

**сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна**

P11-84-795

А.В.Егоров, Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский

**БЛОЧНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ
ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ
ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА
НА ПОВЕРХНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА**

1984

ВВЕДЕНИЕ

В /1/ обоснована целесообразность решения граничных интегральных уравнений /ГИУ/ для уравнения Лапласа, заданных на поверхности некоторой стандартной области /шар, куб, параллелепипед и др./.

В настоящей работе рассматриваются естественные для некоторых типов параллелепипедов итерационные процессы /варианты метода неполного обращения /2,3/ /, возникающие при решении внешних и внутренних краевых задач. Исследование процессов, проведение экономии ресурсов /памяти, числа операций/ при их численной реализации основываются на блочной структуре получающихся при дискретизации ГИУ матриц. Для случая кубической стандартной области построено численный метод решения ГИУ, основанный на полной оптимизации матричных массивов. Алгоритм реализован в виде программы на языке фортран. Приводятся численные результаты по решению задачи Неймана.

1. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ГИУ И ОПТИМИЗАЦИЯ ОПЕРАТИВНОЙ ПАМЯТИ ЭВМ ПОД ВОЗНИКАЮЩИЕ МАТРИЧНЫЕ МАССИВЫ

Рассматриваются ГИУ для уравнения Лапласа.

1/ задача Дирихле $a = -1$ - внутренняя / $a = 1$ - внешняя/.

ГИУ: $Lv = a(E + aK)g \equiv \psi(M)$; $g(M) = u(M)$, $M \in \Gamma$;

2/ задача Неймана $a = -1$ - внутренняя / $a = 1$ - внешняя/.

ГИУ: $(E + aK)u = aLf \equiv \phi(M)$; $f(M) = \frac{\partial}{\partial n} u(P) |_{P=M}$, $M \in \Gamma$.

Обозначения:

$$Lv = \int_{\Gamma} L(M, P) v(P) d\sigma_P = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r_{MP}} v(P) d\sigma_P.$$

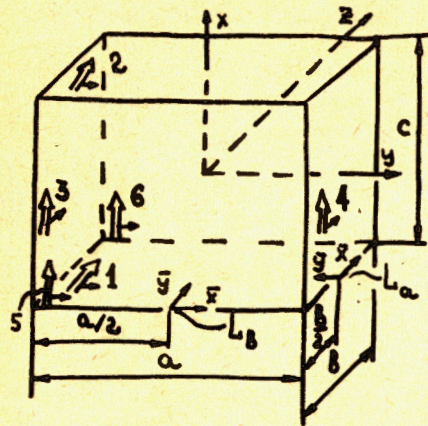
$$Ku = \int_{\Gamma} K(M, P) u(P) d\sigma_P = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r_{MP}^2} u(P) d\sigma_P;$$

Γ - поверхность Ляпунова, геометрически близкая к поверхности параллелепипеда; \vec{n} - внутренняя нормаль в точках Γ ; $d\sigma_P$ - элемент площади Γ ; u, v - граничные значения гармонической функции и ее производной по \vec{n} соответственно.

Дискретизация уравнений проводится на основе коллокации и кусочно-постоянной интерполяции базисными функциями вида

$$\phi_i(M) = \begin{cases} 1, & M \in \Delta S_i \\ 0, & M \in \bar{\Delta S}_i \end{cases}, \quad M \in \Gamma, \quad i=1, N. \text{ Предполагается, что поверх-}$$

ность параллелепипеда разбита на элементарные носители - квадраты $\{\Delta S_i\}_{i=1}^N$ площадью $h^2 = S/N$, где h - шаг разбиения сторон параллелепипеда, S - площадь Γ , N - количество носителей. Узлы сетки - середины квадратов. Нумерация узлов представлена на рисунке.



Обозначения: \Rightarrow - направление главной нумерации, \rightarrow - смещение главного направления; цифры /1-6/ - порядок нумерации граней.

Свойства интегральных операторов K и L , их дискретных аналогов, разрешимость задач - 1/ относительно v и 2/ относительно u - приведены в /1/. В частности, для решения задачи Неймана можно использовать метод последовательных приближений, учитывая, что оператор K - сжимающий на

$$X = \{u \in L_2(\Gamma) : (u, 1) = \int_{\Gamma} u(P) d\sigma_P = 0\}.$$

В дальнейшем через L и K будем обозначать матрицы, соответствующие интегральным операторам

$$L = (l_{ij}) \quad i, j = 1, N; \quad l_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta S_j} \frac{1}{r_{M_i P}} \phi_i(P) d\sigma_P = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta S_j} \frac{1}{r_{M_i P}} d\sigma_P;$$

$$K = (k_{ij}) \quad i, j = 1, N; \quad k_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta S_j} \frac{\cos(\vec{r}_{PM_i} \cdot \vec{n}_P)}{r_{M_i P}^2} d\sigma_P.$$

Поставим каждому двум граням в соответствие блок в матричной записи для L и K . В /4/ с учетом такой блочности изучена структура

матриц L и K , когда Γ - граница параллелепипеда и, отдельно, Γ - поверхность куба. Отмечено, что общая память, необходимая для хранения L и K - $m \cdot n \cdot q$, где m, n, q - число узлов вдоль трех попарно перпендикулярных ребер параллелепипеда. Экономия памяти получается за счет учета структуры матриц на блочном уровне и внутри блока. В случае куба в /5/ экономия памяти для хранения матриц L и K , полученных при дискретизации ГИУ на основе кусочно-линейной интерполяции и коллокации, достигалась на блочном уровне. Используемый массив при этом в 14 раз меньше исходного: вместо 72-х блоков, составляющих L и K размерности $p^2 \times p^2$, в оперативной памяти хранятся только пять блоков $p^2 \times p^2 / p$ - число узлов вдоль стороны куба, $N = 6p^2$. В настоящей работе построен численный метод для поверхности куба, использующий и внутри блочную экономию, что ведет к полной оптимизации памяти. Количественно требуется $2p^3 + (3/2)p(p+1)$ ячеек памяти ЭВМ под матрицы L и K вместо $72p^4$ без оптимизации.

2. ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

С целью численного решения ГИУ изучаются двухуровневые итерационные процессы, ориентированные на некоторые типы параллелепипедов. Исследование процессов основывается на блочности вида /2.1/

	1	2	3	
1	X_1	X_2	X_3	
2	X_4	X_{11}	X_5	= X.
3	X_6	X_7	X_{12}	/2.1/

Примечание.

а/ X отражает общую структуру матриц L и K , цифры 1, 2, 3 соответствуют граням, перпендикулярным осям x, y, z на рисунке;

б/ $a = b = c$ /случай куба/: $X_1 \equiv X_{11} \equiv X_{12}, X_3 \equiv X_6, X_5 \equiv X_7$.

в/ $a = b$: $X_{11} \equiv X_{12}, X_5 \equiv X_7$.

Введем также обозначение

X_{11}	X_5	
X_7	X_{12}	= \bar{X}_1 .

Реализацию процессов проиллюстрируем на примере внешней задачи Неймана $Ku + u = f$.

Рассматриваются два итерационных процесса:

$$1/ \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \end{pmatrix} = (E - r(K + E)) \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \end{pmatrix} + f, \quad 0 < r \leq 1; \quad /2.2/$$

$$2/ \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \end{pmatrix} = (E - r(K + E)) \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \end{pmatrix} + f, \quad 0 < r \leq 1; \quad /2.3/$$

$n = 0, 1, \dots$

Обозначения: $u = (u_1, u_2, u_3)^T$, $f = (f_1, f_2, f_3)^T$, $u_i, f_i, i = 1, 2, 3$ - компоненты соответствующих векторов u и f с учетом блочности по осям. Данные итерационные процессы /варианты метода неполного обращения/ предполагают два последовательных шага. Во время первого шага вычисляются u^{n+1} обращением блока $(E + K)_1 \equiv E + K_1$ /для первого итерационного процесса/ и $(u_2^{n+1}, u_3^{n+1})^T$ - обращением блока $(E + K)_1$ /для второго итерационного процесса/. Второй шаг - пересчет компонент u_2^{n+1} и u_3^{n+1} по формуле /2.2/ /первый процесс/, u_1^{n+1} - по формуле /2.3/ /второй процесс/. Понятно, что обращение $(E + K)_1$ / $(E + K)_1$ / играет существенную роль для ускорения итераций в том случае, когда вес блоков K_1 (K_1) в "матричной площадке" K значителен. Это соответствует определенным конфигурациям параллелепипеда: растянутому ($c \gg a, c \gg b, a \sim b$) и сжатому ($c \ll a, c \ll b$). Логично поэтому применять в случае вытянутого параллелепипеда процесс /2.3/, в случае сжатого - /2.2/.

Примечание.

Обращение $(E + K)_1$, $(E + K)_1$ можно оптимизировать с учетом строения блоков K_1 и K_1^1 . Блоки K_1, K_{11}, K_{12} имеют структуру /укажем общий вид/

0	D
D	0

D - блок размерности $m^2 \times m^2, n^2 \times n^2$ или $q^2 \times q^2$ в зависимости от того, какой из блоков K_1, K_{11}, K_{12} рассматриваем. D - симметрическая, блочно-теплицева матрица

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ a_2 & a_1 & & & a_{k-1} \\ \vdots & & & & a_2 \\ a_k & \dots & \dots & a_2 & a_1 \end{pmatrix};$$

a_i - теплицевы матрицы размерности $m \times m / n \times n$ или $q \times q$, $k = m / n$ или q . Согласно обозначению, введенному в [7], структура D имеет вид $T_k T_k$. При обращении $(E + K)_1, (E + K)_1$ итерационным способом необходимо многократно выполнять умножение K_1 / K_{11} и K_{12} на вектор, что сводится к двум умножениям D на соответствующие векторы. Умножение D на вектор сводится к k^2 умножениям блоков a_i на векторы. Умножение каждого a_i совершается за $O(k \ln k)$ операций [7]. Следовательно, при умножении D на вектор требуется $O(k^3 \ln k)$ операций вместо обычного $O(k^4)$.

Дополнительные возможности оптимизации обращения $(E + K)_1$ возникают при $a = b$. В этом случае K_1 обладает блочно-симметричной структурой

$$\begin{matrix} X_{11} & M \\ M & X_{11} \end{matrix}, \quad \text{где} \quad \begin{matrix} M \\ M \end{matrix} = \begin{matrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{matrix}, \quad \text{причем } C_2, C_3, C_4$$

выражаются через C_1 с помощью операторов перенумерации. $C_i (i = 1, 4)$ - матрицы порядка $n^2 \times n^2$ структуры $G_n T_n$ [7]. Из этой структуры и рассуждения, приведенного выше для K_{11} и K_{12} , следует, что умножение всего блока K_1 можно осуществлять за $O(n^3 \ln n)$ операций.

Коэффициент сжатия q в процессах /2.2/ и /2.3/ зависит от соотношения между сторонами параллелепипеда. Оказывается, что коэффициент сжатия процесса /2.3/ уменьшается при растяжении параллелепипеда ($c \rightarrow \infty$), а /2.2/ - при сжатии ($c \rightarrow 0$). Приведем соответствующие результаты:

а/ процесс /2.3/, $a = b, c > \sqrt{5} \cdot a$.

В этом случае

$$q(r) \leq (1-r) + \frac{2r}{\pi} \arctg \frac{a^2}{2c\sqrt{2a^2 + 4c^2}} + 2r \left(\frac{2}{\pi}\right) \arctg \frac{2a^2}{c\sqrt{5a^2 + c^2}};$$

при $r = 1, a$ - фиксировано и $c \rightarrow \infty, q = 1/c^2$;

б/ Процесс /2.2/.

В этом случае

$$q(r) \leq (1-r) + r \cdot \max \left\{ \frac{2}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{cd}{2a\sqrt{c^2+b^2+4a^2}} + \operatorname{arctg} \frac{2ac}{b\sqrt{4a^2+c^2+b^2}} \right) \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{ca}{2b\sqrt{c^2+a^2+4b^2}} + \operatorname{arctg} \frac{2bc}{a\sqrt{4b^2+c^2+a^2}} \right) \right\} + \\ + \frac{r}{2\pi} \cdot \max_{\substack{d=a \\ d=b}} \left\{ \sum_{i=1}^{n \cdot q} \left\{ \operatorname{arctg} \left(\frac{(c/2+h/2)(\bar{x}_i+h/2)}{(d-\bar{y}_i) \cdot \sqrt{(\bar{x}_i+h/2)^2 + (c/2+h/2)^2 + (d-\bar{y}_i)^2}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{arctg} \left(\frac{(c/2+h/2)(\bar{x}_i-h/2)}{(d-\bar{y}_i) \sqrt{(\bar{x}_i-h/2)^2 + (c/2+h/2)^2 + (d-\bar{y}_i)^2}} \right) \right\} - \right. \\ \left. - \left\{ \operatorname{arctg} \frac{(c/2-h/2)(\bar{x}_i+h/2)}{(d-\bar{y}_i) \sqrt{(\bar{x}_i+h/2)^2 + (c/2-h/2)^2 + (d-\bar{y}_i)^2}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{arctg} \frac{(c/2-h/2)(\bar{x}_i-h/2)}{(d-\bar{y}_i) \sqrt{(\bar{x}_i-h/2)^2 + (c/2-h/2)^2 + (d-\bar{y}_i)^2}} \right\} \right\},$$

где \bar{x}_i, \bar{y}_i - координаты узлов на грани 1, измеренные в системе отсчета L_a при $d=a$, в L_b - при $d=b$ /см. рисунок/, при $r=1$, a, b, m - фиксированные и $c \rightarrow 0$.

$$q(r) \sim \max \left\{ \frac{2}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{cb}{2a\sqrt{c^2+b^2+4a^2}} + \operatorname{arctg} \frac{2ac}{b\sqrt{4a^2+c^2+b^2}} \right) \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{ca}{2b\sqrt{c^2+a^2+4b^2}} + \operatorname{arctg} \frac{2bc}{a\sqrt{4b^2+c^2+a^2}} \right) \right\} + \frac{4}{\pi} m \cdot \max \left\{ \frac{b}{a}, \frac{a}{b} \right\},$$

т.е. $q(r) \sim c$.

Оценим скорость сходимости процессов на первом шаге /обращение $(E+K)_1$ или $(E+K)_1$ /. Оценки получены на основе трехслойной итерационной схемы метода сопряженных направлений /6/ для решения уравнения $Au=f$ вида

$$By_{k+1} = \alpha_{k+1} (B - r_{k+1} A) y_k + (1 - \alpha_{k+1}) B y_{k-1} + \alpha_{k+1} r_{k+1} f, \quad k=1, 2, \dots$$

$$By_1 = (b - r_1 A) y_0 + r_1 f, \quad y_0 \in H, \quad r_{k+1} = \frac{(D\omega_k, z_k)}{(D\omega_k, \omega_k)}, \quad k=0, 1, \dots$$

$$\alpha_{k+1} = \left(1 - \frac{r_{k+1}}{r_k} \cdot \frac{(D\omega_k, z_k)}{(D\omega_{k-1}, z_{k-1})} \cdot \frac{1}{\alpha_k} \right)^{-1}, \quad k=1, 2, \dots,$$

$\alpha_1 = 1$, $\omega_k = B^{-1} r_k$ - поправка, $r_k = \Delta y_k - f$ - невязка, $z_k = y_k - u$ - погрешность.

Приведем окончательные результаты.

1. Первый шаг процесса /2.2/ $(E+K_1)u=f$, $A=A^*=E+K_1 > 0$.
Используется метод сопряженных градиентов. $D=A$.
 $a/B=E$.
Тогда

$$q_n = \frac{2 \cdot (\Delta / (1 + \sqrt{1 - \Delta^2}))^n}{1 + (\Delta / (1 + \sqrt{1 - \Delta^2}))^{2n}},$$

где q_n определяется соотношением

$$\|z_n\|_D \leq q_n \|z_0\|_D. \quad /2.4/$$

При этом $1 > \Delta > 0$, $\Delta = \lambda_{\max}(K_1)$ - максимальное собственное значение оператора K_1 . В частности, для куба $\Delta = 0,128$, для параллелепипеда

$$\Delta = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{ab}{2c\sqrt{a^2+b^2+4c^2}};$$

б/ $B=E+K_1=A$.

В этом случае $q_1=0$. Процесс сходится за одну итерацию.

2. Первый шаг процесса /2.3/

Случай $a=b$. $(E+\bar{K}_1)u=f$, $(E+\bar{K}_1) \neq (E+\bar{K}_1)^*$.

Используется метод сопряженных погрешностей, который характеризуется следующим выбором операторов: $D=B_0$, $B=(A^*)^{-1} B_0$, $B_0 = B_0^* > 0$.

$$a/D=B_0=E, \quad B=(A^*)^{-1}. \quad q_n = \frac{2(\Delta_1 + \Delta_2)^n}{1 + (\Delta_1 + \Delta_2)^{2n}}, \quad \text{где } 1 > \Delta_1 > 0,$$

$$1 > \Delta_2 > 0, \quad 1 > \Delta_1 + \Delta_2, \quad \Delta_1 = \lambda_{\max}(K_1), \quad \Delta_2 = \lambda_{\max}(K_5).$$

В частности, для куба $\Delta_1 = 0,128$, $\Delta_2 = 0,436$, для параллелепипеда:

$$\Delta_1 = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} (ab / (2c\sqrt{a^2+b^2+4c^2})), \quad \Delta_2 = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} (2ac / (b\sqrt{4a^2+c^2+b^2}))$$

/т.е. $\Delta_1 + \Delta_2$ ограничена сверху/.

Б/ D = B₀ = A*A /случай метода сопряженных невязок/ B = A.
q₁ = 0. Процесс сходится за одну итерацию.

Численно реализован процесс вида /2.2/ в случае стандартной поверхности - граници куба. Расчетные формулы имеют вид

$$I. u_1^{n+1} = (E + K_1)^{-1} \tilde{f}_1, \quad \tilde{f}_1 = f_1 - K_2 u_2^n - K_3 u_3^n;$$

$$II. u_2^{n+1} = -K_1 u_2^n + \tilde{f}_2, \quad \tilde{f}_2 = f_2 - K_4 u_1^{n+1} - K_5 u_3^n;$$

$$III. u_3^{n+1} = -K_1 u_3^n + \tilde{f}_3, \quad \tilde{f}_3 = f_3 - K_3 u_1^{n+1} - K_5 u_2^n.$$

В /5/ обращение (E + K₁) реализовалось на основе метода простых итераций, и формула I имела вид

$$(u_1^{n+1})^{J+1} = -K_1 (u_1^{n+1})^J + \tilde{f}_1, \quad J = 0, 1, \dots, m, \quad m < \infty.$$

Приводились численные характеристики сходимости процесса /2.2/. В данной работе начальный шаг двухуровневого процесса /2.2/ осуществляется на основе метода сопряженных градиентов в форме 1.а. Приведем результаты численных исследований. Для коэффициента сжатия \bar{q} итерационного процесса /2.2/ при $r = 1$ в табл.1 для сетки шага $h = 0,4$, заданной на поверхности куба со стороны, равной 0,8, представлена зависимость величины $\|u^{n+1} - u^n\|_{\ell_2}$ от номера итерации n. Таблица характеризует

$$\bar{q} = \bar{q}(n) = \|u^{n+1} - u^n\|_{\ell_2} / \|u^n - u^{n-1}\|_{\ell_2}.$$

Видно, что $\bar{q} \sim 0,32$. Этот результат лучше, чем для экономичного численного метода, описанного в /1/ и использующего аналогичный принцип построения систем линейных уравнений для ГИУ. В методе работы /1/ для этой же сетки $\bar{q} \sim 0,41$. Численные исследования коэффициента убывания ошибки для начального шага процесса /2.2/ при $r = 1$ уточняют оценку /2.4/. Численные рас-

четы при $n = 5$ показали: $\frac{\|z_n\|_D}{\|z_0\|_D} = \prod_{i=1}^n c_i$, и $\prod c_i$ находится в диа-

пазоне $10^{-6} \div 10^{-5}$. В табл.2 приводится результат применения процесса, аналогичного /2.2/, для решения внутренней задачи Неймана в случае куба со стороной 0,8. Таблица характеризует убывание ошибки решения

$$\delta u^h = \|u^h - u^*\| = \max_{1 \leq i \leq N} |u_i^* - u_i^h|,$$

где $u^* \equiv (u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*)$, $u^h \equiv (u_1^h, u_2^h, \dots, u_N^h)$, u_i^* - значение точного решения в i-узле, u_i^h - приближенного.

Таблица 1

n	1	2	3	4	5
$\ u^{n+1} - u^n\ _{\ell_2}$	$8,920 \cdot 10^{-1}$	$2,929 \cdot 10^{-1}$	$9,621 \cdot 10^{-2}$	$3,160 \cdot 10^{-2}$	$1,038 \cdot 10^{-2}$

Таблица 2

Внутренняя задача Неймана

Тестовая гармоническая функция	δu^n			
	h	h/2	h/4	h/8
$u = x$	0,1076	0,0484	0,0259	0,0128

Дальнейшее уточнение решения можно провести на последовательности сеток.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.В., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р11-84-595, Дубна, 1984.
2. Соколов Ю.Д. Метод осреднения функциональных поправок. "Наукова думка", Киев, 1967.
3. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р11-83-596, Дубна, 1983.
4. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р11-83-329, Дубна, 1983.
5. Егоров А.В., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р11-84-596, Дубна, 1984.
6. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. "Наука", М., 1978.
7. Тартышников Е.Е. Некоторые алгоритмы, связанные с матрицами типа теплицевых. В кн.: Вычислительные методы и программирование. Изд-во МГУ, М., 1981, вып.35, с.158-180.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 декабря 1984 года.

В Объединенном институте ядерных исследований начал выходить сборник "Краткие сообщения ОИЯИ". В нем будут помещаться статьи, содержащие оригинальные научные, научно-технические, методические и прикладные результаты, требующие срочной публикации. Будучи частью "Сообщений ОИЯИ", статьи, вошедшие в сборник, имеют, как и другие издания ОИЯИ, статус официальных публикаций.

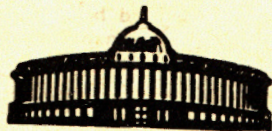
Сборник "Краткие сообщения ОИЯИ" будет выходить регулярно.

The Joint Institute for Nuclear Research begins publishing a collection of papers entitled *JINR Rapid Communications* which is a section of the JINR Communications and is intended for the accelerated publication of important results on the following subjects:

Physics of elementary particles and atomic nuclei.
Theoretical physics.
Experimental techniques and methods.
Accelerators.
Cryogenics.
Computing mathematics and methods.
Solid state physics. Liquids.
Theory of condensed matter.
Applied researches.

Being a part of the JINR Communications, the articles of new collection like all other publications of the Joint Institute for Nuclear Research have the status of official publications.

JINR Rapid Communications will be issued regularly.



Егоров А.В., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н.

P11 84-795

Блочные итерационные процессы численного решения граничных интегральных уравнений для оператора Лапласа на поверхности параллелепипеда

Изучены блочные итерационные процессы численного решения граничных интегральных уравнений для уравнения Лапласа, заданных на поверхности параллелепипеда. Устанавливаются скорость сходимости процессов, соответствие им определенных типов параллелепипедов. Дискретизация интегральных уравнений проводится на основе кусочно-постоянной интерполяции и коллокации. Реализация одного из рассматриваемых методов решения, возникающих при дискретизации линейных систем уравнений проведена для случая стандартной границы - поверхности куба. Численный алгоритм предполагает полную оптимизацию оперативной памяти ЭВМ под изучаемые матричные массивы. В частности, для поверхности куба хранение матриц жесткости системы требует массива с числом элементов $2p^3 + (3/2)p(p+1)$, где p - число узлов вдоль стороны куба. Приводятся численные результаты по решению задачи Неймана для уравнения Лапласа.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Egorov A.V., Zhidkov E.P., Khoromskij B.N.

P11-84-795

The Block Iterational Processes of Numerical Solution of Boundary Integral Equations for Laplace Operator on the Parallelepiped's Surface

The block iterational processes of numerical solution of boundary equations for Laplace equation are studied. Velocity of the convergence of the processes and relation to the processes the certain types of the parallelepipeds is defined. The discretization of the integral equations is made on the basis of sectionally constant interpolation and collocation. The realization of one of the studied methods of solution of linear systems of equations occurring after the discretization is fulfilled for the case of standard boundary - the cube surface. The numerical algorithm uses full optimization of the memory volume necessary to store these matrices. In particular, memory volume with number of the elements $2p^3 + (3/2)p(p+1)$, where p - the number of points along the cube side, are necessary to store matrices for the case cube's surface. The numerical results of solving Neumann's problem with Laplace operator are given.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984