объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р11-85-304

Г.А.Емельяненко

О СВОЙСТВАХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОСОБЕННЫМИ ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫМИ, ЛЕНТОЧНЫМИ И КВАЗИТРЕХДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ.

Свойства матриц, обратных к трехдиагональным

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

1985

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе будут продолжены исследования матриц, обратных к трехдиагональным, ленточным и квазитрехдиагональным, на основе результатов[1-3], а также получены новые алгоритмы решения систем линейных уравнений с такими матрицами. При этом предлагаемые алгоритмы обращения операторов /матриц/ и методы решения систем уравнений не только не уступают по своим качествам, в том числе вычислительным, хорошо зарекомендовавшим себя различным вариантам метода прогонки и др. /например,[4]/, но и выгодно отличаются от них своей универсальностью и инвариантностью относительно внутренних свойств матрицы системы. По-видимому, здесь нет необходимости еще раз останавливаться на анализе причин, побудивших автора заняться настоящей алгебраической проблемой, которая, по установившейся традиции, считалась хорошо изученной в литературе. На анализе этих причин уже останавливались в[1-3], а также в[5-6]. Однако практические потребности приводили и многих других авторов, например[7-10], к необходимости пересмотра установившегося взгляда на завершенность исследований в этом разделе вычислительной алгебры.

Большой справочный материал по различным вычислительным аспектам матричной алгебры, в том числе обсуждаемым в данной работе, можно найти, например, в[11-13].

Однако результаты настоящего исследования, по мнению автора, отличаются от перечисленных выше и позволяют по-иному* взглянуть на некоторые аспекты: решения некорректно поставленных задач математической физики[14], оптимального согласования сплайн-аппроксимации[15] со своими начальными /граничными/ условиями, решения краевых[4] задач, а также применения методов аналитических вычислений на ЭВМ[16] для конкретных классов задач и др. Прежде чем приступить к изложению материала, отметим, что настоящая серия работ объединена общим названием. Содержание каждой работы в серии вынесено в качестве ее подзаголовка. Отметим также, что многие из результатов, как перечисленных выше, так и тех, которые будут приведены впоследствии, являются следствием основной /фундаментальной/ теоремы Бине-Коши[11] в алгебре. Однако вряд ли они могли бы быть замечены на этом пути. Это, по существу, и определяло на долгие годы точку зрения о завершенности исследований свойств таких систем. Метод факторизации

---

*На этих вопросах мы еще будем подробно останавливаться в работах этой серии.

Гаусса, положенный в основу всех перечисленных выше результатов, оказался более перспективным с точки зрения проявления новых свойств таких систем.

1. СВОЙСТВА МАТРИЦЫ, ОБРАТНОЙ К НЕОСОБЕННОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ТРЕХДИАГОНАЛЬНОЙ

Итак, далее мы займемся изучением системы

$$A \cdot X = Y, \quad A = \begin{bmatrix} b_1 & a_2 & & & \\ a_2 & b_2 & a_3 & & \\ - & - & - & - & - \\ & & a_{m-1} & b_{m-1} & a_m \\ & & & a_m & b_m \end{bmatrix}. \qquad /1/$$

где $\{b_i\}$, $\{a_i\}$ - последовательности чисел*. Справедлива

<u>Теорема 1.</u> Если A - неособенная симметричная трехдиагональная матрица, все элементы $\{b_i\}_{i=1}^{m}$ и $\{a_j\}_{j=2}^{m}$ которой отличны от нуля**, то любой элемент $(A^{-1})_{ij} = B_{ij}$ обратной матрицы $A^{-1} = B$ может быть выражен через элементы ее первого и последнего столбцов, т.е. через B_{i1} и B_{im}, где $i = 1,2,\dots m$.

<u>Доказательство</u> этой теоремы для случая, когда все главные миноры матрицы A /1/ отличны от нуля, совпадает с доказательством, выполненным в [1]. Однако, как мы уже указывали выше, требование отличия от нуля главных миноров A ограничивает возможности применения полученных ранее результатов. От требования отличия от нуля главных миноров A можно отказаться, а также представление

$$B_{ij} = \begin{cases} W_i V_j, & i \geq j \\ V_i W_j, & i \leq j \end{cases} \qquad /2/$$

элементов обратной матрицы $A^{-1} = B$ существует и без указанного требования. Итак, предположим сначала, что для A /1/ справед-

---

* Будем считать эти числа вещественными, хотя это условие не нарушает общности результатов.

** Если хотя бы один из элементов $\{b_i\}$ или $\{a_j\}$ равен нулю, то матрица A /1/ легко[4] разбивается на две подматрицы, для каждой из которых справедлива данная теорема.

ливо /2/. Тогда первый и последний столбцы A^{-1} есть

$$V_1 \cdot W_i = B_{i1} \text{ и } W_m \cdot V_i = B_{im}, \quad i = 1,2,\dots,m. \qquad /3/$$

Если предположить известными правые части /3/, т.е. $\{B_{i1}\}_{i=1}^{m}$ и $\{B_{im}\}_{i=1}^{m}$, то /3/ можно считать системой $2m$ <u>нелинейных</u> уравнений относительно искомых векторов-столбцов V и W. Например, мы могли бы для вычисления $\{B_{i1}\}$ и $\{B_{im}\}$ воспользоваться любым подходящим методом решения системы /1/ с правыми частями $y = \{1,0,\dots,0\}^T$ для вычисления B_{i1} и $y = \{0,0,\dots,0,1\}^T$ для вычисления B_{im}. После того как система /3/ будет решена, вычисление любого элемента A^{-1} можно выполнить согласно /2/ и, следовательно, без труда найти любую компоненту решения /1/ при любой правой части, т.е.

$$x_i = W_i \sum_{k=1}^{i} V_k y_k + V_i \sum_{k=i+1}^{m} W_k y_k. \qquad /4/$$

Однако подобный способ вычисления V, W и, следовательно, A^{-1} и x не всегда удобен при численной реализации метода на ЭВМ. Это обусловлено обстоятельствами, смысл которых будет ясен из дальнейшего. Поэтому мы изберем другой путь исследования системы /3/. Легко видеть, что нелинейная система уравнений /3/ в матричной записи имеет вид

$$\begin{bmatrix} V_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix} & W_m \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_m \\ V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ \vdots \\ B_{m1} \\ B_{1m} \\ \vdots \\ B_{mm} \end{bmatrix}. \qquad /5/$$

Векторы $\{B_{11},\dots,B_{m1}\}^T$ и $\{B_{1m},\dots,B_{mm}\}^T$ в силу неособенности A не могут быть нулевыми. Следовательно, первая компонента V_1 у V и последняя компонента W_m вектора W согласно /5/ должны быть отличными от нуля, т.е. $V_1 \neq 0$ и $W_m \neq 0$. Отсюда получаем, что решение системы /5/ записывается в виде

$$V_i = W_m^{-1} \cdot B_{im}, \quad W_i = V_1^{-1} \cdot B_{i1}, \quad i = 1,\dots,m. \qquad /6/$$

В силу симметрии A^{-1} имеем $B_{m1}=B_{1m}$, а также из /2/ следует $V_1W_m = W_mV_1$. Другими словами, элементы A^{-1}, стоящие в левом нижнем и в правом верхнем углу обратной матрицы, должны быть одинаковыми. С другой стороны, из /6/ следует $V_1W_m = W_m^{-1}\cdot B_{1m}\cdot \times V_1^{-1} \times B_{m1}$. Итак, получаем

$$V_1^2\cdot W_m^2 = B_{1m}\cdot B_{m1} = B_{1m}^2 = B_{m1}^2 , \qquad /7/$$

где $V_1 \neq 0$, $W_m \neq 0$, $B_{m1} \neq 0$, $B_{1m} \neq 0$ в силу неособенности A и $B_{m1}=B_{1m}$ в силу симметрии A^{-1}. Из /7/ следует, что мы можем фиксировать один из элементов, например, W_m, положив его равным 1. Тогда другой элемент $V_1 = B_{1m}$. Следовательно, в итоге приходим к следующей лемме.

Лемма 1. Если A - неособенная симметричная трехдиагональная матрица, то матрица $B = A^{-1}$, обратная к ней, может быть представлена в виде

$$B_{ij} = \alpha \begin{cases} W_i\cdot V_j , & i \geq j \\ V_i\cdot W_j , & i \leq j , \end{cases} \qquad /8/$$

где вектор-строки V^T и W^T выражаются через элементы последнего и первого столбцов:

$$V^T = \{ 1, \frac{B_{2m}}{B_{1m}}, \dots , \frac{B_{mm}}{B_{1m}} \}, \quad W^T = \{ \frac{B_{11}}{B_{1m}}, \dots , \frac{B_{m-11}}{B_{1m}}, 1 \}, \qquad /9/$$

а $\alpha = (B_{m1} \equiv B_{1m} \neq 0)$ - есть крайние элементы второй главной диагонали A^{-1}. Конечно, следует помнить, что эта лемма справедлива лишь при условии /2/. Займемся далее поиском выражений V и W через элементы исходной матрицы A /1/. Причем поставим задачу поиска таких выражений, которые не были бы связаны рекурсивным делением, что является большим минусом в формулах монотонной прогонки.

Итак, поскольку B_{i1}, B_{im} в /9/ являются первым и последним столбцами в A^{-1}, очевидно, будет справедлива следующая система уравнений:

$$\alpha \cdot \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} W_1 \\ \vdots \\ W_{m-1} \\ (W_m = 1) \\ \hline (V_1 = 1) \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array} \right], \qquad /10/$$

где A - неособенная исходная матрица /1/, а V и W выражаются через B_{i1} и B_{im} в виде /9/. Матрица системы /10/ состоит из неособенных блоков A и потому неособенная. Система /10/ порядка $2m$ однозначно разрешима и ее решение сводится к раздельному решению двух неособенных систем уравнений порядка m:

$$\left. \begin{array}{ll} b_1W_1 + a_2W_2 = \alpha^{-1}, & i = 1, \\ a_iW_{i-1} + b_iW_i + a_{i+1}W_{i+1} = 0, & i = 2,3,\dots,m-1, \\ a_mW_{m-1} + b_m\cdot(W_m = 1) = 0, & i = m, \end{array} \right. \qquad /11/$$

$$\left. \begin{array}{ll} b_1\cdot(V_1 = 1) + a_2V_2 = 0, & i = 1, \\ a_iV_{i-1} + b_iV_i + a_{i+1}V_{i+1} = 0, & i = 2,\dots,m-1, \\ a_mV_{m-1} + b_mV_m = \alpha^{-1}, & i = m. \end{array} \right. \qquad /12/$$

Дальнейшее доказательство теоремы 1 существенным образом будет опираться на результат, который сформулируем как лемму.

Лемма 2. Если A - неособенная симметричная трехдиагональная матрица с отличными от нуля главными минорами, все элементы $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ которой не равны нулю, то для элементов обратной матрицы $A^{-1}=B$ справедливо представление

$$B_{ij} = \alpha \cdot \begin{cases} V_iW_j , & i \leq j , \\ W_iV_j , & j \leq i , \end{cases} \qquad /13/$$

где

$$\begin{aligned} V_i &= (-1)^{i-1} \prod_{k=2}^{i} \frac{b_{k-1}}{a_k} \cdot \prod_{k=2}^{i-1} \omega_k , \quad i = 1,2,\dots,m, \\ W_j &= (-1)^{m-j} \prod_{k=j+1}^{m} \frac{b_k}{a_k} \prod_{k=j+1}^{m} \Omega_k , \quad j = m,\dots,1, \end{aligned} \qquad /14/$$

а также введены обозначения

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{a_2}{b_1}, \quad \omega_k = 1 - \frac{a_k}{b_k}\mu_k , \quad \mu_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{b_k}\omega_k^{-1} , \quad k = 2,\dots,m-1, \\ \eta_m &= \frac{a_m}{b_m}, \quad \Omega_k = 1 - \frac{a_{k+1}}{b_k}\eta_{k+1} , \quad \eta_k = \frac{a_k}{b_k}\Omega_k^{-1} , \quad k = m-1,\dots,2. \end{aligned} \qquad /15/$$

Доказательство леммы 2 основано на результатах /1-3/ и, в частности, на том факте, что отличие от нуля главных миноров A эквивалентно отличию от нуля соответствующих главных миноров A^{-1}.

Это равносильно, согласно /9/, отличию от нуля всех компонент векторов V и W. Учитывая это, можем переписать уравнения /11/ и /12/ в виде

$$
\begin{aligned}
& b_1 W_1 + a_2 W_2 = \alpha^{-1}, \quad i = 1, \\
& \eta_i = \frac{a_i}{b_i}\left(1 - \frac{a_{i+1}}{b_i}\eta_{i+1}\right)^{-1}, \quad i = m-1, \dots, 2, \\
& \eta_m = \frac{a_m}{b_m}, \quad i = m,
\end{aligned}
\tag{/16/}
$$

$$
\begin{aligned}
& \mu_2 = \frac{a_2}{b_1}, \quad i = 1, \\
& \mu_{i+1} = \frac{a_{i+1}}{b_i}\left(1 - \frac{a_i}{b_i}\mu_i\right)^{-1}, \quad i = 2, 3, \dots, m-1, \\
& a_m V_{m-1} + b_m V_m = \alpha^{-1}, \quad i = m,
\end{aligned}
\tag{/17/}
$$

где ввели обозначения $\mu_i = -V_{i-1}/V_i$, $\eta_i = -W_i/W_{i-1}$, а также учли $V_1 = 1$, $W_m = 1$. Другими словами, мы получили следующие представления для W и V:

$$
\begin{aligned}
& W_{i-1} = -W_i \cdot \eta_i^{-1}, \quad i = m-1, \dots, 2, \quad W_m = 1, \quad W_{m-1} = -\frac{b_m}{a_m}, \\
& V_j = -V_{j-1} \cdot \mu_j^{-1}, \quad j = 3, \dots, m, \quad V_1 = 1, \quad V_2 = -\frac{b_1}{a_2},
\end{aligned}
\tag{/18/}
$$

где $\{\eta_i\}$ и $\{\mu_i\}$ определены в /16/ и /17/. Здесь уместно заметить, что граничные условия в /16/, /17/ вместе с /18/ приводят к равенству

$$
(b_1 W_1)/(b_m V_m) = \left(1 - \frac{a_m}{b_m}\cdot\mu_m\right)/\left(1 - \frac{a_2}{b_1}\eta_2\right). \tag{/19/}
$$

Последнее равенство может быть использовано как обобщенный критерий устойчивости при вычислениях по формулам /18/ W и V, поскольку в него входят W_1 и V_m, а также μ_m и η_2, которые содержат максимальные значения накопленных погрешностей. Воспользуемся в дальнейшем следующими равенствами /16/, /17/, а также $b_1/a_2 = \mu_2^{-1}$ и $b_m/a_m = \eta_m^{-1}$. Лемма 2 доказана.

Итак, требование неособенности встречных* главных миноров A привело в лемме 2 к требованию неособенности матриц $\{\omega_i\}$ и $\{\Omega_i\}$. Продолжение доказательства теоремы 1 основано на поиске способа вычисления последовательностей $\{\prod_{k=2}^{i-1}\omega_k\}_{i=1}^{m}$ и $\{\prod_{k=j+2}^{m}\Omega_{k-1}\}_{j=m}^{1}$ без требования неособенности ω_i и Ω_j. При этом большую роль играет следующая лемма.

Лемма 3. Если справедливы равенства

$$
\begin{aligned}
& \omega_k = 1 - \frac{a_k}{b_k}\mu_k, \quad \mu_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{b_k}\cdot\omega_k^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \\
& \omega_1 = 1, \quad \mu_1 = 0, \\
& \Omega_k = 1 - \frac{a_{k+1}}{b_k}\eta_{k+1}, \quad \eta_k = \frac{a_k}{b_k}\Omega_k^{-1}, \quad k = m, m-1, \dots, 1, \\
& \Omega_m = 1, \quad \eta_{m+1} = 0,
\end{aligned}
\tag{/20/}
$$

то члены последовательностей $\prod_{k=2}^{i-1}\omega_k$ и $\prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k$ определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$
\begin{aligned}
& \prod_{k=1}^{i}\omega_k = \prod_{k=1}^{i-1}\omega_k - \frac{a_i^2}{b_{i-1}b_i}\prod_{k=1}^{i-2}\omega_k, \\
& \prod_{k=j}^{m}\Omega_k = \prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k - \frac{a_{j+1}^2}{b_j b_{j+1}}\prod_{k=j+2}^{m}\Omega_k.
\end{aligned}
\tag{/21/}
$$

Доказательство. Не теряя общности, будем предполагать, что все $a_i \neq 0$ и $b_i \neq 0$ являются элементами матрицы A /1/. Тогда, очевидно, $\{\omega_k\}$ и $\{\Omega_k\}$ совпадают с /15/. Докажем сначала лемму для последовательности $\prod_{k=2}^{i}\omega_k$. Из /20/ следует:

$$
\begin{aligned}
& \omega_1 = 1, \\
& \omega_2\omega_1 = \omega_1 - \frac{a_2^2}{b_1 b_2}, \\
& \omega_3\omega_2\omega_1 = \omega_2\omega_1 - \frac{a_3^2}{b_2 b_3}\omega_1,
\end{aligned}
$$

\- -

* Под встречными главными минорами мы понимаем последовательности главных миноров, начинающиеся соответственно с конечных элементов на главной диагонали.

$$\omega_i\omega_{i-1}\cdots\omega_4\omega_3\omega_2\omega_1=\omega_{i-1}\omega_{i-2}\cdots\omega_2\omega_1-\frac{a_i^2}{b_{i-1}b_i}\omega_{i-2}\cdots\omega_2\omega_1\,,$$

$i=1,2,\ldots,m\,,\quad j=m,m-1,\ldots,1\,,$

$$\Omega_m\Omega_{m-1}\cdots\Omega_{j+3}\Omega_{j+2}\Omega_{j+1}\Omega_j=\Omega_m\Omega_{m-1}\cdots\Omega_{j+1}-\frac{a_{j+1}^2}{b_{j+1}b_j}\Omega_m\Omega_{m-1}\cdots\Omega_{j+2}\,,$$

/22/

- -

$$\Omega_m\Omega_{m-1}\Omega_{m-2}=\Omega_m\Omega_{m-1}-\frac{a_{m-1}^2}{b_{m-1}b_{m-2}}\Omega_m\,,$$

$$\Omega_m\Omega_{m-1}=\Omega_m-\frac{a_m^2}{b_m b_{m-1}}\,,\quad \Omega_m=1\,.$$

Лемма 3 доказана.

Замечание к лемме 3. Очевидно, что равенства /20/ эквивалентны, в соответствии с /22/, равенствам /21/, если иметь в виду их численное значение. Однако, если вычисление членов последовательностей $\prod_{k=1}^{i}\omega_k$ и $\prod_{k=j}^{m}\Omega_k$, исходя из /20/, требует знания ω_k^{-1} и Ω_k^{-1}, то при вычислении этих же последовательностей, исходя из рекурсивных зависимостей /21/, этого уже не требуется. Продолжая доказательство теоремы 1, сформулируем результат в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Если A - неособенная симметричная трехдиагональная матрица вида /1/, все элементы $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ которой отличны от нуля, то для элементов $A^{-1}=B$ ее обратной матрицы справедливо представление

$$B_{ij}=\alpha\cdot\begin{cases}V_iW_j\,, & i\le j\,,\\ W_iV_j\,, & j\le i\,,\end{cases}\qquad /23/$$

где

$\alpha=B_{m1}=B_{1m}\,,$

$$V_i=(-1)^{i+1}\frac{b_1}{b_i}\prod_{k=2}^{i}\frac{b_k}{a_k}\cdot\alpha_i\,,\quad i=1,2,\ldots,m\,,\qquad /24/$$

$$W_j=(-1)^{m-j}\prod_{k=j+1}^{m}\frac{b_k}{a_k}\cdot\beta_j\,,\quad j=m,m-1,\ldots,1\,,$$

а также

$$\alpha_{i+1}=\alpha_i-\gamma_i\cdot\alpha_{i-1}\,,\quad \alpha_1=\alpha_2=1\,,\quad i=2,3,\ldots,m-1\,,$$

$$\beta_{j-1}=\beta_j-\gamma_{j+1}\cdot\beta_{j+1}\,,\quad \beta_m=\beta_{m-1}=1\,,\quad j=m-1,\ldots,2\,,\qquad /25/$$

$$\gamma_k=\frac{a_k^2}{b_{k-1}b_k}\,,\quad k=2,3,\ldots,m\,.$$

Доказательство этой теоремы легко следует из леммы 1 и 2. Учтем также очевидное равенство $\prod_{k=2}^{i}\frac{b_{k-1}}{a_k}=\frac{b_1}{b_i}\prod_{k=2}^{i}\frac{b_k}{a_k}$. На самом деле, если в /21/ обозначить $\alpha_i=\prod_{k=1}^{i-1}\omega_k$ и $\beta_j=\prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k$, то равенства /21/ приобретают вид /25/. При этом, в соответствии с введенным ранее определением, произведения $\prod_{k=p}^{q}(\cdot)=1$, если $q<p$. Это свойство произведения определяет единичные граничные условия /25/ для последовательностей $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$, которые согласуются с введенными ранее $\omega_1=1$ и $\Omega_m=1$. Теорема 2 доказана. Сформулируем ряд замечаний к теореме 2.

Замечание 1. Рекурсивные выражения /25/ хоть и получены в предположении отличия от нуля всех главных миноров матрицы А /1/, но в конечном своем виде они свободны, как видим, от него. Поэтому мы сформулировали теорему 2 уже без этого ограничения, в отличие от формулировки лемм.

Замечание 2. С доказательством теоремы 2 мы фактически завершили бы доказательство теоремы 1, если бы не два обстоятельства: первое - как вычислять α в /28/?, и второе - мы предположили вначале при доказательстве теоремы 1 существование представления /2/. Поэтому следует еще проверить, удовлетворяет ли матрица B /23/÷/25/ условию обратного оператора $B\cdot A=E$, где E - единичная матрица. Ответ на эти вопросы дает следующая теорема.

Теорема 3. Ограниченные последовательности

$$V_i=(-1)^{i+1}\cdot b_i^{-1}\cdot\prod_{k=2}^{i}\frac{b_k}{a_k}\cdot\alpha_i\,,\quad i=1,2,\ldots,m\,,$$

$$W_j=(-1)^{j+1}\cdot\prod_{k=2}^{j}\frac{a_k}{b_k}\cdot\beta_j\,,\quad j=m,m-1,\ldots,1\,,\qquad /26/$$

где $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_j\}$ определены в /25/, а $\{a_i\}_{i=2}^{m}$, $\{b_i\}_{i=1}^{m}$ - отличные от нуля элементы неособенной матрицы А /1/, и $a_1=a_{m+1}=0$, $b_0=b_{m+1}=1$ единственным образом определяют неособенную матрицу

$$B_{ij} = \mathrm{const} \cdot \begin{cases} V_i W_j, & i \le j \\ W_i V_j, & i \ge j, \end{cases} \qquad /27/$$

где $\mathrm{const} = \beta_0^{-1} = \alpha_{m+1}^{-1}$. При этом справедливы равенства

$$\alpha_{i+1} \cdot \beta_i - \gamma_{i+1} \cdot \alpha_i \beta_{i+1} = \mathrm{const}^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \qquad /28/$$

<u>Доказательство</u> теоремы проведем с использованием результатов теоремы 2, а также проверки равенства $B \cdot A = E$, при $B_{ij} = B_{ji}$.

$$B_{ij-1} \cdot a_j + B_{ij} \cdot b_j + B_{ij+1} \cdot a_{j+1} = 0, \quad i > j,$$

$$B_{ii-1} \cdot a_i + B_{ii} \cdot b_i + B_{ii+1} \cdot a_{i+1} = 1, \quad i = j, \qquad /29/$$

$$B_{ij+1} \cdot a_{j+1} + B_{ij} \cdot b_j + B_{ij-1} \cdot a_j = 0, \quad i < j.$$

Например, проверим справедливость m средних равенств в /29/, воспользовавшись равенствами $B_{ii-1} = B_{i-1i}$ и $B_{ii+1} = B_{i+1i}$.

$$\alpha \cdot (B_{i-1i} \cdot a_i + B_{ii} b_i + B_{i+1i} \cdot a_{i+1}) =$$

$$= \alpha \cdot (V_{i-1} \cdot W_i \cdot a_i + V_i W_i b_i + W_{i+1} V_i a_{i+1}) =$$

$$= \alpha [(-1)^i \frac{b_1}{b_{i-1}} \prod_{k=2}^{i-1} \frac{b_k}{a_k} \alpha_{i-1} \cdot (-1)^{m-i} \cdot \prod_{k=i+1}^{m} \frac{b_k}{a_k} \cdot \beta_i a_i +$$

$$+ (-1)^{i+1} \frac{b_1}{b_i} \prod_{k=2}^{i} \frac{b_k}{a_k} \cdot \alpha_i \cdot (-1)^{m-i} \prod_{k=i+1}^{m} \frac{b_k}{a_k} \cdot \beta_i \cdot b_i +$$

$$+ (-1)^{m-i+1} \prod_{k=i+2}^{m} \frac{b_k}{a_k} \cdot \beta_{i+1} \cdot (-1)^{i+1} \frac{b_1}{b_i} \prod_{k=2}^{i} \frac{b_k}{a_k} \cdot \alpha_i \cdot a_{i+1}] =$$

$$= \alpha \cdot (-1)^m \cdot b_1 \cdot \prod_{k=2}^{m} \frac{b_k}{a_k} \cdot (\frac{a_i^2}{b_{i-1} b_i} \beta_i \alpha_{i-1} -$$

$$- \alpha_i \beta_i + \frac{a_{i+1}^2}{b_i b_{i+1}} \alpha_i \beta_{i+1}).$$

Эта система равенств, дополненная равенствами

$$\alpha_{m+1} = \alpha_m - \gamma_m \alpha_{m-1}, \quad \beta_0 = \beta_1 - \gamma_2 \beta_2,$$

приводит в итоге к выражениям*

$$\mathrm{const} = \alpha = (-1)^{-(m+1)} \cdot b_1^{-1} \cdot (\prod_{k=2}^{m} \frac{b_k}{a_k})^{-1} \cdot (\beta_0^{-1} \equiv \alpha_{m+1}^{-1}). \qquad /30/$$

$$\alpha_{i+1} \cdot \beta_i - \gamma_{i+1} \cdot \alpha_i \cdot \beta_{i+1} = \mathrm{const}^{-1}, \quad i = 1, \dots, m, \qquad /30'/$$

И, наконец, в довершение доказательства теоремы 3 покажем ограниченность членов последовательностей $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ /25/, что будет означать фактически ограниченность последовательностей V и W /26/ при конечных значениях $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ исходной матрицы. Итак, справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 4</u>. Для последовательностей $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ и $\{\beta_i\}_{i=1}^m$ /25/ имеют место следующие ограничения:

$$(1 + m \cdot \max |\gamma_i|)^{-1} \le \max_i |\beta_i| \le \max_i \prod_{k=i+1}^{m} |\frac{a_k}{b_k}| \cdot \max_i |\frac{B_{i1}}{B_{m1}}|,$$

$$(1 + m \cdot \max_i |\gamma_i|)^{-1} \le \max_i |\alpha_i| \le \max_i (|\frac{b_i}{b_1}| \cdot \prod_{k=2}^{i} |\frac{a_k}{b_k}|) \cdot \max |\frac{B_{im}}{B_{1m}}|. \qquad /31/$$

<u>Доказательство</u>. Начнем с того, что снова отметим $B_{m1} = B_{1m} \ne 0$ в силу симметрии A^{-1}. Из /27/ и /26/ следует, что первый и последний столбцы обратной матрицы $B = A^{-1}$ имеют вид

$$B_{i1} = \mathrm{const} \cdot b_1^{-1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot \prod_{k=2}^{i} \frac{a_k}{b_k} \cdot \beta_i,$$

$$B_{im} = \mathrm{const} \cdot b_i^{-1} \cdot (-1)^{m+1} \cdot \prod_{k=i+1}^{m} \frac{a_k}{b_k} \cdot \alpha_i, \qquad /32/$$

а также

$$\mathrm{const} = b_1 \cdot (-1)^{m+1} \cdot \prod_{k=2}^{m} \frac{b_k}{a_k} \cdot (B_{m1} \equiv B_{1m}). \qquad /32'/$$

Подставив /32'/ в /32/, а также выразив β_i и α_i через B_{i1} и B_{im} и воспользовавшись свойством модуля произведения, получаем оценки сверху в /31/. Для оценок снизу покажем, что справедлива следующая лемма.

<u>Лемма 4</u>. Для членов последовательностей $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$, определенных выражениями /25/, справедливы представления

---

*Подробные выкладки не приводятся.

$$\alpha_{i+1} = 1 - \sum_{k=1}^{i} \gamma_k \alpha_{k-1}, \quad \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1, \quad \gamma_1 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

/33/

$$\beta_{j-1} = 1 - \sum_{k=j}^{m} \gamma_{k+1} \beta_{k+1}, \quad \beta_{m+1} = \beta_m = \beta_{m-1} = 1, \quad \gamma_{m+1} = 0, \quad j = m, \dots, 1.$$

Доказательство этой леммы естественным образом следует из /25/. На самом деле, запишем рекурсии для $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_j\}$ в виде

$$\alpha_{i+1} - \alpha_1 = -\sum_{k=1}^{i} \gamma_k \alpha_{k-1}, \qquad \beta_{j-1} - \beta_m = -\sum_{k=j}^{m} \gamma_k \beta_k,$$

где выполнили суммирование в /25/. После чего, учитывая указанные выше граничные условия, получаем /33/. Лемма доказана. Используя результат этой леммы, легко получаем нижнюю грань в неравенствах /31/, воспользовавшись свойством модуля суммы

$$1 = |\alpha_{i+1} + \sum_{k=1}^{i} \gamma_k \alpha_{k-1}| \le |\alpha_{i+1}| + \sum_{k=1}^{i} |\gamma_k| \cdot |\alpha_{k-1}| \le$$

$$\le \max_i |\alpha_{i+1}| + \max_i |\gamma_i| \cdot \max_i (i \cdot |\alpha_i|) \le$$

$$< \max_i |\alpha_i| \cdot (1 + m \cdot \max |\gamma_i|).$$

Откуда получаем, что $\max_i |\alpha_i| \ge (1 + m \cdot \max_i |\gamma_i|)^{-1}$. Аналогично доказывается нижняя оценка для $|\beta_i|$. Итак, справедливость неравенств /31/ установлена. Если учесть, что все величины, входящие в определение границ /31/, не зависят от α_i и β_i и конечны, то тем самым ограниченность последовательностей $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ установлена и теорема 4 доказана. Вместе с тем мы фактически закончили также доказательство теоремы 3. При расчетах на ЭВМ следует осуществлять контроль за способом перемножения $V_i \cdot W_j$ с целью сохранения максимальной точности при ограниченной разрядной сетке данной ЭВМ. Это связано, как видим, с $\prod_k(\cdot)$ произведениями. Однако в дальнейшем будет дана простая процедура вычислений на ЭВМ A^{-1}, с учетом теоремы 3 и свободная от указанных ограничений. Итак, мы имеем теперь все необходимое, чтобы завершить доказательство теоремы 1. Действительно, пусть заранее известны первый B_{i1} и последний B_{im} столбцы $A^{-1} = B$. Тогда по /32'/ можно вычислить const. Затем, учитывая, что const $\ne 0$ для неособенной матрицы A, из /32/ находим $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ через B_{i1} и B_{im}. После чего, воспользовавшись этими $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$, можем по /26/ найти $\{V_i\}$ и $\{W_j\}$. Если, наконец, по известным теперь

α_m и α_{m-1}, а также β_1, β_2 найти $\alpha_{m+1} = \alpha_m - \frac{a_m^2}{b_{m-1} b_m} \alpha_{m-1}$, $\beta_0 = \beta_1 - \frac{a_2^2}{b_1 b_2} \beta_2$, то получим $A^{-1} = B$ по /27/. Следовательно, мы показали, что любой элемент B_{ij} обратной матрицы $B = A^{-1}$ может быть выражен через первый и последний столбцы B_{i1} и B_{im} матрицы B, если они известны. Если же они не известны, то получили метод /26/, /27/, /33/, $|\gamma_i| \le 1$ устойчивого вычисления A^{-1}.

При этом следует помнить, что при вычислении произведений $\{\prod_{k=2}^{i} \frac{b_k}{a_k}\}$ и $\{\prod_{k=2}^{j} \frac{a_k}{b_k}\}$ в /26/ на ЭВМ могут быть неприятности /потеря точности/ из-за конечности разрядной сетки ЭВМ и конкретного вида $\{\frac{a_k}{b_k}\}$ и $\{\frac{b_k}{a_k}\}$. Этого легко можно избежать, заботясь, как отмечали выше, о правильном перемножении произведений $\prod_{k=2}^{i} \frac{b_k}{a_k} \cdot \prod_{k=2}^{j} \frac{a_k}{b_k}$. Проще же всего воспользоваться более простыми рекурсиями, следующими из /26/. Но об этом в следующей работе. Полученный метод устойчив, как видим, при условиях $\max_i |\gamma_i| \le 1$.

3. СВОЙСТВА МАТРИЦЫ, ОБРАТНОЙ К НЕОСОБЕННОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТРЕХДИАГОНАЛЬНОЙ

В настоящем разделе мы распространим обнаруженные выше свойства симметрических матриц на общий случай. Итак, пусть задана система линейных уравнений

$$C \cdot X = Y, \quad C = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & & p_m & q_m \end{bmatrix} \qquad /34/$$

где $\{q_i\}_{i=1}^{m}$, $\{p_i\}_{i=2}^{m}$, $\{r_j\}_{j=2}^{m}$ – в общем случае, различные последовательности отличных от нуля действительных чисел.

Лемма 5. Если C /34/ – неособенная несимметрическая трехдиагональная матрица с отличными от нуля элементами, то она легко может быть симметризована* с помощью диагонального преобразования

*Лемма приводится с целью полноты изложения.

$$\tilde{A} = D \cdot C = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 & \tilde{a}_2 & & & \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 & a_3 & & \\ - & - & - & - & - \\ & & \tilde{a}_{m-1} & \tilde{b}_{m-1} & \tilde{a}_m \\ & & & \tilde{a}_m & \tilde{b}_m \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \phi_1 & & & \\ & \phi_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \phi_m \end{bmatrix}, \qquad /35/$$

где

$$\{\tilde{b}_i = \phi_i q_i\}_{i=1}^{m}, \quad \{\tilde{a}_{i+1} = \phi_i r_{i+1}\}_{i=1}^{m},$$

$$\{\phi_i = \prod_{k=1}^{i} \frac{r_k}{p_k}\}, \quad \phi_1 = \frac{r_1}{p_1} = \frac{1}{1} = 1, \quad r_{m+1} = 1. \qquad /36/$$

Доказательство леммы 5 не вызывает затруднений. Оно связано с формальной подстановкой /36/ в /35/ и проверкой равенства $D^{-1} \cdot \tilde{A} = C$. Мы не будем этим здесь заниматься. Справедлива

Теорема 5. Для элементов матрицы $B = C^{-1}$, обратной к неособенной несимметрической трехдиагональной матрице C /34/ с отличными от нуля элементами, справедливо представление

$$B_{ij} = \text{const} \cdot \begin{cases} \tilde{V}_i \cdot (\tilde{W}_j \cdot \phi_j), & i \le j, \\ \tilde{W}_i \cdot (\tilde{V}_j \cdot \phi_j), & j \le i, \end{cases} \qquad /37/$$

где

$$\tilde{V}_i = (-1)^{i+1} \cdot q_i^{-1} \cdot \prod_{k=2}^{i} \frac{q_k}{r_k} \cdot \tilde{\alpha}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\tilde{W}_j = (-1)^{j+1} \cdot \prod_{k=2}^{j} \frac{p_k}{q_k} \cdot \tilde{\beta}_j, \quad j = m, m-1, \dots, 1, \qquad /38/$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{i+1} &= \tilde{\alpha}_i - \tilde{\gamma}_i \cdot \tilde{\alpha}_{i-1} \\ \tilde{\beta}_{j-1} &= \tilde{\beta}_j - \tilde{\gamma}_{j+1} \cdot \tilde{\beta}_{j+1} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{i+1} &= 1 - \sum_{k=1}^{i} \tilde{\gamma}_k \tilde{\alpha}_{k-1}, \quad i = 1, \dots, m, \\ \tilde{\beta}_{j-1} &= 1 - \sum_{k=j}^{m} \tilde{\gamma}_{k+1} \cdot \tilde{\beta}_{k+1}, \quad j = m, \dots, 1, \end{aligned}\right. \qquad /39/$$

$$\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 1; \quad \tilde{\beta}_{m+1} = \tilde{\beta}_m = \tilde{\beta}_{m-1} = 1; \quad \tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_{m+1} = 0;$$

$$\text{const} = (\tilde{\alpha}_{m+1}^{-1} = \tilde{\beta}_0^{-1}), \quad \tilde{\gamma}_k = \frac{p_k r_k}{q_{k-1} q_k}, \quad \phi_k = \prod_{\ell=2}^{k} \frac{r_\ell}{p_\ell}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \qquad /40/$$

при этом

$$\text{const} \cdot (\tilde{\beta}_i \tilde{\alpha}_{i+1} - \tilde{\gamma}_{i+1} \cdot \tilde{\alpha}_i \cdot \tilde{\beta}_{i+1}) = 1, \quad i = 1, \dots, m, \qquad /41/$$

Доказательство теоремы 5 основано на использовании полученных выше результатов для симметрической матрицы A /1/, а также лемме 5. Потому мы не будем здесь подробно на нем останавливаться. Отметим только, что из теоремы 5 естественно следуют результаты предыдущих теорем.

Следствие из теоремы 5. Нетрудно видеть, что множители $(\tilde{W}_j \cdot \phi_j)$ и $(\tilde{V}_j \cdot \phi_j)$ в /37/ можно представить в виде

$$\tilde{\tilde{V}}_j = \phi_j \cdot \tilde{V}_j = (-1)^{j+1} \cdot q_j^{-1} \cdot \prod_{k=2}^{j} \frac{q_k}{p_k} \cdot \tilde{\alpha}_j;$$

$$\tilde{\tilde{W}}_j = \tilde{W}_j \cdot \phi_j = (-1)^{j+1} \cdot \prod_{k=2}^{j} \frac{r_k}{q_k} \cdot \tilde{\beta}_j; \quad j = 1, \dots, m, \qquad /41/$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной целью настоящей работы, как уже отмечали выше, было доказательство ряда теорем, на основе которых оказалось возможным вскрыть новые свойства матрицы /операторов/, обратных к неособенным трехдиагональным. Кроме того, мы наметили основные направления и разработали технический аппарат обобщения полученных результатов. Следующая статья в этой серии будет посвящена выводу простых /без рекурсивного деления/ формул для вычисления A^{-1} на ЭВМ, а также решению систем уравнений $A \cdot X = Y$ с трехдиагональными неособенными матрицами.

Автор искренне признателен члену-корреспонденту АН СССР профессору Н.Н.Говоруну, а также профессору Е.П.Жидкову и профессору И.Н.Силину за творческий интерес к исследуемой проблеме и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухбергер Б., Емельяненко Г.А. ЖВМ и МФ, 1973, т.13, №3; ОИЯИ, Р11-5686, Дубна, 1971.
2. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, Р11-693, Дубна, 1973.
3. Emelyanenko G.A. JINR, E11-83-71, Dubna, 1983.

4. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. "Наука", М., 1978.
5. Емельяненко Г.А. Автореферат диссертации. ОИЯИ, 11-6076, Дубна, 1971.
6. Будагов Ю.А. и др. ОИЯИ, Р10-9950, Дубна, 1976.
7. Sameh A.H., Kuck D.J. IEEE Trans.Compet., 1977, 26, No.2, p.147.
8. Allgower E.L. Numer Math., 1973, 21, p.279.
9. Кучеров А.Б. В сб.: Разностные методы математической физики. /Под ред. Е.Николаева/. Изд-во МГУ, М., 1984.
10. Капорин И.Е. В сб.: Численные методы линейной алгебры. /Под ред. Е.Николаева/. Изд-во МГУ, М., 1982.
11. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. "Наука", М., 1977.
12. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение. /Пер. с англ. О.Б.Арушаняна под ред. В.В.Воеводина/. "Мир", М., 1984.
13. Джордж А., Лю Дж. Численные решения больших разреженных систем уравнений. /Пер. с англ. Х.Д.Икрамова/. "Мир", М., 1984.
14. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некоторых задач. "Наука", М., 1979.
15. Гребенников А.И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. Изд-во МГУ, М., 1983.
16. Buchberger B. et al. Ed. Computer Algebra Symbolic and Algebraic Computation. Wein, 1982.
17. Азаров В.Л., Лупичев Л.Н., Тавризов Г.А. Математические методы исследования сложных физических систем. "Наука", М., 1975.
18. Беллман Р. Введение в теорию матриц. "Наука", М., 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 апреля 1985 года.

Емельяненко Г.А. Р11-85-304

О свойствах систем линейных уравнений с неособенными трехдиагональными, ленточными и квазитрехдиагональными матрицами.
Свойства матриц, обратных к трехдиагональным

Изложены основы нетрадиционного подхода к исследованию свойств матриц, обратных к неособенным трехдиагональным, ленточным и квазитрехдиагональным. Доказывается ряд теорем о новых свойствах матриц, обратных к трехдиагональным.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод Н.С.Панковой

Emelyanenko G.A. P11-85-304

On the Properties of Systems of Linear Equations with Non-Singular Tridiagonal, Band and Quasitridiagonal Matrices.
The Properties of Inverse Matrices to Tridiagonal Ones

In the present article the principles of non-traditional approach to the investigation of the properties of inverse matrices to non-singular tridiagonal, band and quasi-tridiagonal ones is given. A series of theorems about new properties of inverse matrices to tridiagonal ones is proved.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985