сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-85-37

Е.П.Каданцева

ИССЛЕДОВАНИЕ В L_2 УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЯ **Sine-Gordon**

1985

Изменение магнитного поля в ограниченной протяженной системе с притягивающей микронеоднородностью описывается уравнением sine-Gordon

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{tt} = \varphi_{xx} - (1-\mu\delta(x-x_0))\sin\varphi, \\
&-\ell \le x \le \ell, \quad \varphi_x(-\ell,t) = \varphi_x(\ell,t) = 0, \\
&\varphi(x,0) = \phi(x), \quad \varphi_t(x,0) = \psi(x).
\end{aligned} \tag{I}
$$

Сделаем замену переменных: $u = \varphi_x,\ v = \varphi_t$. Получаем систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&u_t = v_x, \\
&v_t = u_x - (1-\mu\delta(x-x_0))\sin\Big(\phi(x) + \int_0^t v(x,\xi)\,d\xi\Big), \\
&u(-\ell,t) = u(\ell,t) = 0, \\
&v_x(-\ell,t) = v_x(\ell,t) = 0, \\
&u(x,0) = \phi'(x), \quad v(x,0) = \psi(x).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Решение $\{u, v\}$ задачи (2) удовлетворяет закону сохранения энергии:

$$
\frac{d}{dt}\Big\{ \int_{-\ell}^{\ell} \frac{1}{2}\big(u^2(x,t) + v^2(x,t)\big) + \big(1-\cos\varphi(x,t)\big)\,dt - \mu\big(1-\cos\varphi(x_0,t)\big)\Big\} = 0, \tag{3}
$$

где $\varphi(x,t) = \phi(x) + \int_0^t v(x,\xi)\,d\xi$.

В работе /I/ для решения (2) используется метод конечных разностей. Интегралы заменяются интегральными суммами. В области $-\ell \le x \le \ell,\ 0 \le t \le T$ строится сетка с шагами h, τ.

В полуцелых точках $x_{i+1/2} = -\ell + (i+1/2)h,\ t_{n+1/2} = (n+1/2)\tau,$ $(i=0,\dots,M;\ n=0,\dots,N)$ счет ведется по схеме Лакса:

$$
\begin{aligned}
&u_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_i^n) + \frac{1}{2}\alpha(v_{i+1}^n - v_i^n), \\
&v_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(v_{i+1}^n + v_i^n) + \frac{1}{2}\alpha(u_{i+1}^n - u_i^n) - \frac{1}{2}\tau\sin\Big(\phi_{i+1/2} + \frac{\tau}{4}\sum_{k=1}^{n}(v_i^k + v_{i+1}^k + v_i^{k-1} + v_{i+1}^{k-1})\Big), \\
&\alpha = \tau/h, \quad i = 0, 1, \dots, M.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Значения u и v на $(n+1)$ -ом слое считаются по схеме-крест:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \alpha\left(v_{i+1/2}^{n+1/2} - v_{i-1/2}^{n+1/2}\right),$$

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \alpha\left(u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}\right) - \tau\left(1-\frac{1}{h}\mu\delta(i-i_0)\right)\sin\left(f_i + \frac{\tau}{4}\sum_{k=1}^{n}{}' \left(v_i^k + v_i^{k-1}\right) + \frac{\tau}{4}\left(v_{i+1/2}^{n+1/2} + v_{i-1/2}^{n+1/2}\right)\right),$$

$$\delta(i-i_0) = \begin{cases} 1, & i = i_0, \\ 0, & i \neq i_0, \end{cases} \qquad (5)$$

$$u_0^n = -u_1^n, \quad v_0^n = v_1^n, \quad u_{M+1}^n = -u_M^n, \quad v_{M+1}^n = v_M^n,$$

$$i = 1,\dots,M; \quad n = 0,\dots,N; \quad n\tau \le T.$$

Заменим (3) его разностным аналогом:

$$\Delta_t\left\{\frac{1}{2}h\sum_{i=1}^{M}{}'\left(u_i^n\right)^2 + \left(v_i^n\right)^2 + h\sum_{i=1}^{M}{}'\left(1-\cos\tilde{\varphi}_i^n\right) - \mu\left(1-\cos\tilde{\varphi}_{i_0}^n\right)\right\} = 0, \qquad (6)$$

где $\tilde{\varphi}_i^n = f_i + \tau\sum\limits_{k=1}^{n} v_i^k.$

В предлагаемой работе с помощью метода энергетических неравенств /2/ исследуется устойчивость в L_2 разностной аппроксимации (4)-(5). Показано, что при естественном ограничении на шаги разностной сетки $\alpha = \tau/h \le 1$ и $n\tau \le T$ решение устойчиво в L_2.

Обозначим через $U_i^n = \{u_i^n, v_i^n\}$ и рассмотрим сеточное пространство L_2 векторов $\{U\}$ с нормой

$$\|U^n\| = \left(h\sum_{i=1}^{M}|u_i^n|^2 + |v_i^n|^2\right)^{1/2}.$$

Возведем обе части (5) в квадрат. Интегрируем по частям. Учитывая граничные условия:

$$\|U^{n+1}\|^2 = \|U^n\|^2 + \frac{1}{4}\alpha^2\|\Delta_{\overset{\circ}{x}} U^n\|^2 + \frac{1}{4}\alpha^4\|\Delta_{x\bar{x}} U^n\|^2 - \alpha^2\|\Delta_x U^n\|^2 -$$

$$- \frac{1}{4}\tau^2\alpha^2 h\sum_{i=1}^{M}\left(\Delta_x \sin\varphi_{i-1/2}^n\right)^2 - h\sum_{i=1}^{M}\left(\tau - \alpha\mu\delta(i-i_0)\right)^2\sin^2\varphi_i^n - \alpha\tau h\sum_{i=1}^{M}\Delta_x\sin\varphi_{i-1/2}^n u_i^{n+1} - \qquad (7)$$

$$- 2\tau h\sum_{i=1}^{M}\sin\varphi_i^n v_i^{n+1} + 2\tau\mu\sin\varphi_{i_0}^n v_{i_0}^{n+1},$$

где

$$\varphi_{i-1/2}^n = f_{i-1/2} + \frac{\tau}{4}\sum_{k=1}^{n}{}'\left(v_i^k + v_{i-1}^k + v_i^{k-1} + v_{i-1}^{k-1}\right),$$

$$\varphi_i^n = f_i + \frac{\tau}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(v_i^k + v_i^{k-1}\right) + \frac{\tau}{4}\left(v_{i+1/2}^{n+1/2} + v_{i-1/2}^{n+1/2}\right).$$

Здесь и далее используются обозначения из /2/. Для разностей $\tilde{\varphi}^n - \varphi^n$ и $\tilde{\varphi}^{n+1} - \tilde{\varphi}^n$ из (4),(6) имеем

$$\tilde{\varphi}_i^n - \varphi_i^n = \frac{1}{2}\tau v_i^0 - \frac{1}{8}\tau\left(\Delta_{x\bar{x}} v_i^n + \alpha\Delta_{\overset{\circ}{x}} u_i^n\right) \equiv \Delta_i^n,$$

$$\tilde{\varphi}_i^{n+1} - \tilde{\varphi}_i^n = \tau v_i^{n+1}. \qquad (8)$$

Преобразуем (6) к виду:

$$\|U^{n+1}\|^2 + 2h\sum_{i=1}^{M}{}'\left(1-\cos\tilde{\varphi}_i^{n+1}\right) - 2\mu\left(1-\cos\tilde{\varphi}_{i_0}^{n+1}\right) =$$

$$= \|U^n\|^2 + 2h\sum_{i=1}^{M}\left(1-\cos\tilde{\varphi}_i^n\right) - 2\mu\left(1-\cos\tilde{\varphi}_{i_0}^n\right) - \frac{\alpha^2(1-\alpha^2)}{4}\|\Delta_{x\bar{x}} U^n\|^2 + R(U), \qquad (9)$$

где $R(U)$ определяется соотношением:

$$R(U) = -\frac{1}{4}\tau^2\alpha^2 h\sum_{i=1}^{M}\left(\Delta_x\sin\varphi_{i-1/2}^n\right)^2 - h\sum_{i=1}^{M}\left(\tau - \mu\alpha\delta(i-i_0)\right)^2\sin^2\varphi_i^n -$$

$$- \alpha\tau h\sum_{i=1}^{M}\Delta_x\sin\varphi_{i-1/2}^n u_i^{n+1} - 2\tau h\sum_{i=1}^{M}{}'\left(\sin\varphi_i^n + \frac{\cos\tilde{\varphi}_i^{n+1} - \cos\tilde{\varphi}_i^n}{\tilde{\varphi}_i^{n+1} - \tilde{\varphi}_i^n}\right)v_i^{n+1} +$$

$$+ 2\tau\mu\left(\sin\varphi_{i_0}^n + \frac{\cos\tilde{\varphi}_{i_0}^{n+1} - \cos\tilde{\varphi}_{i_0}^n}{\tilde{\varphi}_{i_0}^{n+1} - \tilde{\varphi}_{i_0}^n}\right)v_{i_0}^{n+1}.$$

Для $R(U)$ имеем оценку

$$R(U) \le \frac{1}{2}\tau\alpha\left\{\|\Delta_x\sin\varphi^n\|^2 + \|U^{n+1}\|^2\right\} + 2\tau h\sum_{i=1}^{M}|Q_i^n(\varphi)||v_i^{n+1}| +$$

$$+ 2\tau\mu|Q_{i_0}^n(\varphi)||v_{i_0}^{n+1}|,$$

$$Q_i^n(\varphi) = \sin\varphi_i^n + \frac{\cos\tilde{\varphi}_i^{n+1} - \cos\tilde{\varphi}_i^n}{\tilde{\varphi}_i^{n+1} - \tilde{\varphi}_i^n}.$$

Используя (8), получаем

$$|Q_i^n(\varphi)| \le \left|\sin\tilde{\varphi}_i^n\left(\cos\Delta_i^n - \frac{\sin(\tau v_i^{n+1})}{\tau v_i^{n+1}} \pm 1\right)\right| + \left|\cos\tilde{\varphi}_i^n\sin\Delta_i^n\right| +$$

$$+ \left|\cos\tilde{\varphi}_i^n \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\tau v_i^{n+1}}{2}\right)}{\frac{1}{2}\tau v_i^{n+1}}\right| \le 2|\Delta_i^n| + 2\tau|v_i^{n+1}|.$$

Тогда справедливо

$$R(U) \le \mu c_1\tau\left(\|U^{n+1}\|^2 + \|U^n\|^2\right) + \tau c_2\|f\|^2, \qquad (10)$$

c_1, c_2 – некоторые постоянные, не зависящие от n.

Обозначим через $P^n(U) = \|U^n\|^2 + 2h\sum_{i=1}^{M}(1-\cos\tilde{\varphi}_i^n) - 2\mu(1-\cos\tilde{\varphi}_{i_0}^n)$.

Из (9),(I0) следует, что

$$P^{n+1}(U) \le \left(\frac{1+\tau c_0}{1-\tau c_0}\right) P^n(U) + \tau c_3 \|f\|^2$$

или

$$P^{n+1}(U) \le \left(\frac{1+\tau c_0}{1-\tau c_0}\right)^{n+1} P^0(U) + \tau c_3 \|f\|^2 \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1+\tau c_0}{1-\tau c_0}\right)^k \le e^{2c_0T} P^0(U) + c_4\|f\|^2,$$

c_0, c_3, c_4 – некоторые постоянные, не зависящие от n.

Таким образом, при $\alpha \le 1$ и $n\tau \le T$ решение $U = \{u, v\}$ задачи (4)-(5) остается ограниченным в L_2.

Выражение (9) можно переписать в виде:

$$\Delta_t\left\{\|U^n\|^2 + 2h\sum_{i=1}^{M}(1-\cos\tilde{\varphi}_i^n) - 2\mu(1-\cos\tilde{\varphi}_{i_0}^n)\right\} = -\frac{\alpha^2(1-\alpha^2)}{4}\|\Delta_{x\bar{x}}U^n\|^2 + O(\tau). \qquad (II)$$

При численных расчетах по формулам (4),(5) энергия убывает на величину (I) /I/. Из (II) видно, что убывание энергии зависит от свойств гладкости решения задачи (2).

Исследование устойчивости в L_2 схемы Русанова /3/ для задачи (2) с помощью метода энергетических неравенств удается провести лишь для нулевых граничных условий.

Численное решение, полученное с помощью схемы Русанова, удовлетворяет соотношению

$$\Delta_t\left\{h\sum_{i=0}^{M+1}\left((u_i^n)^2 + (v_i^n)^2\right) + 2h\sum_{i=0}^{M+1}(1-\cos\tilde{\varphi}_i^n) - 2\mu(1-\cos\tilde{\varphi}_{i_0}^n)\right\} =$$

$$= -\frac{1}{72}\left(1-\frac{\alpha^4}{2}\right)\|\Delta_{x\bar{x}x}U^n\|^2 - \frac{3\sigma}{4\cdot 12^2}\|\Delta_{\mathring{x}\mathring{x}}U^n\|^2 - \frac{1}{12^2}\sigma(1-\alpha^2)\|\Delta_{\mathring{x}x\bar{x}}U^n\|^2 + O(\tau),$$

здесь $\sigma = \alpha^4 - 4\alpha^2 + 2$, $n\tau \le T$, $\alpha = \tau/h$.

При $\sigma \geq 0$ и $n\tau \le T$ решение будет ограничено в L_2. Полученные условия устойчивости совпадают с условиями В.В.Русанова /3/ для $\omega = 2$. Убывание энергии и в этом случае зависит от свойств гладкости решения задачи (2).

Литература

I. Казача Г.С., Сердюкова С.И., Филиппов А.Т. ОИЯИ, PII-84-76, Дубна, I984.

2. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. "Наука", М.,I97I.

3. Rusanov V.V., Fluid Dynam. Trans., 1969, vol. 4, pp. 285-294.

Рукопись поступила в издательский отдел
I8 января I985 года.

Каданцева Е.П. P11-85-37

Исследование в L_2 устойчивости одной разностной аппроксимации уравнения Sine-Gordon

Исследуется устойчивость в сеточном пространстве L_2 разностной аппроксимации уравнения sine-Gordon. Эквивалентная система уравнений решается по схеме Лакса с пересчетом по схеме-крест. Показано, что при естественном ограничении на шаги разностной сетки $\alpha = \tau/h \le 1$ и $n\tau \le T$ численное решение устойчиво в L_2. Численное решение, полученное по схеме Русанова, устойчиво в L_2 при $\sigma = \alpha^4 - 4\alpha^2 + 2 \ge 0$ и $n\tau \le T$.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Kadantseva E.P. P11-85-37

Investigation in L_2 of the Stability of One Finite-Difference Approximation of Sine-Gordon Equation

The stability in the net space L_2 of the finite-difference approximation of the sine-Gordon equation is investigated. The equivalent system of equations is solved by the Lax-scheme with recalculation by the scheme-cross. It is shown that at natural restriction of net steps $\alpha = \tau/h \le 1$ and $n\tau \le T$ numerical solution is stable in L_2. The solution obtained by the Rusanov scheme is stable in L_2 when $\sigma = \alpha^4 - 4\alpha^2 + 2 \ge 0$ and $n\tau \le T$.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985