu > \|(K_1-E)^{-1}(K_1+E)\|$, $K_2 > 0$ в $L_2(\Gamma_2)$ для $\forall \omega : 0 \le \omega < 1$ и $\forall \tau : 0 \le \tau < 1$.

Процесс II′.
Условие /B/.

$$\|T_2\| < 1, \quad \|T_3\| < 1, \quad \text{где} \qquad /B/$$

$$T_3 = \omega E + (1-\omega)\cdot\mu\,(K_1+E)^{-1}(K_1-E).$$

Частные случаи выполнения /B/.

а/ $K_1 > 0$ в $L_2(\Gamma_1)$ ($K_1 \ge 0$ в $L_2(\Gamma_1)$), $K_2 > 0$ в $L_2(\Gamma_2)$, $\mu \le 1$ для $\forall \omega : 0 \le \omega < 1$ и $\forall \tau : 0 \le \tau < 1$.

Условия а/ имеют место, в частности, когда Γ_1 и Γ_2 - шаровые поверхности.

б/ $K_2 > 0$ в $L_2(\Gamma_2)$,

$$\mu < \frac{1}{\|(K_1+E)^{-1}(K_1-E)\|}, \quad \forall \tau : 0 \le \tau < 1, \quad \forall \omega : 0 \le \omega < 1.$$

Скорость сходимости процессов I´ и II´ тем выше, чем ближе к нулю $\|T_i\|$ $i = 1,2,3$. Отсюда становится понятно, что процесс I´ эффективен в случае $\mu \gg 1$, а II´ – в случае $\mu \ll 1$.

Рассмотрим теперь задачу оптимального выбора параметров релаксации ω и τ в процессах I´ и II´. Оптимизацию I´ и II´ по ω и τ проведем аналогично работе /2/ с учетом операторных свойств 4 и 8. Приведем окончательные результаты.

Процесс I´.

Параметр ω выбирается из условия

$$\min_{\omega} \rho(T_1) = \min_{\omega} \max\{|F(\Lambda_m, \omega)|, \ |F(\Lambda_M, \omega)|\} \to \min, \qquad /C/$$

где

$$F(\Lambda, \omega) = \omega + \frac{(1-\omega)}{\mu}(-1 + 2\Lambda),$$

$$\Lambda(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \ \lambda \in \sigma(K_1), \quad \Lambda_m = \min \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad \Lambda_M = \max_{\lambda \in \sigma(K_1)} \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Через $\rho(T_i)$ обозначаем спектральный радиус оператора T_i. Условие /C/ выполняется при

$$\omega = \omega^* = \frac{1 - \Lambda_m - \Lambda_M}{\mu + [1 - \Lambda_m - \Lambda_M]}.$$

При этом $\rho^* = \rho(T_1) = \frac{M + 2\Lambda_M - 1}{\mu + M}$, где $M = 1 - \Lambda_m - \Lambda_M$. Параметр τ выбирается из условия

$$\min \rho(T_2) = \min_{\tau} \max\{|G(Y_m, \tau)|, \ |G(Y_M, \tau)|\} \to \min, \qquad /D/$$

где

$$G(Y, \tau) = 2(1 - \tau)Y + 2 \cdot \omega - 1; \quad Y = \frac{\lambda}{1 + \lambda}; \quad \lambda \in \sigma(K_2);$$

$$Y_m = \min_{\lambda \in \sigma(K_2)} \frac{\lambda}{1 + \lambda}; \quad Y_M = \max_{\lambda \in \sigma(K_2)} \frac{\lambda}{1 + \lambda}.$$

Условие /D/ выполняется при

$$\tau = \tau^* = \frac{1 - Y_M - Y_m}{2 - Y_M - Y_m},$$

при этом

$$\rho(T_2) = \rho^{**} = \frac{Y_M - Y_m}{2 - Y_M - Y_m}.$$

Рассмотрим случай, когда Γ_1 и Γ_2 – шаровые поверхности с радиусами R_1 и R_2 $(R_2 > R_1)$. Используя свойство 9, получаем значения итерационных параметров:

$$\Lambda_M = 0, \ \Lambda_m = -\frac{1}{2}, \quad Y_m = 0, \quad Y_M = 0.5,$$

$$\omega^* = \frac{2}{3\mu + 2}, \quad \rho^* = \frac{1}{2\mu + 3}, \quad \rho^{**} = \tau^{**} = \frac{1}{3}.$$

Отсюда видно, что процесс вида I´ сходится и в случае систем вакуум-среда с $\mu = \text{const} \geq 0$ /т.е. релаксация расширяет диапазон физических систем, для которых возможно применение процесса типа I´/. Сходимость процесса I´ при $\mu = \text{const} \geq 0$ имеет место и в случае, когда Γ_1 и Γ_2 – произвольные поверхности Ляпунова, т.к. $\Lambda_M < 1/2$ при $\lambda \in (-1, 1)$ и тогда

$$\rho^* = \frac{\Lambda_M - \Lambda_m}{(\mu + 1 - 2\Lambda_M) + (\Lambda_M - \Lambda_m)} < 1, \quad Y_M \leq \frac{1}{2}$$

при

$$\lambda \in (-1, 1] \qquad \rho^{**} = \frac{Y_M - Y_m}{2(1 - Y_M) + Y_M - Y_m} < 1.$$

Процесс II´.

Параметр ω выбирается из условия

$$\min_{\omega} \rho(T_3) = \min_{\omega} \max\{|F(\Lambda_m, \omega)|, \ |F(\Lambda_M, \omega)|\} \to \min, \qquad /E/$$

где

$$F(\Lambda, \omega) = 2\mu(1 - \omega)\Lambda + \omega(1 + \mu) - \mu; \quad \Lambda_M = \max_{\lambda \in \sigma(K_1)} \frac{\lambda}{1 + \lambda}; \ \Lambda_m = \min_{\lambda \in \sigma(K_1)} \frac{\lambda}{1 + \lambda}.$$

Условие /E/ выполняется при

$$\omega = \omega^* = -\frac{\mu(\Lambda_M + \Lambda_m - 1)}{1 - \mu(\Lambda_M + \Lambda_m - 1)},$$

при этом

$$\rho(T_3) = \rho^* = \left| \frac{\mu(\Lambda_M - \Lambda_m)}{1 - \mu(\Lambda_M + \Lambda_m - 1)} \right|.$$

Параметры τ^* и ρ^{**} выбираются так же, как и в процессе I´.

Приведем значения параметров в случае, когда Γ_1 и Γ_2 – шаровые поверхности радиусов R_1 и R_2 $(R_2 > R_1)$ соответственно:

$$\rho = \omega^* = \frac{\mu}{2 + \mu}, \quad \rho^{**} = \tau = \frac{1}{3}.$$

Из выражения $\rho(T_3) = \rho^* = \mu \left| \frac{\Lambda_M - \Lambda_m}{1-\mu(\Lambda_M + \Lambda_m - 1)} \right|$ видно, что наибольшая эффективность применения процесса II′ достигается в случае $\mu = \mathrm{const} \ll 1$.

Характер сходимости компонент $u_1^{J'}$ и $L_2 v_2^J$ для процессов I′ и II′ аналогичен соответственно I и II. В частности, для компоненты u_1 в процессах I′ и II′ получаем сходимость со скоростью геометрической прогрессии: $\|u_1^n - u_1^*\|_* < (\rho+\epsilon)^n \|u_1^0 - u_1^*\|_*$, где ρ – спектральный радиус T_1 или T_3 в соответствии с процессами, $\epsilon > 0$ – сколь угодно малое число, $\|\ \|_*$ – норма, эквивалентная равномерной:

$$\|x\|_* = (\rho+\epsilon)^{n-1}\|x\| + (\rho+\epsilon)^{n-2}\|T_i x\| + \ldots + \|T_i^{n-1} x\|,$$

$i' = 1,3$ соответственно I′ и II′, u_1^* – точное решение, u_1^n – приближенное на n шаге соответствующего альтернирующего процесса.

Примечание 2

В[4] рассматривался вопрос построения численных алгоритмов решения граничных интегральных уравнений для оператора Лапласа в случае трех пространственных переменных на стандартной границе – поверхности куба. В случае, когда Γ_2 – поверхность Ляпунова, геометрически близкая к границе куба, построенные алгоритмы[4] позволяют экономично решать задачу нахождения гармонического решения в области Ω_3. В прикладном аспекте часто представляют интерес задачи для $\mu \gg 1$, связанные с реальными физическими системами. Проведенные исследования показывают, что для решения задачи магнитостатики в этом случае выгодно применить процесс I′ с оптимальными ω и τ. Численные результаты исследования спектрального поведения дискретного аналога K_2[4], перенесенные на непрерывный оператор, позволяют провести уточнение при выборе τ в случае кубической поверхности Γ_2. Результаты численных исследований: $\sigma(\bar{K}_2) = \{1 \cup (C_1, C_2)\}$, где $\bar{K}_2$ – дискретный аналог K_2, $C_1 \sim -0{,}5$ и слабо зависит от шага h сетки, $C_2 < 0$ и стремится к 0 при $h \to 0$. Полагая для K_2: $\sigma(K_2) = \{1 \cup [-0.5,\ 0]\}$, получаем следующие значения параметров: $Y_M = 1/2$; $Y_m = -1$; $\tau = \tau^* = 0{,}6$; $\rho = \rho^{**} = 0{,}6$.

Примечание 3

В случае, когда Γ_2 – поверхность параллелепипеда, подсчитаем память ЭВМ, необходимую для реализации построенных альтернирующих процессов /предполагаем, что в $\Omega_1 \cup \Omega_2$ задана равномерная сетка Ω_h, а сетка на Γ_2 есть проекции узлов Ω_h на поверхность параллелепипеда/. Применение сеточных методов в областях Ω_2 и Ω_3 требует памяти $O(mnq)$ / m, q, n – число узлов вдоль сторон

a, b, c /рис.2/ соответственно/. Решение заданного на Γ_2 ГИУ, соответствующего задаче Неймана для уравнения Лапласа в области Ω_3, согласно[4] требует также памяти $O(mqn)$ /без оптимизаций $O(m^2qn + q^2nm + n^2qm)$ /. Следовательно, общий массив, необходимый при реализации процессов, составляет $O(mqn)$/в случае куба – $\frac{27}{8}N^3 + O(N^2)$, где $N = m = q = n$ /.

Примечание 4

При рассмотрении случая, когда Γ_1 и Γ_2 – концентрические шаровые поверхности, были сформулированы требования, которые обеспечивали корректное осуществление процессов I и II /согласно условиям разрешимости возникающих краевых задач/. Аналогичные требования вводятся для процессов вида I и II в случае поверхностей Γ_1 и Γ_2', отличных от шаровых. Сформулируем, например, условия корректного осуществления процесса вида I:

1. $(\phi, g_0) = 0$, где g_0 удовлетворяет соотношению: $K_1^* g_0 = g_0$. Условие I выполняется для правой части и не зависит от номера итерации. Отметим также, что ортогональность ϕ и g_0 равносильна ортогональности f и 1.

2. $(u_1^J, 1) = 0$ для $\forall J = 0,1\ldots$ на Γ_1.
Это требование достигается снятием постоянного фона при решении задачи Неймана в области Ω_1 для $\forall J$, что правомерно, т.к. гармоническое решение внутренней задачи Неймана определено с точностью до константы. Условие 2 гарантирует также существование оператора $(K_1 - E)^{-1}$, что необходимо при исследовании процесса.

3. $(u_1^J, g_0) = 0$ для $\forall J = 0,1\ldots$.
Свойство 3 соответствует регулярности гармонического решения в области Ω_3. Покажем, что для выполнения 3 при $J = 1,2\ldots$ достаточно потребовать:
а/ выполнения свойств 1,2.
б/ $(u_1^0, g_0) = 0$.
Доказательство проведем по индукции.
1/ При $J = 0$ свойство 3 выполнено, т.к. $(u_1^0, g_0) = 0$ /по требованию б//.
2/ Предполагаем выполнение условия 3 для некоторого k, т.е. $(u_1^k, g_0) = 0$. Покажем выполнение 3 при $k+1$, используя соотношение

$$u_1^{J+1} = (K_1 - E)^{-1} \frac{\phi}{\mu} + \frac{(K_1 - E)^{-1}(K_1 + E)}{\mu} u_1^J, \quad J = 0, 1 \ldots .$$

Тогда

$$(u_1^{k+1}, g_0) = \left((K_1 - E)^{-1} \frac{\phi}{\mu}, g_0\right) + \left(\frac{(K_1 - E)^{-1}(K_1 + E)}{\mu} u_1^k, g_0\right).$$

а'/ $\left(\frac{(K_1 - E)^{-1}(K_1 + E)}{\mu} u_1^k, g_0\right) = \frac{1}{\mu}((K_1 + E)(K_1 - E)^{-1} u_1^k, g_0) =$

$$= \frac{1}{\mu}((K_1 - E)^{-1} u_1^k, (K_1^* + E) g_0) = \frac{1}{\mu}(g_0, (K_1 - E)^{-1} u_1^k) =$$

$$= -\frac{2}{\mu}(g_0, (E + K_1 + K_1^2 + \dots) u_1^k) = -\frac{2}{\mu}((E + K_1^* + K_1^{*2} + \dots) g_0, u_1^k) =$$

$$= -\frac{2}{\mu}(\alpha g_0, u_1^k) = 0.$$

б'/ $\left((K_1 - E)^{-1} \frac{\phi}{\mu}, g_0\right) = -\left(\frac{\phi}{\mu}, (E + K_1^* + K_1^{*2} + \dots) g_0\right) = \frac{1}{\mu}(\phi, \alpha g_0) = 0.$

Следовательно, $(u_1^{k+1}, g_0) = 0$.

Примечание 5

Построенные альтернирующие процессы применимы и в случае Ω_1 есть N - связная область ($\Gamma_1 = \bigcup_{i=1}^{N} \Gamma_{1i}$, Γ_{1i} $-i-$я поверхность Ляпунова $\Gamma_{1i} \cap \Gamma_{1j} = \Phi$ $i \neq j$ /. Это связано с сохранением основных свойств интегральных операторов L и K ($L_i = L_i^* > 0$ $(i = 1,2)$, $\sigma(K_i) \in (-1,1]$ и др.) Нужно учесть только, что $\lambda(K_1) = 1$ является N-кратным собственным значением оператора K_1. В частности, это приведет к тому, что требование 2 примечания 4 перейдет в требование 2':

2'. $(u_1^J, g_i) = 0$, где g_i имеют вид:

$$g_i(M) = \begin{cases} 1, & M \in \Gamma_{1i} \\ 0, & M \bar{\in} \Gamma_{1i} \end{cases}$$

и являются собственными функциями K_1, соответствующими $\lambda(K_1) = 1$.

Смысл 2' аналогичен 2 - снятие постоянного фона при решении задачи Неймана для уравнения Лапласа в области Ω_1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.В., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р11-84-795, Дубна, 1984.
2. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р11-83-261, Дубна, 1983.
3. Дойников Н.И. Постановка задач численного анализа полей нелинейных магнитных систем. Обзор ОБ-8. НИИЭФА, Л., 1976.
4. Егоров А.В., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р11-84-595; Р11-84-596, Дубна, 1984.
5. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. "Наука", М., 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 мая 1985 года.

Егоров А.В., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Р11-85-371

Альтернирующие процессы численного решения краевых задач магнитостатики в случае трех пространственных переменных

Построены экономичные итерационные процессы численного решения задачи магнитостатики для физической системы вакуум-среда с однородными магнитными свойствами в случае трех пространственных переменных. Рассмотрена эквивалентная краевая задача в рамках метода скалярного потенциала в области, ограниченной поверхностью параллелепипеда, цилиндра или шара, со специальным краевым условием интегрального типа, заданным на этой поверхности. Предлагаемые здесь альтернирующие итерационные процессы предназначены для решения поставленной краевой задачи. Установлена сходимость итераций для всего возможного диапазона изменения магнитной проницаемости среды.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Egorov A.V., Zhidkov E.P., Khoromskij B.N. P11-85-371

Alternating Processes of the Numerical Solution of the Boundary Magnetostatics Problem in the Case of the Free Space Variables

The economic iterational processes of the numerical solution of the magnetostatics problem for the physical system vacuum-medium with a homogeneous magnetic feature have been constructed in the case of the free space variables. Equivalent boundary problem in the framework of scalar potential method is considered in the region limited by parallelepiped, cylinder or ball surface with the specific boundary condition in the integral form set on that surface. Alternating iterational processes proposed can be used for solving the presented boundary problem. The iterational convergence is shown for all possible region of changing the medium magnetic permeability.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985