сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-84-799

П.Г.Акишин, Е.П.Жидков

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ МАГНИТОСТАТИКИ

1984

В работе рассматриваются вопросы, возникающие при использовании интегральной постановки задач магнитостатики в двумерном случае.

Пусть $\bar{B}(\bar{x})$ – индукция магнитного поля в точке $\bar{x}$; $\bar{H}(\bar{x})$ – напряженность; $\bar{M}(\bar{x})$ – магнитный момент; $\mu = \mu(|\bar{B}(\bar{x})|)$ – магнитная проницаемость, $\bar{H}^s(\bar{a})$ – поле от токовых элементов, вычисляемое по закону Био–Савара. Пусть G – область, заполненная железом. Интегральная постановка задачи магнитостатики в трехмерном случае имеет вид /I/:

$$\bar{H}(\bar{a}) = \bar{H}^s(\bar{a}) + \frac{\nabla_{\bar{a}}}{4\pi}\left[\int_G \left(\bar{M}(\bar{x}), \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|}\right) dv_{\bar{x}}\right] \tag{I}$$

$$\bar{H}(\bar{x}) = \frac{\bar{B}(\bar{x})}{\mu(|\bar{B}(\bar{x})|)} \tag{2}$$

$$\bar{M}(\bar{x}) = \bar{B}(\bar{x}) - \bar{H}(\bar{x}) . \tag{3}$$

В случае двух измерений (I) редуцируется к следующему уравнению:

$$\bar{H}(\bar{a}) = \bar{H}^s(\bar{a}) - \frac{\nabla_{\bar{a}}}{2\pi}\left[\int_G \left(\bar{M}(\bar{x}), \nabla_{\bar{a}} \ln|\bar{x}-\bar{a}|\right) ds_{\bar{x}}\right]. \tag{4}$$

Векторы $\bar{H}, \bar{H}^s, \bar{M}$ и область G в (4) двумерны.

Данная работа посвящена вопросам дискретизации уравнения (4) и решению возникающих нелинейных дискретизованных уравнений.

§ I. Дискретизация интегральных уравнений

Существует несколько методов дискретизации рассматриваемых интегральных уравнений. Один из наиболее известных методов – GFUN метод /I,2/. Область G разбивается на подобласти $\{G_i\}$

$$G = \bigcup_{i=1}^{N} G_i$$

Мера пересечения $G_i \cap G_j$ равна нулю при $i \neq j$. В каждой G_i берется точка наблюдения $\bar{a}_i$. $\bar{M}(\bar{x})$, $\bar{B}(\bar{x})$, $\bar{H}(\bar{x})$ – полагаются постоянными в G_i и равными соответственно $\bar{M}_i, \bar{B}_i, \bar{H}_i$ ($\bar{M}_i$, $\bar{B}_i$, $\bar{H}_i$ удовлетворяют (2),(3)). В дальнейшем используется метод коллокации

$$\bar{H}_i = \bar{H}^S(\bar{a}_i) + \frac{\nabla_{a_i}}{4\pi}\left[\sum_{j=1}^{N}\int_{G_j}\left(\bar{M}_j, \nabla_{\bar{a}_i}\frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|}\right)dV_{\bar{x}}\right], \tag{5}$$

$$i=1,2,\dots,N$$

В [3] предлагается модификация GFUN -метода. Для дискретизации используется интегрирование по подобласти G_i; (5) сводится к виду:

$$\bar{H}_i\int_{G_i} dV_{\bar{a}} = \int_{G_i}\bar{H}^S(\bar{a})\,dV_{\bar{a}} + \int_{G_i}\left\{\frac{\nabla_{\bar{a}}}{4\pi}\left[\sum_{j=1}^{N}\int_{G_j}\left(\bar{M}_j, \nabla_{\bar{a}}\frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|}\right)dV_x\right]\right\}dV_{\bar{a}}.$$

$$i=1,2,\dots,N$$

Данная модификация вызвана тем, что при стремлении $\bar{a}_i$ к границе G_i интеграл в (5) стремится к бесконечности. Все это накладывает существенные ограничения на порядок аппроксимации исходных интегральных уравнений.

Рассмотрим дискретизацию из [3] для системы уравнений (4), использующую линейные элементы. Пусть G разбита на треугольники $\{S_i\}$ (предполагается, что это возможно).

$$G = \bigcup_{i=1}^{N} S_i .$$

Треугольники S_i удовлетворяют следующим условиям:

I). Мера пересечения S_i с S_j равна нулю при $i \neq j$.

2). Вершины одного треугольника не могут быть внутренними точками сторон другого треугольника, т.е. если два треугольника касаются, то они касаются или только по одной вершине, или по целому ребру.

Пусть $\{\bar{A}_k,\ k=1,\dots,L\}$ - набор всех вершин треугольников. Обозначим $\bar{M}_k=\bar{M}(\bar{A}_k)$, $\bar{B}_k=\bar{B}(\bar{A}_k)$, $\bar{H}_k=\bar{H}(\bar{A}_k)$. Пусть $f_k(\bar{x})$ – функция формы, ассоциированная с вершиной $\bar{A}_k$:

$$f_k(\bar{A}_\ell) = \begin{cases} 1 & k=\ell \\ 0 & k\neq \ell . \end{cases} \tag{6}$$

Функция $f_k(\bar{x})$ в каждом треугольнике есть линейная функция.

Используя эти обозначения, имеем:

$$\sum_{j=1}^{L}\bar{H}_j\int_G f_k(\bar{a})f_j(\bar{a})\,dS_{\bar{a}} = \int_G \bar{H}^S(\bar{a})f_k(\bar{a})\,dS_{\bar{a}} - \tag{7}$$

$$-\int_G f_k(\bar{a})\left\{\frac{\nabla_{\bar{a}}}{2\pi}\left[\sum_{i=1}^{L}\int_G\left(\bar{M}_i, \nabla_{\bar{a}}\ln|\bar{x}-\bar{a}|\right)f_i(\bar{x})\,dS_{\bar{x}}\right]\right\}dS_{\bar{a}} .$$

$$k=1,2,\dots,L$$

В дальнейшем речь пойдет о решении данной системы уравнений.

§ 2. Вычисление интегралов

Для того, чтобы выписать в явном виде численные значения коэффициентов, входящих в (7), необходимо вычислить интегралы типа

$$I=\iint_{S_i S_j} dS_{\bar{x}}\,dS_{\bar{a}}\left(\frac{\partial}{\partial a_k}\frac{\partial}{\partial a_\ell}\left(\ln|\bar{x}-\bar{a}|\right)\right)f_M(\bar{x})f_n(\bar{a}). \tag{8}$$

При дроблении области количество интегралов значительно возрастает, и если учесть, что они являются четырехкратными и в общем случае не вычисляемыми аналитически, то возникает проблема их вычисления. Для вычисления интегралов в [4] предложено использование кубатурных формул. Как видно из (8), возникают ситуации, когда подынтегральная функция становится сингулярной, и применение кубатурных формул затруднительно. В работе [5] развиты методы вычисления интегралов от сингулярных функций в случае, когда подынтегральное выражение можно представить в виде линейной комбинации однородных функций. В этом параграфе развиваются идеи, изложенные в [5].

Пусть $f(\bar{x})$ – однородная функция, т.е. для любого $\lambda > 0$ выполняется

$$f(\lambda\bar{x}) = \lambda^k f(\bar{x}).$$

Пусть $g(\bar{x})$ – функция логарифмического типа, т.е. для любого $\lambda > 0$ имеет место

$$g(\lambda\bar{x}) = \ln\lambda + g(\bar{x}).$$

Методы из [5] обобщаются на функции вида $g(\bar{x})f(\bar{x})$. Проиллюстрируем сущность подхода на примере вычисления интеграла

$$J = \iint_{S_1 S_2} |\bar{x}-\bar{y}|^k \ln|\bar{x}-\bar{y}|\,dS_{\bar{x}}\,dS_{\bar{y}} . \tag{9}$$

Треугольники S_1 и S_2 изображены на рис. I.

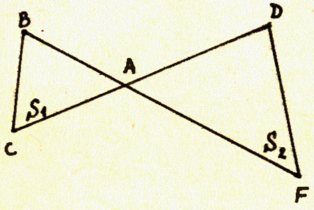

Рис. I

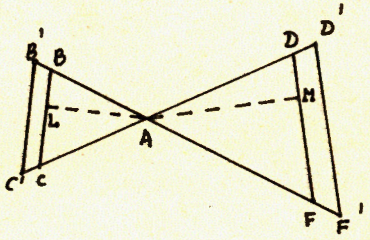

Рис. 2

Пусть $\tilde{S}_1$ есть треугольник $AB'C'$, полученный из треугольника ABC растяжением в λ раз относительно точки A. Аналогично $\tilde{S}_2$ есть треугольник $AD'F'$, полученный из треугольника ADF растяжением в λ раз относительно точки A (рис. 2). Пусть $J(\lambda)$ есть

$$J(\lambda) = \int\limits_{\tilde{S}_1}\int\limits_{\tilde{S}_2} |\bar{x}-\bar{y}|^k \ln|\bar{x}-\bar{y}|\, dS_{\bar{x}}\, dS_{\bar{y}} . \qquad (I0)$$

Заменой переменных $\bar{x}=\lambda\tilde{x}$, $\bar{y}=\lambda\tilde{y}$ $J(\lambda)$ приводится к виду

$$J(\lambda) = \lambda^{k+4} J + \lambda^{k+4} \ln\lambda \int\limits_{S_1}\int\limits_{S_2} |\bar{x}-\bar{y}|^k dS_{\bar{x}}\, dS_{\bar{y}} . \qquad (II)$$

Пусть $\hat{D}_1$ есть трапеция $B'BCC'$, $\hat{D}_2$ – трапеция $DD'F'F$. Вычислим предел разностного отношения

$$\lim_{\substack{\lambda\to 1\\ \lambda>0}} \frac{J(\lambda)-J(1)}{\lambda-1} . \qquad (I2)$$

Используя аддитивность интеграла как функции множества, по которому он берется, имеем

$$\frac{dJ(\lambda)}{d\lambda}\Big/_{\lambda=1} = \lim_{\lambda\to 1} \frac{1}{\lambda-1} \Big[\Big(\int\limits_{\hat{D}_1}\int\limits_{S_2} + \int\limits_{\hat{D}_2}\int\limits_{S_1} + \int\limits_{\hat{D}_1}\int\limits_{\hat{D}_2} \Big) |\bar{x}-\bar{y}|^k \ln|\bar{x}-\bar{y}|\, dS_{\bar{x}}\, dS_{\bar{y}} \Big] . \qquad (I3)$$

Переходя к пределу в (I3), получаем

$$\frac{dJ(\lambda)}{d\lambda}\Big/_{\lambda=1} = h_1 \int\limits_{BC}\int\limits_{S_2} |\bar{x}-\bar{y}|^k \ln|\bar{x}-\bar{y}|\, dS_{\bar{x}}\, d\ell_{\bar{y}} + h_2 \int\limits_{DF}\int\limits_{S_1} |\bar{x}-\bar{y}|^k \ln|\bar{x}-\bar{y}|\, dS_{\bar{y}}\, d\ell_{\bar{x}} , \qquad (I4)$$

где h_1 – высота LA, h_2 – высота AM.

Дифференцируя (II) по λ, имеем

$$\frac{dJ(\lambda)}{d\lambda}\Big/_{\lambda=1} = (k+4)J + \int\limits_{S_1}\int\limits_{S_2} |\bar{x}-\bar{y}|^k dS_{\bar{x}}\, dS_{\bar{y}} . \qquad (I5)$$

Разрешая (I4) и (I5), можно выразить J через комбинацию регулярных интегралов из (I4) и интеграл $\int\limits_{S_1}\int\limits_{S_2} |\bar{x}-\bar{y}|^k dS_{\bar{x}} dS_{\bar{y}}$. Используя метод из /5/, можно интеграл $\int\limits_{S_1}\int\limits_{S_2} |\bar{x}-\bar{y}|^k dS_{\bar{x}} dS_{\bar{y}}$ также свести к комбинации регулярных интегралов.

Этот метод также обобщается на случай, когда S_1 и S_2 совпадают или имеют две общие вершины. Сингулярные интегралы из (8) сводились подобным образом к комбинации регулярных интегралов. Последние вычислялись с использованием кубатурных формул для треугольника и квадратурных формул для отрезка.

§ 3. Алгоритм решения дискретизованных уравнений

Введем следующие обозначения. Пусть $\hat{M}, \hat{B}, \hat{H}, \hat{H}^s$ есть

$$\hat{M} = (\bar{M}_1, \bar{M}_2, \ldots\ldots\ldots, \bar{M}_L)^T$$
$$\hat{B} = (\bar{B}_1, \bar{B}_2, \ldots\ldots\ldots, \bar{B}_L)^T$$
$$\hat{H} = (\bar{H}_1, \bar{H}_2, \ldots\ldots\ldots, \bar{H}_L)^T$$
$$\hat{H}^s = \Big(\int\limits_G \bar{H}^s(\bar{a}) f_1(\bar{a})\, dS_{\bar{a}}, \ldots\ldots, \int\limits_G \bar{H}^s(\bar{a}) f_L(\bar{a})\, dS_{\bar{a}}\Big)^T .$$

Пусть $[A]$ – матрицы размера $[3L \times 3L]$ вида

$$[A] = \begin{pmatrix} [A_{11}] & \ldots\ldots & [A_{1L}] \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ [A_{L1}] & \ldots\ldots & [A_{LL}] \end{pmatrix} ,$$

где $[A_{ij}]$ есть матрицы размера $[3 \times 3]$ такие, что для любого $\bar{M}$ имеет место равенство

$$[A_{ij}]\bar{M} = -\int\limits_G \Big\{ f_i(\bar{a}) \frac{\nabla\bar{a}}{2\pi} \Big[\int\limits_G f_j(\bar{x}) (\bar{M}, \nabla_a \ln|\bar{x}-\bar{a}|)\, dS_{\bar{x}} \Big] \Big\} dS_{\bar{a}} .$$

Аналогично $[C]$ есть матрица размера $[3L \times 3L]$ вида

$$[C] = \begin{pmatrix} [C_{11}] & \ldots\ldots & [C_{1L}] \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ [C_{L1}] & \ldots\ldots & [C_{LL}] \end{pmatrix} ,$$

где $[C_{ij}]$ есть диагональные матрицы размера $[3 \times 3]$ типа

$$[c_{ij}] = \int\limits_G f_i(\bar{x}) f_j(\bar{x}) dS_{\bar{x}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя введенные обозначения, систему (7) можно записать следующим образом:

$$[c]\hat{H} = \hat{H}^s + [A]\hat{M}. \qquad (16)$$

В работе /3/ доказано существование решения у систем уравнений, сходных с (16). Обобщение доказательства существования решения на данный случай не вызывает затруднений. В случае кусочно-постоянной аппроксимации вопрос о числе решений подобной дискретизованной системы уравнений в трехмерном случае изучается в /6/. В этой же работе предложен итерационный алгоритм решения данной системы уравнений. Трансформируем (16) к виду

$$[c]\hat{B} = \hat{H}^s + ([c]+[A])\hat{M}. \qquad (17)$$

Для решения дискретизованной системы уравнений (17) использовался следующий итерационный процесс:

$$\begin{aligned} &[c]\hat{B}_{k+1} = \hat{H}^s + ([c]+[A])\hat{M}_k \\ &\hat{B}_o = \hat{H}^s \\ &k=0,1,2,\dots \end{aligned} \qquad (18)$$

Процесс оканчивался в том случае, если невязка $\hat{R}_k$

$$\hat{R}_k = \hat{H}^s + ([c]+[A])\hat{M}_k - [c]\hat{B}_k$$

становилась по норме меньше заданной наперед величины eps .

Заключение

Вся вышеизложенная методика использовалась при создании комплекса программ расчета двумерных магнитостатических полей. В качестве входных данных для комплекса необходимо задавать набор треугольников $\{s_i\}$, на которые разбита область, заполненная железом; конфигурацию обмоток, состоящую из объединения многоугольников; плотности токов в обмотках и набор точек наблюдения, в которых необходимо знать результирующее поле.

На рис. 3 изображена конфигурация дипольного магнита и токовых элементов, для которой проводился расчет магнитного поля. При расчете учитывалась симметрия поля относительно оси ОУ и антисимметрия поля относительно оси ОХ

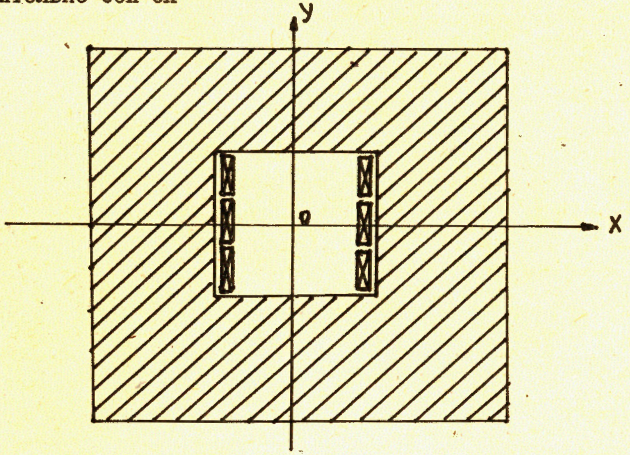

Рис. 3

Результаты расчетов хорошо согласуются с расчетами по программам POISSON /7/, МИС2 /8/ и расчетами по программе GRIDS (ОИЯИ).

В заключение авторы выражают благодарность Э.А.Айряну, О.И.Юлдашеву и И.П.Юдину за помощь при тестировании алгоритма.

Литература

1. Trowbridge G.W. et al. GFUN3D User Guide, RL-76-029/A.
2. Newman M.J. et al. GFUN:An Interactive Program as an Aid to Magnet Design. Proc. of the 4-th International Conference on Magnet Technology, Brookhaven, 1972.
3. Акишин П.Г., Жидков Е.П. ОИЯИ, Р11-81-826, Дубна, 1981.
4. Акишин П.Г. ОИЯИ, 11-83-558, Дубна, 1983.
5. Акишин П.Г., Жидков Е.П. ОИЯИ, 11-81-314, Дубна, 1981.
6. Акишин П.Г., Жидков Е.П. ОИЯИ, 11-83-427, Дубна, 1983.
7. Жидков Е.П. и др. ОИЯИ, Р9-81-12, Дубна, 1981.
8. Шелаев И.А. и др. ОИЯИ, Р9-80-333, Дубна, 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 декабря 1984 года.

Вниманию организаций и лиц, заинтересованных в получении публикаций Объединенного института ядерных исследований

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ, включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

ИНДЕКС	ТЕМАТИКА	Цена подписки на год
1.	Экспериментальная физика высоких энергий	10 р. 80 коп.
2.	Теоретическая физика высоких энергий	17 р. 80 коп.
3.	Экспериментальная нейтронная физика	4 р. 80 коп.
4.	Теоретическая физика низких энергий	8 р. 80 коп.
5.	Математика	4 р. 80 коп.
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия	4 р. 80 коп.
7.	Физика тяжелых ионов	2 р. 85 коп.
8.	Криогеника	3 р. 85 коп.
9.	Ускорители	7 р. 80 коп.
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных	7 р. 80 коп.
11.	Вычислительная математика и техника	6 р. 80 коп.
12.	Химия	1 р. 70 коп.
13.	Техника физического эксперимента	8 р. 80 коп.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами	1 р. 70 коп.
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях	1 р. 50 коп.
16.	Дозиметрия и физика защиты	1 р. 90 коп.
17.	Теория конденсированного состояния	6 р. 80 коп.
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники	2 р. 35 коп.
19.	Биофизика	1 р. 20 коп.

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтампт, п/я 79.

Акишин П.Г., Жидков Е.П. Р11-84-799

Метод интегральных уравнений в двумерных задачах магнитостатики

Исследуются вопросы, возникающие при решении двумерных задач магнитостатики методом интегральных уравнений. Рассматривается метод дискретизации этих уравнений. Предлагается процесс решения дискретизованных уравнений. Метод может быть рекомендован для широкого класса двумерных задач магнитостатики.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Akishin P.G., Zhidkov E.P. P11-84-799

The integral Equation Method in Two-Dimensional Problems of Magnetostatics

Some problems arising in the process of solving two-dimensional magnetostatical problems by the integral equation method are investigated. The algorithm of discretization of integral equations is considered. The iterational method for solving discretization equations is proposed. The method could be recommended for a wide class of two-dimensional problems of magnetostatics.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984