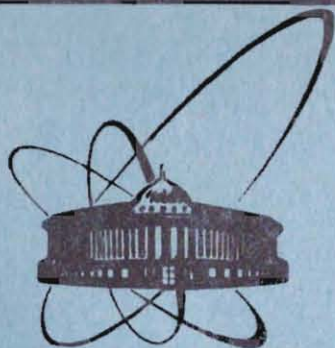


84-832



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P11-84-832

М.С.Касчиев, В.А.Касчиева, В.Г.Маханьков,  
Т.П.Пузынина, И.В.Пузынин, А.Т.Филиппов

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ  
И ТОЧЕК БИФУРКАЦИИ  
СВЯЗАННЫХ СТАТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ  
ФЛЮКСОНОВ В КРУГОВОМ  
ДЖОЗЕФСОНОВСКОМ ПЕРЕХОДЕ  
С МИКРОНЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Направлено в "Journal of Computational Physics"

1984

## 1. Введение

В работе рассматривается статическая математическая модель джозефсоновского перехода в форме круга радиуса  $R$  с кольцевой микро-неоднородностью

$$j = [1 - \mu \delta(r - r_0)] \sin \varphi(r, \theta), \quad 0 < r_0 < R. \quad (1.1)$$

Здесь  $j$  - джозефсоновский ток,  $\varphi$  - распределение разности фаз волновых функций сверхпроводящих электронов в верхнем и нижнем сверхпроводниках перехода, определяемое уравнением

$$\Delta \varphi = j; \quad (1.2)$$

$\delta(r - r_0)$  - дельта-функция Дирака. За единицу длины принята джозефсоновская глубина проникновения  $\lambda_J$ .

Исследуется радиально-симметричный случай, для которого уравнение (1.2) имеет вид

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \varphi(r) - [1 - \mu \delta(r - r_0)] \sin \varphi(r) = 0. \quad (1.3)$$

Граничные условия

$$\left. \frac{d}{dr} \varphi(r) \right|_{\substack{r=0 \\ r=R}} = 0 \quad (1.4)$$

отвечают требованию регулярности магнитного поля в точке  $r=0$  и отсутствия магнитного поля на границе круга.

Граничную задачу (1.3)-(1.4) можно получить из условия обращения в нуль первой вариации функционала энергии  $\delta \mathcal{E}[\varphi] = 0$ , где

$$\mathcal{E}[\varphi] = 2\pi \int_0^R r dr \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dr} \varphi(r) \right)^2 + (1 - \mu \delta(r - r_0)) (1 - \cos \varphi(r)) \right]. \quad (1.5)$$

Первое слагаемое в выражении (1.5) пропорционально энергии магнитного поля в переходе, а второе - энергии джозефсоновских токов.

Состояния  $\varphi(r)$ , определенные из условия  $\delta \mathcal{E}[\varphi] = 0$ , устойчивы относительно малых флуктуаций, если  $\delta^2 \mathcal{E}[\varphi] > 0$ . Последнее условие сводится к требованию положительности собственных значений

$\lambda$  в линейной граничной задаче



$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} + \lambda - [1 - \mu \delta(z - z_0)] \cos \varphi(z) \right\} \eta(z) = 0, \quad (I.6)$$

$$\left. \frac{d}{dz} \eta(z) \right|_{z=R} = 0. \quad (I.7)$$

В работах [1-3] исследованы условия локализации флюксонов на микро неоднородностях одномерного джозефсоновского перехода. Показано, что структура микро неоднородностей должна обеспечивать локальное уменьшение джозефсоновского тока, и предложено описание микро неоднородностей с помощью  $\delta$ -функции. Для джозефсоновских переходов ограниченных размеров найдены значения внешних параметров модели ( $\mu$ , значения магнитного поля на концах перехода), в окрестностях которых число статических состояний меняется скачком, что соответствует обращению в нуль одного из собственных значений соответствующей линейной граничной задачи. Такие точки параметрического пространства называются точками бифуркации решения.

Для приложений наиболее интересны устойчивые состояния и точки (поверхности) бифуркаций, в которых при медленном изменении параметров система может скачком перебрасываться из одного устойчивого состояния в другое или же переходить в нестационарный режим. Знание точек бифуркации необходимо и для расчета статических решений. По известным точкам бифуркации и соответствующим им состояниям можно легко находить решения вне точек бифуркации с помощью простой бифуркационной теории возмущений [3].

В случае двумерной проблемы (I.3)-(I.4) мы ставим перед собой ту же самую задачу - определить статические решения, исследовать их на устойчивость и найти точки бифуркации. Как и в одномерном случае, главная задача - определение точек бифуркации в пространстве параметров ( $\mu, z_0, R$ ). Значения  $\mu$  и  $R$  ограничиваются физическими соображениями:  $\mu < 2, R \leq 10$ . С другой стороны, бифуркация может возникнуть лишь при достаточно большом значении  $\mu$ . Как хорошо известно [4], при  $\mu = 0$  устойчивых статических решений задачи (I.3)-(I.4) нет. С ростом  $\mu$  (при достаточно большом  $R$ ) может возникнуть устойчивое статическое состояние. Иными словами, должна быть точка бифуркации по  $\mu$  при фиксированных  $R$  и  $z_0$ . Возможность существования устойчивых состояний в двумерном джозефсоновском переходе с одномерной неоднородностью была отмечена в работе [3], авторы которой использовали кусочно-линейное ("пилообразное") приближение для  $\sin \varphi$ . Однако даже в этом приближении искать точки бифуркации весьма трудно.

Ниже приводятся вычислительные схемы, численный анализ их точности, а также результаты численного решения задачи (I.3)-(I.4) и определения минимального собственного значения  $\lambda$  задачи (I.6)-(I.7) в указанной физически интересной области внешних параметров модели

( $R, z_0, \mu$ ). Согласно изложенному выше,  $\lambda > 0$  соответствует устойчивому состоянию  $\varphi(z)$ ,  $\lambda < 0$  - неустойчивому, а  $\lambda = 0$  - точке бифуркации.

Отметим, что изложенный подход эквивалентен исследованию устойчивости решений нестационарного уравнения

$$\Psi_{tt} = \Delta \Psi - [1 - \mu \delta(z - z_0)] \sin \Psi, \\ \Psi = \Psi(z, \theta, t), \quad 0 < z < R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq t < \infty, \\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (I.8)$$

представимых в виде

$$\Psi = \varphi(z) + \xi(z, \theta) e^{-i\omega t}. \quad (I.9)$$

Здесь  $\varphi(z)$  - решение граничной задачи (I.3)-(I.4), а  $\xi(z, \theta)$  - малая амплитуда возмущения,

$$\|\xi\| \ll \|\varphi\|, \quad \left. \frac{\partial}{\partial z} \xi(z, \theta) \right|_{z=R} = 0, \quad \xi(z, \theta) = \xi(z, \theta + 2\pi).$$

В линейном приближении анализ устойчивости решения (I.9) относительно возмущений  $\xi(z, \theta) e^{-i\omega t}$  сводится путем разделения переменных в линеаризованном относительно  $\xi(z, \theta)$  уравнении (I.8) к рассмотрению спектра задачи на собственные значения (I.6)-(I.7), где  $\lambda = \omega^2$ .

## 2. Численные схемы

Зависимость минимального собственного значения  $\lambda$  задачи (I.6)-(I.7) от внешних параметров модели ( $R, z_0, \mu$ )

$$\lambda = \lambda(R, z_0, \mu; \varphi_n) \quad (2.1)$$

неоднозначна. При заданных параметрах ( $R, z_0, \mu$ ) могут существовать несколько нетривиальных решений  $\varphi_n(z)$  нелинейной граничной задачи (I.3)-(I.4). Поэтому сначала необходимо решить вопрос о выборе нужных решений, что будет рассмотрено ниже. Далее, для тех же значений параметров и выбранных решений  $\varphi_n(z)$  необходимо найти соответствующие минимальные собственные значения задачи (I.6)-(I.7).

Решения задач (I.3)-(I.4), (I.6)-(I.7) находятся численно. Для этого были использованы две независимые разностные схемы. Кроме того, при решении задачи на собственные значения (I.6)-(I.7) применялись независимые итерационные методы решения. Это дало возможность в окрестности точки бифуркации, где счет становится неустойчивым, избежать потери нетривиальных решений.

Действие  $\delta$ -функции в дифференциальных уравнениях эквивалентно условиям разрыва производной в точке  $z = z_0$ .



$$\frac{d}{dr} \varphi(r) \Big|_{r=r_0+0} - \frac{d}{dr} \varphi(r) \Big|_{r=r_0-0} = -\mu \sin \varphi(r_0) \quad (2.2)$$

для задачи (I.3)-(I.4) и

$$\frac{d}{dr} \eta(r) \Big|_{r=r_0+0} - \frac{d}{dr} \eta(r) \Big|_{r=r_0-0} = -\mu \cos \varphi(r_0) \rho(r_0) \quad (2.3)$$

для задачи (I.6)-(I.7).

В первой схеме задачи (I.3)-(I.4) и (I.6)-(I.7) вместе с условиями разрыва производных аппроксимируются на равномерной сетке узлов

$$\omega_h = \{r_i = (i-1)h, i=1, N, h=(N-1)R \mid r_0 \in \omega_h, r_M = r_0, 4 \leq M \leq N-3\}$$

с помощью разностной схемы<sup>17)</sup>

$$-3u_3^{(k)} + 4u_2^{(k)} - u_1^{(k)} = 0,$$

$$h^{-2}(u_{i+1}^{(k)} - 2u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)}) + (2r_i h^{-1})(u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}) + \rho_i f_i^{(k)} = q_i^{(k)},$$

$$2 \leq i \leq N-1, i \neq M,$$

$$(2h)^{-1}(-u_{M+2}^{(k)} + 4u_{M+1}^{(k)} - 6u_M^{(k)} + 4u_{M-1}^{(k)} - u_{M-2}^{(k)}) + \rho_M f_M^{(k)} = 0, \quad (2.4)$$

$$u_{N-2}^{(k)} - 4u_{N-1}^{(k)} + 3u_N^{(k)} = 0, \quad k=1, 2.$$

При  $k=1$  схема (2.4) аппроксимирует задачу (I.3)-(I.4), (2.2), где

$$u_i^{(1)} = \varphi_i = \varphi(r_i), f_i^{(1)} = \sin \varphi_i, q_i^{(1)} = 0, \quad (2.5)$$

а при  $k=2$  - задачу (I.6)-(I.7), (2.3), для которой

$$u_i^{(2)} = \eta_i = \eta(r_i), f_i^{(2)} = \cos \varphi_i \rho_i, q_i^{(2)} = -\lambda \rho_i. \quad (2.6)$$

Функция  $\rho_i$  определена следующим образом:

$$\rho_i = \begin{cases} -1, & i \neq M \\ \mu, & i = M. \end{cases}$$

Схема (2.4) имеет точность аппроксимации  $O(h^2)$ .

В ньютоновских итерационных схемах с параметром<sup>15,6)</sup> линейные дискретные граничные задачи относительно итерационных поправок решаются методом встречной прогонки от точек  $r_1=0, r_N=R$  к точке разрыва  $r_M=r_0$ . Итерации прекращаются при уменьшении невязок искомого разностного решения в норме  $C$  до заданной величины  $\varepsilon = 10^{-8}$ . При этом в задаче (I.6)-(I.7), (2.3) искомая собственная функция нормируется условием

$$\int_0^R \eta^2(r) dr - 1 = 0. \quad (2.7)$$

Для вычисления значения энергии (I.5) и нормировочного интеграла в условии (2.7) применяется квадратурная формула трапеций точности  $O(h^2)$ .

Вторая разностная схема строилась на неравномерной сетке

$$\hat{\omega}_h = \{r_i, i=1, N, r_1 = \frac{h_0}{2}, r_2 = \frac{3h_0}{2}, r_{i+1} - r_i = h_{i+1}, i=2, 3, \dots, N \mid r_0 \in \hat{\omega}_h, r_M = r_0, 3 \leq M \leq N-2\}.$$

При  $r_0 > 0$  б сетка становилась равномерной с шагом  $h$ . ( $h$  берется одинаковым для обеих схем). В этом случае разностная схема выводится при помощи метода баланса<sup>19)</sup> и имеет вид

$$-h_0^{-1} \frac{r_1+r_2}{2} (u_2^{(k)} - u_1^{(k)}) + r_1 \rho_1 h_0 f_1^{(k)} = -q_1 r_1 h_0,$$

$$-\left[ \frac{r_{i+1}+r_i}{2} \frac{u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)}}{h_i^+} - \frac{r_i+r_{i-1}}{2} \frac{u_i^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}}{h_i^-} \right] + r_i \rho_i h_i f_i^{(k)} = -q_i r_i h_i,$$

$$h_N^{-1} \frac{r_M+r_{N-1}}{2} (u_N^{(k)} - u_{N-1}^{(k)}) + h_N r_N \rho_N f_N^{(k)} = -q_N \frac{h_N r_N}{2}, \quad (2.8)$$

где обозначения соответствуют (2.5), (2.6), а

$$h_i^+ = r_{i+1} - r_i, h_i^- = r_i - r_{i-1}, h_i = \frac{h_i^+ + h_i^-}{2}, \rho_i = \begin{cases} 1, & i \neq M \\ 1 - h_M^{-1}, & i = M. \end{cases}$$

Эта схема, используя представление дифференциального оператора

$$\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right)$$

и замену левого граничного условия в (I.4), (I.7) условием

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{du^{(k)}(r)}{dr} = 0, \quad k=1, 2,$$

имеет также точность  $O(h^2)$ . При численном решении граничной задачи (I.3)-(I.4) использовалась итерационная ньютоновская схема<sup>15)</sup>. Разностная схема (2.8) является симметричной, что позволяет при решении задачи на собственные значения применить метод итерации подпространств<sup>10)</sup>.

Численные результаты, полученные по обеим схемам при одинаковых параметрах  $h, r_0, \mu, R$ , совпадали с точностью  $O(h^2)$ .

В таблице I приведены результаты численной проверки сходимости разностных решений рассматриваемых задач при уменьшении шага  $h$  раз-



Таблица I

Сходимость разностных решений задач (I.3)-(I.4), (2.2) и (I.6)-(I.7), (2.3) при уменьшении шага  $h$  разностной сетки.  $\mu = 1,01, \tau_0 = 6,2, R = 8$

$h$	$\varphi(0)$	$S_i$	$G$	$\varphi(\tau_0)$	$S_i$	$G$	$\varphi(R)$	$S_i$	$G$	$\mathcal{E}$	$S_i$	$G$
0,020	0,0510213	6	3	3,08447	9	4,5	4,70128	7	3,5	209,9428	46	3,8
0,010	0,0510219	2		3,08456	2		4,70135	2		209,9464	12	
0,005	0,0510221			3,08458			4,70137			209,9476		

$h$	$\eta(0)$	$S_i$	$G$	$\eta(\tau_0)$	$S_i$	$G$	$\eta(R)$	$S_i$	$G$	$-\lambda$	$S_i$	$G$
0,020	0,0105901	24	4	0,473953	8	4	0,668752	15	5	0,0809410	633	3,9
0,010	0,0105925	6		0,473945	2		0,668737	3		0,0808777	162	
0,005	0,0105931			0,473943			0,668734			0,0808615		

ностной сетки. При фиксированных значениях внешних параметров ( $R, \tau_0, \mu$ ) выбрано одно из решений задачи (I.3)-(I.4), (2.2), для которого находится собственная функция задачи (I.6)-(I.7), (2.3) с минимальным собственным значением. Решения вычислены на трех вдвое сгущающихся сетках. В таблице даны значения функций  $\varphi(\tau)$  и  $\eta(\tau)$  в трех характерных точках  $\tau=0, \tau=\tau_0, \tau=R$  значения энергии  $\mathcal{E}$  и собственное значение  $\lambda$ . Для каждой из вычисленных величин приведены разности  $S_i = |Z_{h/2^i} - Z_{h/2^{i+1}}|, i=0,1$ , где  $Z_{h/2^i}$  - соответствующая величина, вычисленная при шаге  $h/2^i$ , а также отношения  $G = S_0/S_1$ . При квадратичной по шагу  $h$  сходимости численных решений теоретическое значение  $G=4$  [8]. Из таблицы видно, что сходимость результатов соответствует квадратичной, и они могут быть уточнены экстраполяцией по Ричардсону [8]. Приведенные ниже результаты получены при  $h = 0,01$ .

3. Численный анализ: особенности, результаты

Численное исследование функции (2.1) в данной работе выполняется в следующей последовательности.

1) Определяются значения внешних параметров ( $R, \tau_0, \mu$ ), при которых существуют физически интересные решения задачи (I.3)-(I.4), в том числе и устойчивые. Физически интересными являются решения с достаточно малой энергией  $\mathcal{E}[\varphi]$  (I.5), поэтому среди вычисленных решений выбираются те, у которых энергия минимальна.

Решение этого вопроса связано с выбором начальных приближений для ньютоновских итераций в задаче (I.3)-(I.4). При построении начальных приближений использовалась априорная информация об оценках параметров, при которых существуют устойчивые решения, и о форме искомых решений. Эти оценки были получены с помощью кусочно-линейного приближения для  $\sin \varphi/3$ .

Сначала были взяты достаточно большие значения параметров

$$R=10, \tau_0=7,75, \mu=1,01.$$

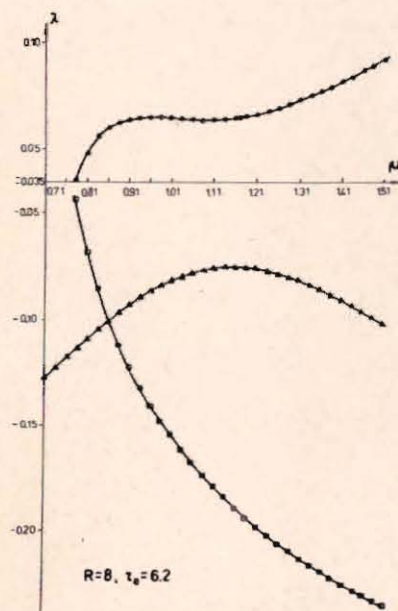


Рис.1. Зависимость минимальных собственных значений  $\lambda$  задачи (I.6)-(I.7) от  $\mu$  для решений  $\varphi_n(\tau)$  задачи (I.3)-(I.4). На рисунке изображены:  $\Delta$  - значения для  $\varphi_1, \square$  - значения для  $\varphi_2, \circ$  - значения для  $\varphi_3$ .

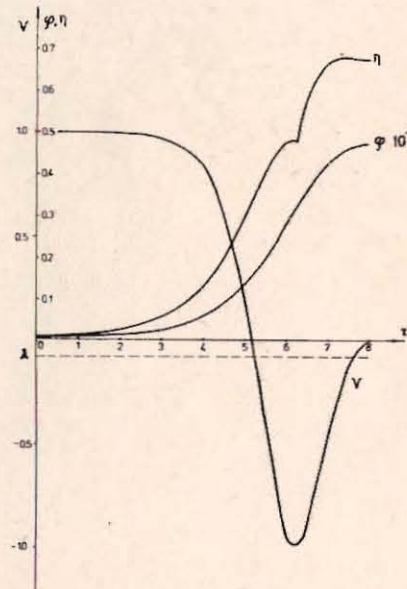


Рис.2. Функции  $\varphi_1(\tau), V = \cos \varphi_1(\tau)$  и  $\eta(\tau)$  при  $\mu = 1,01, R = 8, \tau_0 = 6,2$ .



Основными параметрами при построении начального приближения  $\varphi^{(0)}(\tau)$  были значения

$$\varphi^{(0)}(0), \varphi^{(0)}(\tau_0), \varphi^{(0)}(R), \quad (3.1)$$

которые разыгрывались случайным образом на интервалах, границы которых определялись в соответствии с априорными. По этим параметрам строилась непрерывная функция  $\varphi^{(0)}(\tau)$ , состоящая из двух парабол на отрезках  $0 \leq \tau \leq \tau_0$  и  $\tau_0 \leq \tau \leq R$  соответственно, принимающих на границах отрезков значения параметров (3.1). Кроме того, параболы удовлетворяли левому и правому граничным условиям (1.4).

Таблица 2

Характеристики решений задач (1.3)-(1.4), (1.6)-(1.7) при  $\mu = 1,01, R = 10, \tau_0 = 7,75$

	$\xi$	$\lambda$
$\varphi_1$	286,436	- 0,1576
$\varphi_2$	297,323	- 0,4464
$\varphi_3$	276,518	0,2196

Таблица 3

Зависимость характеристик решений задач (1.3)-(1.4), (1.6)-(1.7) от  $R$  и  $\tau_0$  при  $\mu = 1,01$

$R$	$\tau_0$	$\xi[\varphi_1]$	$-\lambda[\varphi_1]$	$\xi[\varphi_2]$	$-\lambda[\varphi_2]$	$\xi[\varphi_3]$	$\lambda[\varphi_3]$
6,00	4,65	100,807	0,3619	101,680	0,3696		
6,50	5,04	121,145	0,4250	125,656	0,4552		
7,00	5,43	150,468	0,5124	157,304	0,5103		
7,50	5,82	182,554	0,4915	196,867	0,1586		
8,00	6,20	209,947	0,0809	214,647	0,1548	209,819	0,0652
8,50	6,59	232,688	0,1558	229,859	0,2406	227,168	0,1433
9,00	6,98	250,722	0,1570	254,874	0,0874	244,003	0,1766
9,50	7,37	268,773	0,1578	269,676	0,1415	260,511	0,2003
10,00	7,75	286,436	0,1576	297,323	0,4464	276,518	0,2196

В результате серии испытаний выбраны три решения задачи (1.3)-(1.4). Решение для них задачи на собственные значения (1.6)-(1.7) показало, что два из них -  $\varphi_1(\tau)$  и  $\varphi_2(\tau)$  неустойчивы, а одно -  $\varphi_3(\tau)$  устойчиво. При построении начальных приближений для ньютоновских итераций в задаче (1.6)-(1.7) использовалась модификация алгоритма работы [11].

Таблица 2 содержит значения энергии  $\xi$  и минимальные собственные значения  $\lambda$ , соответствующие вычисленным решениям.

2) Для найденной конфигурации модели, характеризуемой отношением  $\tau_0/R = \text{const}$  (в рассматриваемом случае  $\tau_0/R = 0,775$ ), находится значение  $R$ , близкое к "критическому", то есть такое значение, в окрестности которого устойчивое решение  $\varphi_3$  задачи (1.3)-(1.4) исчезает.

Решение этой задачи заключается в исследовании зависимости  $\lambda$  и  $\xi$  от параметра  $R$ . При переходе от значения  $R$  к новому значению  $R + \Delta R$ , где  $\Delta R$  - приращение, в качестве начального приближения для ньютоновских итераций в задаче (1.3)-(1.4) используется решение  $\varphi(\tau)$ , вычисленное для значения  $R$ . Если  $\Delta R$  достаточно мало, то такой способ существенно сокращает число необходимых итераций. При анализе по другим параметрам начальные приближения строятся аналогично.

В таблице 3 дана зависимость энергий  $\xi[\varphi_n]$ ,  $n = 1, 2, 3$  и соответствующих минимальных собственных значений  $\lambda$  от  $R$ . Отношение  $\tau_0/R = 0,775$  сохраняется приблизительно, поскольку  $\tau_0 \in \omega_R$ ,  $h = 0,01$ . Из таблицы видно, что при уменьшении  $R$  конфигурация достигает "критического" размера: при  $R = 8$ ,  $\tau_0 = 6,2$  устойчивое решение  $\varphi_3(\tau)$  еще существует, а при  $R = 7,5$  его вычислить не удалось.

Таблица 4

Зависимость  $\lambda$  от изменения параметра  $\tau_0$ .  
 $\mu = 1,01, R = 8$

$\tau_0$	$-\lambda[\varphi_1]$	$-\lambda[\varphi_2]$	$\lambda[\varphi_3]$
5,9	0,4379	0,0610	0,0645
6,0	0,3681	0,1045	0,1107
6,1	0,2686	0,1326	0,1266
6,2	0,0809	0,1548	0,0652
6,3	0,1681	0,1736	



Отметим, что при приближении к "критическим" значениям  $R, \tau_0$  собственное значение  $\lambda$  для устойчивого решения  $\varphi_3$  убывает. Убывание  $|\lambda|$  наблюдается и для неустойчивых решений: для  $\varphi_1$  в окрестности значений параметров  $R=8, \tau_0=6,2$ , а для  $\varphi_2$  в окрестности  $R=9, \tau_0=6,98$ . Однако при дальнейшем изменении  $R$  эти решения устойчиво вычисляются.

3) Для определенного выше "критического" значения радиуса  $R$  и заданной характеристики микронеоднородности  $\mu=1,01$  уточняется "критическое" значение  $\tau_0$ , определяющее положение микронеоднородности.

Зависимость минимальных собственных значений  $\lambda$  от параметра  $\tau_0$  приведена в таблице 4. Из нее видно, что в данном случае значение  $\tau_0=6,2$  близко к "критическому", поскольку при  $\tau_0=6,3$  устойчивого решения задачи (I.3)-(I.4) вычислить не удалось. При более близком значении  $\tau_0=6,21$  устойчивое решение  $\varphi_3$  еще существует ( $\lambda=0,0271$ ).

4) Исследуется зависимость характеристик решений задачи (I.3)-(I.4) от параметра  $\mu$  при "критических" значениях  $R=8, \tau_0=6,2$ .

На рис.1 представлена зависимость от  $\mu$  минимальных собственных значений  $\lambda$  задачи (I.6)-(I.7), соответствующих решениям задачи

Таблица 5

Зависимость значений энергии  $\xi$  от параметра  $\mu$ .  
 $R=8, \tau_0=6,2$

$\mu$	$\xi[\varphi_1]$	$\xi[\varphi_2]$	$\xi[\varphi_3]$
0,510	248,889		
0,560	244,994		
0,610	241,099		
0,660	237,204		
0,710	233,309		
0,760	229,415		
0,785	227,468	226,968	226,844
0,810	225,520	225,444	225,023
0,835	223,573	223,978	223,170
0,860	221,626	222,557	221,294
0,885	219,679	221,173	219,404
0,910	217,733	219,820	217,501
0,935	215,786	218,494	215,590
0,960	213,839	217,192	213,671
0,985	211,893	215,910	211,748
1,010	209,947	214,647	209,819

(I.3)-(I.4). При уменьшении  $\mu$  значения  $|\lambda|$  для  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  убывают и в окрестности точки  $\mu=0,785$  обращаются в нуль. Здесь находится точка бифуркации. Левее этой точки существует лишь одно неустойчивое решение  $\varphi_1$  задачи (I.3)-(I.4). Правее точки бифуркации существуют три решения этой задачи, одно из которых устойчиво (в рассматриваемом смысле).

Положение точки бифуркации, а также "критические" значения параметров при необходимости можно уточнить, решая относительно соответствующего неизвестного уравнение

$$\lambda(R, \tau_0, \mu; \varphi_3) = 0$$

с требуемой точностью. Для этого удобно применить модифицированный метод секущих.

На рис.2 даны при  $R=8, \tau_0=6,2, \mu=1,01$  графики функций:  $\varphi(z)$  - решения задачи (I.3)-(I.4),  $V(z) = \cos \varphi(z)$  - "потенциала" задачи (I.6)-(I.7),  $\eta(z)$  - собственной функции, соответствующей минимальному собственному значению  $\lambda$  задачи (I.6)-(I.7), для первого неустойчивого решения  $\varphi_1$ .

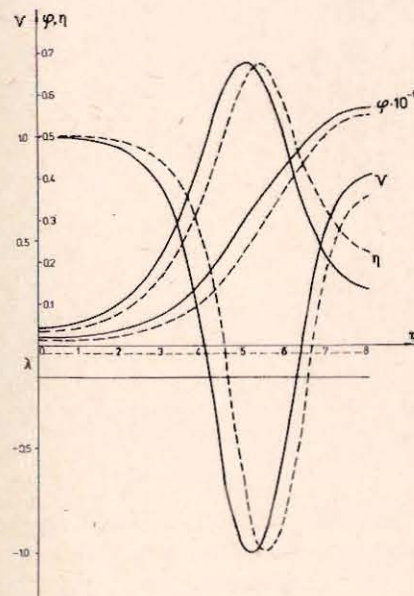


Рис. 3. Сплошная линия изображает функции для  $\mu=1,01$ , пунктир - для  $\mu=0,785$ . Функции  $\varphi_2(z)$ ,  $V = \cos \varphi_2(z)$  и  $\eta(z)$  при  $R=8, \tau_0=6,2$ .

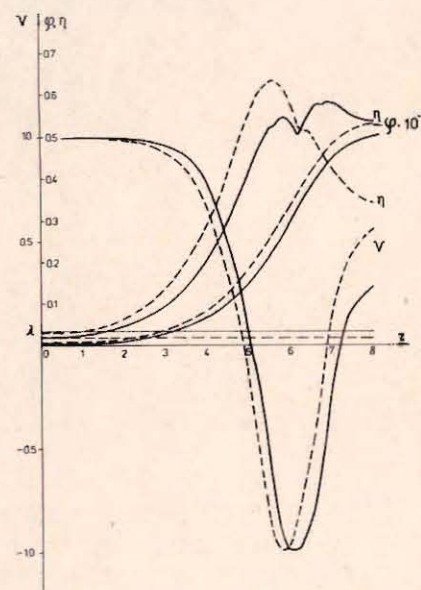


Рис. 4. Сплошная линия изображает функции для  $\mu=1,01$ , пунктир - для  $\mu=0,785$ . Функции  $\varphi_3(z)$ ,  $V = \cos \varphi_3(z)$  и  $\eta(z)$  при  $R=8, \tau_0=6,2$ .



Те же функции для неустойчивого решения  $\psi_2$  и устойчивого решения  $\psi_3$  изображены на рис.3,4 соответственно. Там же для сравнения показаны эти же функции при значении  $\mu=0,785$  вблизи точки бифуркации.

В таблице 5 приведена зависимость энергии  $E[\psi_n]$ ,  $n=1,2,3$  для вычисленных решений.

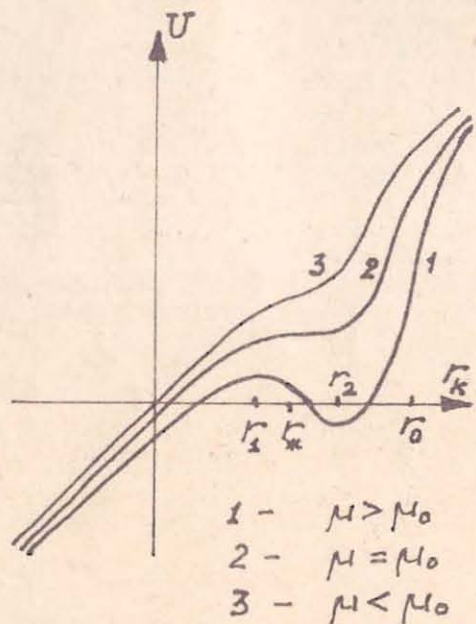


Рис.5

#### 4. Заключение

Представленная схема численного анализа позволила обнаружить устойчивые связанные состояния статических флюксонов с ограниченной энергией в круговом джозефсоновском переходе с кольцевой микронеоднородностью для физической приемлемой области изменения параметров модели. Вычислены их характеристики и определена точка бифуркации.

Отметим некоторые качественные особенности изученных состояний. Зависимость  $\psi(r)$  для всех состояний, изображенных на рис.2-4, качественно сходна, энергии их тоже близки. Несколько больше отличаются

ся функции  $\psi(r)$ , но наиболее четко можно отличать состояния по значениям  $\lambda$ . Эти обстоятельства особенно оттеняют трудности численных и приближенных (аналитических) исследований статических состояний и наглядно демонстрируют необходимость совместного решения задач (I.3)-(I.4) и (I.6)-(I.7) для надежной идентификации этих состояний. Это особенно ярко проявляется вблизи точки бифуркации, где состояния  $\psi_2$  и  $\psi_3$  становятся почти вырожденными, в то время как соответствующие значения  $\lambda$  отличаются достаточно сильно и по-разному зависят от  $\mu$ .

Обнаруженное явление бифуркации можно наглядно истолковать при больших значениях  $R$  и  $r_0$  с помощью следующей упрощенной физической модели. Уравнение (I.3) при  $\mu=0$  и больших  $r$  можно приближенно заменить уравнением

$$\frac{d^2}{dr^2} \psi(r) = \sin \psi(r)$$

Его решение в виде "кинка"

$$\psi_k = 4 \arctg(\exp(r-r_k))$$

приближенно удовлетворяет граничным условиям (I.4). Энергия (I.5) этого стационарного состояния равна  $E_k \approx 16\pi r_k$ . В этом состоянии энергия сосредоточена в кольце радиуса  $r_k$  с толщиной  $\Delta r \approx 1$ . Сила линейного натяжения кольца равна  $F_k = -\frac{\partial}{\partial r_k} E_k = -16\pi$ , так что кольцо притягивается к центру. Найдем силу взаимодействия кольца с неоднородностью, считая, что оно не деформируется под действием неоднородности (это допущение оправдывается выполненными расчетами). Энергия взаимодействия, согласно (I.5), равна

$$E_{b3} = -2\pi\mu \int \delta(r-r_0)(1-\cos \psi_k) r dr = -\frac{4\pi\mu r_0}{ch^2(r_0-r_k)} \equiv U_{b3}$$

Отсюда получим выражение для силы, действующей на кольцо со стороны неоднородности,

$$F_{b3} = -\frac{\partial}{\partial r_k} E_{b3} = 8\pi\mu r_0 \frac{th(r_0-r_k)}{ch^2(r_0-r_k)}$$

Приравняв силу взаимодействия  $F_{b3}$  силе натяжения  $F_k$ , находим условие равновесия кольца

$$\frac{th(r_0-r_k)}{ch^2(r_0-r_k)} = \frac{2}{\mu r_0}$$

Отсюда следует, что стационарные состояния могут существовать как



при  $\mu < 0$  ("кинк" снаружи неоднородности), так и при  $\mu > 0$  ("кинк" внутри неоднородности и отталкивается от нее). Максимальное значение силы притяжения "кинка" к неоднородности найдем из условия ( $\xi = \tau_0 - \tau_k$ )  $\frac{d}{d\xi} \frac{th \xi}{ch^2 \xi} = 0$ , то есть  $th^2 \xi_{max} = \frac{1}{3}$ ,

$$F_{e_3}^{max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0.385.$$

Условие существования стационарного состояния  $|F_{e_3}^{max}| > |F_k|$  есть

$$\mu > \frac{3\sqrt{3}}{\tau_0} = \mu_0. \quad (4.1)$$

На рис.5 изображено качественное поведение полного потенциала  $V = F_k + U_{e_3}$  взаимодействия кольца с неоднородностью при фиксированном  $\tau_0$  и различных  $\mu$ .

Видно, что существуют три разных возможности. При  $\mu > \mu_0$  существуют два статических решения, соответствующие двум точкам  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , в которых  $\frac{d}{d\tau_k} U = 0$ . Одно из этих решений ( $\tau_k = \tau_2$ ) устойчиво, другое нет. В случае  $\mu = \mu_0$  обе стационарные точки сливаются в одну  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_k$ , в которой функция  $U(\tau_k)$  имеет перегиб. Осталось одно неустойчивое решение. При  $\mu < \mu_0$  статические решения исчезают. Таким образом, точка  $\mu = \mu_0$  является точкой бифуркации.

В приведенных рассуждениях при  $\tau_0 \gg f$  устойчивое и неустойчивое решения по виду совпадают друг с другом (кольцо  $\varphi_k$ ), отличаясь лишь местом расположения (неустойчивое - ближе к центру кольца) и энергией  $E_{\tau_k = \tau_1} > E_{\tau_k = \tau_2}$ . При численном исследовании обнаружено третье неустойчивое статическое решение, которое существует и при  $\mu < \mu_0$ . Интересно отметить, что отличие вычисленного по формуле (4.1)  $\mu_0 = 0,838$  от найденного при численном исследовании критического значения  $\mu = 0,785$  составляет менее 7%.

Полученные результаты представляют отдельный интерес для физических приложений, так как соответствующий переход с "размытой" неоднородностью вполне возможно реализовать.

Отметим, что схема может быть обобщена на модели более сложной конфигурации (без радиальной симметрии) путем использования ньютоновских схем решения нелинейных задач и пакета программ для решения спектральных задач на основе метода конечных элементов<sup>12,13/</sup>.

#### Литература

1. Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. Письма в ЖЭТФ, 1982, 35, с.470.
2. Filippov A.T., Galpern Yu.S. Solid State Comm., 1983, 48, p.665.

3. Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. ЖЭТФ, 1984, 86, с.1527.
4. Боголюбовский И.Л., Маханьков В.Г. Письма в ЖЭТФ, 1976, 24, с.15.
5. Жидков Е.П., Пузынин И.В. ЖВМ и МФ, 1967, 7, 5, с.1086.
6. Ponomarev L.I., Puzynin I.V., Puzynina T.P. J.Comput. Phys., 1976, 22, 1, p.125.
7. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. I, II, Физматгиз, М., 1959.
8. Марчук Г.И., Шайдулов В.В. Повышение точности разностных решений. Наука, М., 1979.
9. Андреев В.Б., Самарский А.А. Разностные методы для эллиптических уравнений, Наука, М., 1977.
10. Bathe K.J., Wilson Ed. Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice Hall, Inc. Cliff. N.J. 1976.
11. Акишин П.Г., Пузынин И.В. ОИЯИ, 5-10992, Дубна, 1977.
12. Касчиев М.С., Касчиева В.А., Махалдвани Н.В., Пузынин И.В. Численное решение нелинейной задачи двух центров в рамках уравнения Янга-Миллса. В сб. "Вариационно-разностные методы в математической физике", ч.2, ОБМ АН СССР, М., 1984, с.130-143.
13. Касчиев М.С. и др. ОИЯИ, РИИ-83-146, Дубна, 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел  
20 декабря 1984 года.



СООБЩЕНИЯ, КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ, ПРЕПРИНТЫ И СБОРНИКИ ТРУДОВ КОНФЕРЕНЦИЙ, ИЗДАВАЕМЫЕ ОБЪЕДИНЕННЫМ ИНСТИТУТОМ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ЯВЛЯЮТСЯ ОФИЦИАЛЬНЫМИ ПУБЛИКАЦИЯМИ.

Ссылки на СООБЩЕНИЯ и ПРЕПРИНТЫ ОИЯИ должны содержать следующие элементы:

- фамилии и инициалы авторов,
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс публикации,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы /при необходимости/.

Пример:

1. Первушкин В.Н. и др. ОИЯИ, P2-84-649, Дубна, 1984.

Ссылки на конкретную СТАТЬЮ, помещенную в сборнике, должны содержать:

- фамилии и инициалы авторов,
- заглавие сборника, перед которым приводятся сокращенные слова: "В кн."
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс издания,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы.

Пример:

Колпаков И.Ф. В кн. XI Международный симпозиум по ядерной электронике, ОИЯИ, Д13-84-53, Дубна, 1984, с.26.

Савин И.А., Смирнов Г.И. В сб. "Краткие сообщения ОИЯИ", № 2-84, Дубна, 1984, с.3.

Касчиев М.С. и др.

P11-84-832

Численное исследование устойчивости и точек бифуркации связанных статических состояний флюксонов в круговом джозефсоновском переходе с микро неоднородностью

Дана схема численного анализа устойчивости и нахождения точек бифуркации статических связанных состояний флюксонов в математической модели кругового джозефсоновского перехода с кольцевой микро неоднородностью. В физически приемлемой области изменения параметров модели найдены устойчивые состояния с небольшой энергией и точка бифуркации двух состояний, интересные для физических приложений.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Панковой Н.С.

Kaschiev M.S. et al.

P11-84-832

Numerical Investigation of Stability and Bifurcation Points of Bound Static States of Fluxons in a Circular Josephson Junction with Microinhomogeneity

The scheme and numerical analysis of stability and bifurcation points of static bound states of fluxons are presented in a mathematical model of the circular Josephson junction with the same symmetry microinhomogeneity. In the model parameter range physically realizable there were found stable states of small energy and their bifurcations interesting from the applied physics point of view are studied.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984