

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-85-219

Г.Х.Саркисян*, С.Г.Нерсисян*,
С.М.Мхитарян*, Л.А.Смирнова

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ
АНИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА

* Ереванский политехнический институт

Как известно, при исследовании распределения температуры в анизотропном цилиндре конечной длины получается эллиптическое дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных

$$\lambda_x \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + \frac{q_v}{T_r - T_0} = 0$$

со следующими граничными условиями:

$$-\lambda_z \frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{z=4} = a_r \Theta; \quad \lambda_z \frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{z=-L} = a_x \Theta; \quad -\lambda_r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{r=R} = a \Theta,$$

где $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ - коэффициенты теплопроводности по направлению шихтовки пакета /ось Ox /; вдоль и поперек прокатки /оси Oz и Oy /; q_v - удельное тепловыделение в единичном объеме; $\Theta = \frac{T - T_0}{T_r - T_0}$ - безразмерная температура магнитопровода; T, T_0, T_r - соответствующие температуры стержня магнитопровода, средне-объемная температура жидкости в гидравлически замкнутой системе охлаждения и температура масла в верхних слоях; a, a_r, a_x - коэффициенты теплоотдачи на боковой поверхности, на верхнем и нижнем основании цилиндра; λ_r - коэффициент теплопроводности по направлению произвольного радиуса цилиндра; R - радиус цилиндра /стержня магнитопровода/; r - радиус произвольной точки; H - высота цилиндра, $L = H/2$.

Решение нелинейной задачи берется как сумма частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения. Сперва определяется частное решение неоднородного уравнения по формулам

$$\Theta_2 = A \bar{z}^2 + B \bar{z} + C, \quad \bar{z} = z/L,$$

где

$$A = \frac{q_v L^2}{2\lambda_z \theta_r}; \quad \theta_r = T_r - T_0,$$

$$B = -\frac{2A(B_{ix} - B_{ir})}{B_{ix} + B_{ir} + 2B_{ir} \cdot B_{ix}}; \quad C = -A \frac{2B_{ir} \cdot B_{ix} + 3(B_{ir} + B_{ix}) + 4}{B_{ix} + B_{ir} + 2B_{ir} \cdot B_{ix}},$$

$B_{ix} = \frac{\alpha_x L}{\lambda_z}$; $B_{ir} = \frac{\alpha_r L}{\lambda_z}$ - критерий Био /нижнего и верхнего основания цилиндра/.

Далее для решения соответствующей однородной задачи определяются собственные числа $\bar{\mu}_n$, которые являются корнями уравнения

$$\operatorname{ctg}(2\bar{\mu}_n) = \frac{\bar{\mu}_n^2 - B_{ir} \cdot B_{ix}}{\bar{\mu}_n (B_{ir} + B_{ix})}.$$

Так же определяются собственные функции $Cl_{2m}(\xi)$, $Cl_{2m}(\eta)$, которые являются функциями Матье.

Дифференциальное уравнение Матье имеет вид

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (a - 2q \cos 2z) y = 0, \quad /1/$$

Эта форма называется канонической формой уравнения Матье. Иногда бывает удобно заменить $+q$ на k^2 . Параметры a , q предполагаются действительными, если не оговорено противное. Решение /1/ выражается в различных формах, в зависимости от значений a и q .

Существуют четыре типа периодических решений /1/, соответствующих собственным значениям:

$$Cl_{2n}(z, q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} \cos 2rz, \quad /2/$$

/период π соответствует a_{2r} /

$$Cl_{2n+1}(z, q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)} \cos (2r+1)z, \quad /3/$$

/период 2π соответствует a_{2r+1} /

$$Sl_{2n+1}(z, q) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} \sin (2r+1)z, \quad /4/$$

/период 2π соответствует b_{2r+1} /

$$Sl_{2n+2}(z, q) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)} \sin (2r+2)z, \quad /5/$$

/период π соответствует b_{2r+2} /,

где a_m , b_m - есть собственные числа.

Из этих функций в качестве решения уравнения /1/ выбирается функция $Cl_{2m}(z, q)$, так как она удовлетворяет условию периодичности задачи /с периодом π /, т.е. является четной функцией относительно η в точке $\xi = 0$: $V(0; -\eta) = V(0; \eta)$ и имеет нечетную

производную по ξ при $\xi \rightarrow 0$;

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [V(\xi; \eta)]_{\xi \rightarrow 0} = -\frac{\partial}{\partial \xi} [V(\xi; -\eta)]_{\xi \rightarrow 0},$$

которая физически соответствует непрерывности температурного поля вдоль оси $\xi = 0$.

Перейдем к вопросу определения собственных значений и соответствующих им коэффициентов.

Если в уравнение /1/ подставить ряд /2/ и коэффициенты при $\cos 2rx$ приравнять нулю, то получатся следующие рекуррентные соотношения для $r = 0, 1, 2 \dots$:

$$\begin{cases} aA_0 - qA_2 = 0, \\ (a-4)A_2 - q(A_4 + 2A_0) = 0, \\ (a-4r^2)A_{2r} - q(A_{2r+2} + A_{2r-2}) = 0, \end{cases} \quad /6/$$

где для простоты мы опустили верхние индексы.

Вводя обозначения $v_0 = A_2/A_0$; $v_2 = A_4/A_2$ и подставляя в рекуррентные соотношения, имеем:

$$-v_{2r-2} = (q/4r^2) / [1 - (1/4r^2)(a - qv_{2r})]. \quad /7/$$

Подставив r^2 вместо r и умножив обе части уравнения на $q/4r^2$, имеем:

$$\begin{aligned} -\frac{qv_{2r}}{4r^2} &= [q^2/16r^2(r+1)^2] / [1 - \frac{1}{4(r+1)^2}(a - qv_{2r+2})] = \\ &= \frac{q^2/16r^2(r+1)^2}{1 - a/4(r+1)^2} - \frac{q^2/16(r+1)^2(r+2)}{1 - a/4(r+2)^2} - \dots = E_{2r}. \end{aligned} \quad /8/$$

Если $a = a_{2n}$ есть собственное значение функции $Cl_{2n}(z, q)$, то ни один из знаменателей дроби не обращается в нуль, и непрерывная дробь сходится, так как при $r \rightarrow \infty$ знаменатель общего члена дроби стремится к единице, а числитель - к нулю. Таким же образом, подставляя $r-1$ вместо r , получим соответствующую формулу для $-qv_{2r-2}/4(r-1)^2$. Вводя это выражение в правую часть равенства /8/

$$-\frac{qv_{2r}}{4r^2} = 1 - \frac{a}{4r^2} + \frac{q/4r^2}{v_{2r-2}} = 1 - \frac{a}{4r^2} + \frac{q^2/16r^2(r-1)^2}{qv_{2r-2}/4(r-1)^2}, \quad (r \geq 2), \quad /9/$$

находим конечную непрерывную дробь

$$\frac{q^v_{2r}}{4r^2} = 1 - \frac{a}{4r^2} - \frac{q^2/16r^2(r-1)^2}{1 - a/4(r-1)^2} - \frac{q^2/16(r-1)^2(r-2)^2}{1 - a/4(r-1)^2 - \dots} + \frac{q^2/64}{q^v_{2r}/4}$$

Перепишем предыдущее выражение в виде

$$-\frac{q^v_{2r}}{4r^2} = 1 - \frac{a}{4r^2} - F_{2r} \quad /10/$$

Используя соотношение $v_0 = a/q, F_{2r}$ примет вид:

$$F_{2r} = \frac{q^2/16r^2(r-1)^2}{1 - a/4(r-1)^2} - \frac{q^2/16(r-1)^2(r-2)^2}{1 - a/4(r-2)^2 - \dots} - \frac{q^2/64}{1 - a/4 + q^2/2a}$$

Для совместности рекуррентных соотношений /8/ необходимо, чтобы выполнялось равенство $E_{2r} = 1 - a/4r^2 = F_{2r}$. Собственные числа a_{2r} определяются как решения данного уравнения. Определяя собственные числа a_{2n} с помощью рекуррентных соотношений /8/, находим коэффициенты разложения функций Матье в ряд по $\cos 2rx$. Так как выражения E_{2r} и F_{2r} содержат цепные дроби, то при вычислениях a_{2r} для $r \geq 4$ мы сталкиваемся с явлением численной неустойчивости. Это связано с сужением области устойчивости при больших $r^{1/2}$.

Составлена и реализована на ЭВМ ЕС-1022 и ЕС-1045 программа на языке фортран для нахождения собственных значений и коэффициентов разложения в ряд с точностью порядка 10^{-8} . Блок-схема программы приведена на рис. 1.

Для больших $r(r \geq 4)$ удобно вычислить значение функций $Cl_{2r}(z, q)$ с помощью таблиц /27/, однако эти таблицы составлены для значений q , не превосходящих 25. При больших q существуют асимптотические формулы для вычисления коэффициентов разложения в ряд. Для q , ненамного превосходящих 25, и при $r < 4$ удобно пользоваться вышеописанной схемой вычисления.

Для обычных и модифицированных функций Матье /модифицированные функции Матье получаются из обычных при замене переменной z на iz /, кроме формул /2/-/5/, существуют формулы для вычисления значений функций Матье с использованием функций Бесселя:

$$Cl_{2n}(z, q) = (P_{2n}/A_0^{(2n)}) \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} J_r(v'_1) J_r(v'_2),$$

где $v'_1 = kl^{iz}$; $v'_2 = kl^{-iz}$; $q = k^2$, $P_{2n} = Cl_{2n}(0, q) \cdot Cl_{2n}(\pi/2, q)/A_0^{(2n)}$.

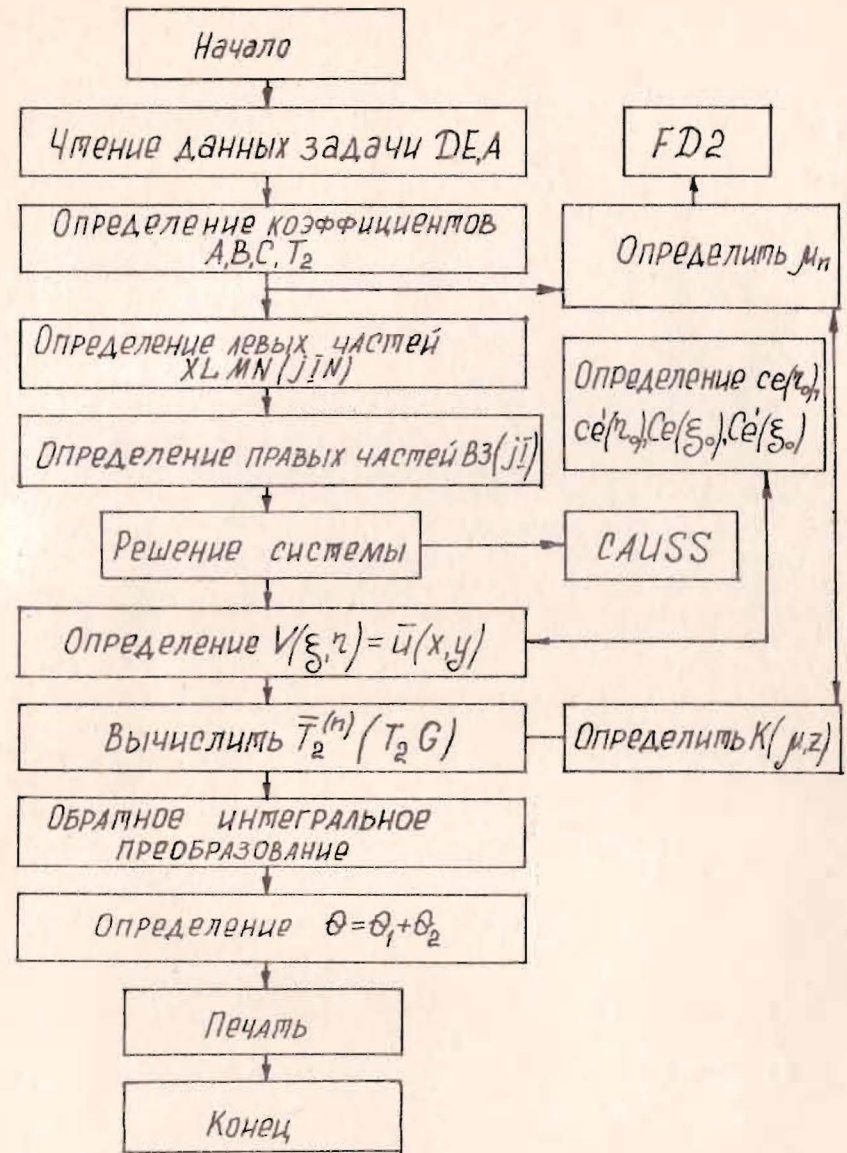


Рис. 1

В отличие от первого метода, где коэффициенты разложения в ряд $A_{2r}^{(2n)}$ находились для данного q , в этом случае мы имеем таблично заданные коэффициенты лишь для некоторых q . В связи с этим возникает вопрос интерполирования коэффициентов $A_{2r}^{(2n)}$. Для определения коэффициентов разложения применим интерполя-

ционный многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов интерполирования $L_n(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \prod_{i \neq j} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$.

При вычислении значений функций Матье с помощью рядов Бесселя исследовались интерполяционные многочлены до 10-го порядка.

При вычислении функций Матье с помощью рядов по функциям Бесселя для $r \geq 4$ графики функций $C\ell_{2r}(z, q)$ не приближаются к истинным значениям. А для $r = 1, 2, 3$ получались истинные значения функций даже при линейной интерполяции.

При вычислении функций Матье непосредственно по формуле $C\ell_{2r}(z, q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r} \cos 2rz$ получают точные значения для $1 \leq r \leq 7$ уже при 5-м порядке интерполирования. Этот же порядок интерполирования применялся при всех вычислениях.

Все сказанное остается в силе также для модифицированных функций Матье. Для вычисления функций Матье по формулам, содержащим ряды по функциям Бесселя, были составлены три подпрограммы для вычисления функций Бесселя /для действительного, чисто мнимого и комплексного аргумента/. Составлена также программа для ввода исходных данных на внешнее устройство для последующего использования. Имея исходные значения коэффициентов разложения, можно вычислить значения функций Матье для данного значения параметра q .

Коэффициенты разложения в ряд $A_{2r}^{(2n)}$, связаны с коэффициентами $D\ell_{2r}^{(2n)}$ следующим образом: $A_{2r}^{(2n)} = A_{2r}^{(q)} D\ell_{2r}^{(2n)}$.

После определения собственных чисел и собственных функций $C\ell_{2m}(\xi)$; $C\ell_{2m}(\eta)$ находим решение алгебраического уравнения, которое является коэффициентом разложения в ряд по собственным функциями $C\ell_{2m}(\xi)$; $C\ell_{2m}(\eta)$ на границе ξ_0 для функции $V(\xi; \eta)^{1/2}$.

$$V(\xi_0; \eta) = \sum_{m=1}^N X_m^N C\ell_{2m}(\xi) C\ell_{2m}(\eta).$$

Имея коэффициенты разложения по собственным функциям на границе, можно найти значение $V(x, y)$ в произвольной точке (ξ, η) , что соответствует значению $\bar{U}(x, y)$.

Вычисляя ядро конечного интегрального преобразования, получим $U(x, y)$ для произвольной точки цилиндра.

Складывая с частным решением, получим решение уравнения в произвольной точке (x, y, z) конечного цилиндра.

Подпрограмма FD2 решает трансцендентное уравнение, для которого выбирается интервал таким образом, чтобы можно было применить метод половинного деления ^{1/1}.

Выход из подпрограммы осуществляется или при достижении машинного нуля или же при достижении допустимой точности, которая задается пользователем. Подпрограмма GAUSS решает систему линейных алгебраических уравнений с помощью метода Гаусса. Блок F

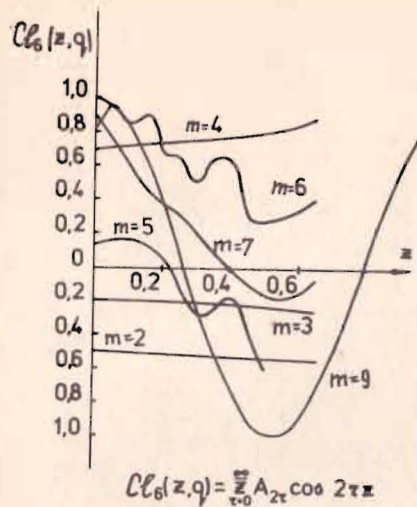


Рис. 2

соответствует обратному интегральному преобразованию по формуле:

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^N \bar{U}(x, y) K(\bar{\mu}_n, \bar{z}).$$

Переменная m является порядком интерполирования, т.е. показывает число точек, с помощью которых вычисляется /интерполируется/ значение коэффициентов при данном q .

Как видно из рис. 2, с увеличением порядка интерполирования графики функций $C\ell_6(z, q)$ приближаются к истинному значению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мак Лаклан Н.В. Теория и приложения функций Матье. ИЛ, М., 1953.
2. Таблицы для вычислений функций Матье. Выч.центр АН СССР, М., 1967, вып. 42.

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ, включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

ИНДЕКС	ТЕМАТИКА	Цена подписки на год
1.	Экспериментальная физика высоких энергий	10 р. 80 коп.
2.	Теоретическая физика высоких энергий	17 р. 80 коп.
3.	Экспериментальная нейтронная физика	4 р. 80 коп.
4.	Теоретическая физика низких энергий	8 р. 80 коп.
5.	Математика	4 р. 80 коп.
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия	4 р. 80 коп.
7.	Физика тяжелых ионов	2 р. 85 коп.
8.	Криогеника	2 р. 85 коп.
9.	Ускорители	7 р. 80 коп.
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных	7 р. 80 коп.
11.	Вычислительная математика и техника	6 р. 80 коп.
12.	Химия	1 р. 70 коп.
13.	Техника физического эксперимента	8 р. 80 коп.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей* ядерными методами	1 р. 70 коп.
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях	1 р. 50 коп.
16.	Дозиметрия и физика защиты	1 р. 90 коп.
17.	Теория конденсированного состояния	6 р. 80 коп.
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники	2 р. 35 коп.
19.	Биофизика	1 р. 20 коп.

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79.

Саркисян Г.Х. и др.
Численный расчет температурного поля
анизотропного цилиндра

P11-85-219

Приводятся результаты численных расчетов температурного поля анизотропного цилиндра. Даются методические указания по способам вычисления обычных и модифицированных функций Матье. Рассматриваются также функции Матье, которые определяются как произведение быстро сходящихся рядов Бесселя. Результаты счета представлены в виде графиков зависимости температуры от радиуса, высоты, а также от азимута. Составлена программа, которая реализована на ЭВМ CDC-6500, EC-1022, EC-1045.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Sarkisian G.Kh. et al.
Numerical Calculation of Temperature Field
of Anisotropic Cylinder

P11-85-219

The results of numerical calculations of anisotropic cylinder temperature field are presented. Some methodic advices for calculating the common and modified Mathieu functions are given. The Mathieu functions are also considered, which are determined as a product of fast convergent Bessel series. The calculation results are presented as graphs of the temperature dependence on radius, vertical and azimuthal coordinates.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985