

**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P11-84-775

Е.П.Жидков, Ю.Ю.Лобанов, О.В.Сидорова

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ
С ВЕСОМ ДЛЯ КОНТИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ
ПО УСЛОВНОЙ МЕРЕ ВИНЕРА**

1984

Введение

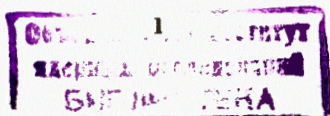
Большим прогрессом в современной квантовой физике явилось создание калибровочной теории на решетке (см. напр. ^{1/}, а также ссылки в этой работе). В последнее время, однако, некоторые авторы (см. ^{2/}) пытаются вычислять континуальные интегралы с помощью методов, отличных от ставших уже традиционными методов Монте-Карло на пространственно-временных решетках. Исследование же континуальных интегралов по гауссовой мере ^{3/} началось еще задолго до построения решеточных теорий и связано с именем Н. Винера ^{4/}. Р.Х. Камероном ^{5/} было положено начало целого направления в развитии методов приближенного вычисления континуальных интегралов, заключающегося в создании приближенных формул, точных на классе функциональных многочленов заданной степени. Составные формулы (см. ^{3/}) такого типа произвольного порядка точности построены и исследованы в ^{6/}. Обзор существующих методов приближенного вычисления континуальных интегралов и вопросы теории содержатся в книгах Л.А. Яновича ^{3/}, Ю.Л. Далецкого и С.В. Фомина ^{7/}.

Следует отметить, что еще до конца не решена проблема, как записать подлежащие вычислению физические величины в квантовой теории поля, выражающиеся через интегралы типа фейнмановских, в виде континуальных интегралов по определенной мере. Некоторый прогресс в этом направлении, однако, был достигнут, о чем свидетельствует, в частности, книга Дж. Глимма и А. Джаффе ^{8/}. В ней строго обосновывается построение гауссовой меры в континуальном интеграле для $P(\varphi)_2$ -модели.

Условная мера Винера (см. напр., ^{9/} а также ^{3/}) является частным случаем гауссовых мер и представляет собой вероятностную меру на пространстве непрерывных функций $C[0, 1]$, удовлетворяющих условию $X(0) = X_0$; $X(1) = X_1$ (X_0, X_1 - вещественные константы). В дальнейшем мы будем полагать, что $X_0 = X_1 = 0$ (этого можно достичь с помощью замены переменной интегрирования в континуальном интеграле). Интеграл от функционала $F[X]$, заданного на $C = \{C[0, 1]; X(0) = X(1) = 0\}$, по условной мере Винера будем обозначать следующим образом:

$$\int_C F[X] d_w X.$$

Интегрирование по условной мере Винера широко используется в теоретической физике. В частности, в квантовой механике решение уравнения Шредингера выражается в евклидовой метрике через интеграл по условной



мере Винера с помощью известной формулы Фейнмана-Каца (см. напр. /10/, а также /8/).

Приближенные формулы для интегралов по условной мере Винера, точные для функциональных многочленов заданной степени, были построены Л.Д. Фосдиком и Х.Ф. Жорданом /11/. В ряде задач квантовой механики оказывается целесообразным использовать приближенные формулы с весом, поскольку функционалы могут содержать множитель, который удобно выделить в качестве весового функционала, и тем самым расширить класс функционалов, на котором формула будет точна. Построению и исследованию приближенных формул с таким весом и посвящена данная работа.

I. Построение приближенных формул с весом

Рассмотрим интеграл по условной мере Винера

$$I_0 = \int_C P_0[x] F[x] d_{w^*} x, \quad (1)$$

где

$$P_0[x] = \exp \left\{ \lambda \int_0^1 \rho(t) x^2(t) dt \right\}, \quad (2)$$

λ - вещественный параметр, $\rho(t)$ - заданная функция из $C[0,1]$.
Теорема I

Интеграл (1) с весом (2) может быть записан в виде

$$\int_C P_0[x] F[x] d_{w^*} x = \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} \int_0^1 (1-s) K(s) ds \right\} \cdot \int_C F[\varphi(x)] d_{w^*} x, \quad (3)$$

где

$$\varphi(x(t)) = x(t) - (1-t) \frac{1}{v(t)} \int_0^t K(s) v(s) x(s) ds, \quad (4)$$

$$v(t) = \exp \left\{ \int_0^t (1-s) K(s) ds \right\}, \quad (5)$$

$K(s)$ - решение дифференциального уравнения

$$(1-s) K'(s) - (1-s)^2 K^2(s) - 3K(s) - 2\lambda \rho(s) = 0, \quad s \in [0,1] \quad (6)$$

$$K(1) = \frac{2\lambda}{3}.$$

Доказательство

Рассмотрим линейное преобразование $x(t) \rightarrow y(t)$:

$$y(t) = x(t) + (1-t) \int_0^t K(s) x(s) ds, \quad (7)$$

где $K(s)$ - произвольная непрерывная функция на $[0,1]$.

Преобразование (7) взаимно однозначно отображает пространство функций C само на себя. Решая уравнение (7) относительно x , получаем, что обратное преобразование имеет вид:

$$x(t) = y(t) - (1-t) \exp \left\{ -\int_0^t (1-s) K(s) ds \right\} * \int_0^t \exp \left\{ \int_0^s (1-v) K(v) dv \right\} K(s) y(s) ds = \varphi(y(t)). \quad (8)$$

Очевидно, что рассмотренное преобразование переводит интеграл по условной мере Винера в интеграл по той же мере.

Рассмотрим линейное преобразование

$$y = x + Ax = (E+A)x, \quad (9)$$

где $Ax(t) = \int_0^1 Q(t,s) x(s) ds$.

Тогда, аналогично формулам для "обычной" меры Винера (см. /9/), может быть получена формула замены переменных в интеграле по условной мере Винера:

$$\int_C F[y] d_{w^*} y = |D| \int_C F[x+Ax] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{d}{dt}(Ax) \right]^2 dt - \int_0^1 \dot{x} \frac{d}{dt}(Ax) dt \right\} d_{w^*} x, \quad (10)$$

где D - определитель Фредгольма ядра $Q(t,s)$.

Преобразование (7) является частным случаем преобразования (9), а именно при

$$Q(t,s) = \begin{cases} (1-t)K(s), & s \leq t \\ 0, & s > t. \end{cases}$$

Тогда

$$D = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 Q(s,s) ds \right\} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 (1-s) K(s) ds \right\}.$$

После преобразования выражения, стоящего в экспоненте в правой части (10), получаем:

$$\int_C F[y] d_{w^*} y = |D| \cdot \int_C F[x+Ax] \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 [(1-t)^2 K^2(t) + 3K(t) - (1-t)K'(t)] x^2(t) dt \right\} d_{w^*} x.$$

Следовательно, если $K(t)$ является решением задачи (6), то

$$\int_C F[x] \exp \left\{ \lambda \int_0^1 \rho(t) x^2(t) dt \right\} d_{w^*} x = |D|^{-1} \int_C F[(E+A)^{-1} y] d_{w^*} y,$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

Следствие

Пусть

$$I = \int_C P[x] F[x] d_{w^*} x,$$

где

$$P[x] = \exp \left\{ \int_0^1 [\lambda \rho(t) x^2(t) + g(t) x(t)] dt \right\}, \quad (11)$$

$g(t)$ - заданная функция из $C[0,1]$.

Тогда

$$I = \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^1 (1-s)K(s) ds\right\} \cdot \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^1 x_0^2(t) dt\right\} \cdot \int_C F[\varphi(x) + \alpha] d_{w^*} x, \quad (I2)$$

где

$$\alpha(t) = \int_0^t x_0(s) ds - (1-t) \frac{1}{v(t)} \int_0^t K(s) v(s) \left[\int_0^s x_0(u) du \right] ds, \quad (I3)$$

$$x_0(t) = \int_0^t [K(s) v(s) B(s) - g(s)] ds + c, \quad \int_0^1 x_0(s) ds = 0,$$

$$B(t) = \int_t^1 g(s) (1-s) \frac{1}{v(s)} ds,$$

$\varphi(x)$, $v(s)$, $K(s)$ по-прежнему удовлетворяют (4)-(6). Действительно, подставляя в (3) функционал $F[x]$ в виде

$$F[x] = \exp\left\{\int_0^1 g(t)x(t) dt\right\} \cdot \Phi[x] = G[x] \cdot \Phi[x],$$

получим:

$$\int_C P[x] \Phi[x] d_{w^*} x = \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^1 (1-s)K(s) ds\right\} \cdot \int_C G[(E+A)^{-1}y] \Phi[(E+A)^{-1}y] d_{w^*} y. \quad (I4)$$

Произведем еще одну замену переменных:

$$y(t) = z(t) + \int_0^t x_0(s) ds \equiv z(t) + w(t),$$

где $x_0(s)$ удовлетворяет

$$\int_0^1 x_0(s) ds = 0.$$

Тогда, после некоторых преобразований,

$$\begin{aligned} \int_C G[(E+A)^{-1}y] \Phi[(E+A)^{-1}y] &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^1 \dot{w}^2(t) dt\right\} \times \\ &\times \int_C G[(E+A)^{-1}(z+w)] \Phi[(E+A)^{-1}(z+w)] \cdot \exp\left\{-\int_0^1 \dot{w}(t) \dot{z}(t) dt\right\} d_{w^*} z = \\ &= \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^1 x_0^2(s) ds\right\} \cdot \int_C \exp\left\{\int_0^1 z(t) [g(t) - K(t)v(t) \left[\int_t^1 g(s) \frac{(t-s)}{v(s)} ds \right] + \dot{x}_0(t)] dt\right\} \times \\ &\times \Phi[(E+A)^{-1}(z(t) + \int_0^t x_0(s) ds)] d_{w^*} z. \end{aligned}$$

Отсюда, возвращаясь к (I4), с учетом $(E+A)^{-1} = \mathcal{P}$ из (4) при выполнении (I3) получаем (I2).

2. Формулы, точные для функциональных многочленов

На основании следствия теоремы I может быть получено семейство приближенных формул с весом, зависящих от натурального параметра m . А именно, для любого фиксированного m справедлива следующая теорема.

Теорема 2

При выполнении условий (I3) следствия из теоремы I приближенная формула

$$\int_C \exp\left\{\int_0^1 [\lambda p(t)x^2(t) + g(t)x(t)] dt\right\} \cdot F[x] d_{w^*} x \approx \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^1 (1-s)K(s) ds\right\} \cdot \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^1 x_0^2(t) dt\right\} \times \quad (I5)$$

$$\times \frac{1}{2^m} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 F[\tilde{\theta}_m(\vec{u}, \cdot) + a(\cdot)] du_1 \dots du_m,$$

где

$$\tilde{\theta}_m(\vec{u}, t) = \sum_{k=1}^m c_k^{(m)} \tilde{\theta}(u_k, t),$$

$$\tilde{\theta}(w, t) = f(w, t) - \tilde{p}(w, t),$$

$$[c_k^{(m)}]^2 - \text{корни многочлена } Q_m(z) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{z^{n-k}}{k!}; \quad (I6)$$

$$\tilde{p}(w, t) = \begin{cases} \text{sign } w, & t \leq |w| \\ 0, & t > |w| \end{cases}$$

$$f(w, t) = \frac{(1-t) \text{sign } w}{v(t)} \left[1 + \int_0^{\min\{|w|, t\}} K(s) v(s) ds \right]$$

точна для любого функционального многочлена степени $\leq 2m+1$.

Доказательство

Из [11] известна следующая формула:

$$\int_C F[x] d_{w^*} x \approx \frac{1}{2^m} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 F[\theta_m(\vec{u}, \cdot)] du_1 \dots du_m, \quad (I7)$$

где

$$\theta_m(\vec{u}, t) = \sum_{k=1}^m c_k^{(m)} \rho(u_k, t),$$

$$[c_k^{(m)}]^2 - \text{корни многочлена } Q_m(z) \text{ из (I6);}$$

$$\rho(u, t) = \begin{cases} -t \operatorname{sign} u, & t \leq |u| \\ (t-t) \operatorname{sign} u, & t > |u| \end{cases}$$

Формула (I7) точна для функциональных многочленов степени $\leq 2m+1$.

Применим эту формулу для нахождения континуального интеграла, стоящего в правой части равенства (I2):

$$\int_C F[x(t) - (t-t) \frac{1}{v(t)} \int_0^t K(s) v(s) x(s) ds + a(t)] d_{w^*} x \approx \\ \approx \frac{1}{2^m} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 F[\theta_m(\vec{u}, t) - (t-t) \frac{1}{v(t)} L(t, \theta_m) + a(t)] du_1 \dots du_m,$$

здесь $L(t, x) = \int_0^t K(s) v(s) x(s) ds$.

После некоторых преобразований получаем:

$$L(t, \theta_m) = \sum_{k=1}^m c_k^{(m)} \operatorname{sign} u_k [v(t) - 1 - \int_0^{\min\{|u_k|, t\}} K(s) v(s) ds].$$

Таким образом,

$$\int_C F[\varphi(x) + a] d_{w^*} x \approx \frac{1}{2^m} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 F[\sum_{k=1}^m c_k^{(m)} \{ \rho(u_k, t) - (t-t) \operatorname{sign} u_k + \\ + \frac{(t-t) \operatorname{sign} u_k}{v(t)} (1 + \int_0^{\min\{|u_k|, t\}} K(s) v(s) ds) \} + a(t)] du_1 \dots du_m.$$

Подставляя это соотношение в (I2) и вводя обозначения (I6), получаем (I5). Ясно, что если $F[x]$ является функциональным многочленом k -й степени, то и $F[\varphi(x) + a]$, где $\varphi(x)$ - линейное преобразование, также будет функциональным многочленом той же степени. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь один частный случай, когда в (I5)

$$\begin{aligned} \rho(t) &\equiv 1, \\ g(t) &\equiv g = \text{const}. \end{aligned} \quad (I8)$$

Решая (6), получаем, что

$$K(t) = \frac{1}{1-t} [\sqrt{2\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{2\lambda}(1-t) - \frac{1}{1-t}]. \quad (I9)$$

Далее,

$$v(t) = \frac{(1-t) \sin \sqrt{2\lambda}}{\sin \sqrt{2\lambda}(1-t)}, \quad (20)$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^1 K(s) (1-s) ds\right\} = \frac{1}{v(1)} = \sqrt{\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sin \sqrt{2\lambda}}},$$

$$x_0(t) = f_0(t) - \int_0^t \frac{f_0(s)}{1-s} ds,$$

где

$$f_0(t) = \frac{g[1 - \cos \sqrt{2\lambda}(1-t)]}{\sqrt{2\lambda} \cdot \sin \sqrt{2\lambda}(1-t)}.$$

Проводя несложные преобразования, получаем, что

$$\int_0^1 x_0^2(t) dt = \int_0^1 f_0^2(t) dt = \frac{g^2}{\lambda \sqrt{2\lambda}} \left[\operatorname{tg} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} - \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \right].$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_C \exp\left\{\int_0^1 [\lambda x^2(t) + g x(t)] dt\right\} F[x] d_{w^*} x \approx \\ \approx \sqrt{\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sin \sqrt{2\lambda}}} \cdot \exp\left\{\frac{g^2}{2\lambda \sqrt{2\lambda}} \left[\operatorname{tg} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} - \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \right]\right\} \times \\ \times \frac{1}{2^m} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 F[\tilde{\theta}_m(\vec{u}, \cdot) + a(\cdot)] du_1 \dots du_m, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\alpha(t) = \int_0^t x_0(s) ds - \sin \sqrt{2\lambda}(1-t) \int_0^t \frac{\sqrt{2\lambda}(1-s) \cos \sqrt{2\lambda}(1-s) - \sin \sqrt{2\lambda}(1-s)}{(1-s) \sin^2 \sqrt{2\lambda}(1-s)} \left[\int_0^s x_0(u) du \right] ds.$$

Графики зависимости $\frac{1}{g} \alpha(t)$ для различных λ приведены на рис. I.

Заметим, что формула (21) справедлива для $0 \leq \lambda < \pi^2/2$. В случае $-\infty < \lambda \leq 0$ имеет место приближенная формула

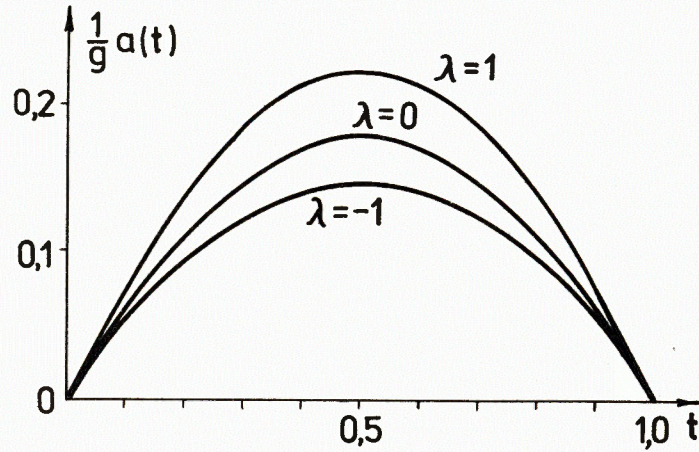


Рис. 1

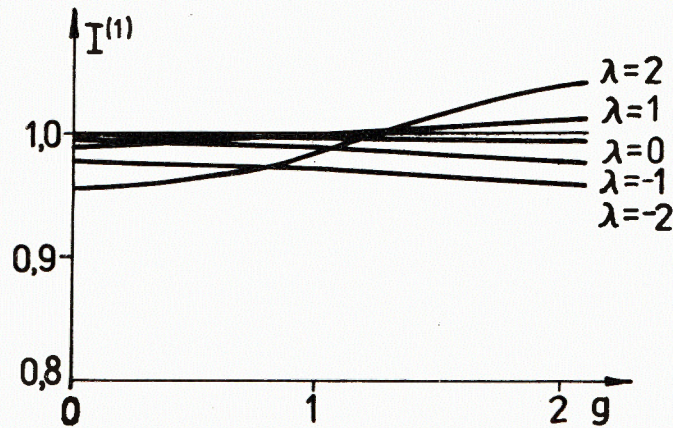


Рис. 2

$$\int_C \exp\left\{ \int_0^1 [\lambda x^2(t) + g x(t)] dt \right\} F[x] d_{W^*} x \approx \quad (22)$$

$$\approx \sqrt{\frac{\sqrt{-2\lambda}}{\operatorname{sh}\sqrt{-2\lambda}}} \exp\left\{ \frac{g^2}{2\lambda\sqrt{-2\lambda}} \left[t h \sqrt{\frac{\lambda}{2}} - \sqrt{-\frac{\lambda}{2}} \right] \right\} \times \int_{\underbrace{-1 \dots -1}_m}^1 \dots \int^1 F[\tilde{\theta}_m(\vec{u}, \cdot) + a(\cdot)] du_1 \dots du_m .$$

3. Оценка остаточного члена

Приближенную формулу (15) можно записать в виде:

$$I(F) = I^{(m)}(F) + R^{(m)}(F), \quad (23)$$

где $I(F)$ - точное значение интеграла от функционала F с данным весом; $I^{(m)}(F)$ - приближенное значение, вычисляемое по формуле (15); $R^{(m)}(F)$ - остаток приближенной формулы. Ясно, что $|R^{(m)}(F)|$ будет тем меньше, чем "ближе" $F[x]$ к функциональному многочлену степени $\leq 2m+1$.

Пусть интегрируемый с весом $P[x] = \exp\left\{ \int_0^1 [\lambda x^2(t) + g x(t)] dt \right\}$ по условной мере Винера функционал $F[x]$ допускает представление

$$F[x] = P_{2m+1}[x] + \varkappa_{2m+1}[x] \quad (m=1, 2, 3, \dots), \quad (24)$$

где $P_{2m+1}[x]$ - функциональный многочлен степени $\leq 2m+1$. Частным случаем представления функционала F в виде (24) является разложение в ряд Тейлора. Следующая теорема устанавливает оценку остаточного члена формулы (21) в зависимости от m .

Теорема 3

Пусть остаток $\varkappa_{2m+1}[x]$ представления (24) для функционала F оценивается выражением:

$$|\varkappa_{2m+1}[x]| \leq c_1(m) \cdot \exp\left\{ c_2(m) \cdot \int_0^1 x^2(t) dt \right\}, \quad (25)$$

$$c_1(m), c_2(m) \geq 0;$$

$$0 \leq c_3(m) < \frac{\pi^2}{2}, \quad c_3(m) = \lambda + c_2(m).$$

Тогда

$$|R^{(m)}(F)| \leq C_1(m) \cdot \left[\sqrt{\frac{2C_3(m)}{\sin \sqrt{2C_3(m)}}} \cdot \exp\left\{ \frac{g^2}{2C_3(m)\sqrt{2C_3(m)}} \cdot x \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[\operatorname{tg} \sqrt{\frac{1}{2}C_3(m)} - \sqrt{\frac{1}{2}C_3(m)} \right] \right\} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sin \sqrt{2\lambda}}} \cdot \exp\left\{ \frac{g^2}{2\lambda\sqrt{2\lambda}} \left[\operatorname{tg} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} - \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \right] + \frac{1}{6}C_2(m)\theta(m) \right\} \right], \quad (26)$$

где

$$\theta(m) = (d_1\sqrt{m} + d_2)^2, \\ d_1 = \sqrt{2} \left(\frac{3T}{\sin \sqrt{2\lambda}} \cdot \frac{\pi}{\pi - \sqrt{2\lambda}} + \frac{2\lambda}{\pi^2 - 2\lambda} + 1 \right), \\ d_2 = \sqrt{2} g \frac{\operatorname{tg} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}} \left(1 + T \frac{\pi^2 \sin \sqrt{2\lambda} + \pi \sqrt{2\lambda}}{(\pi^2 - 2\lambda) \sin \sqrt{2\lambda}} \right), \quad (27) \\ T = \int_0^1 |K(s)U(s)| ds,$$

$K(s)$, $U(s)$ определяются согласно (19)-(20).

Доказательство

Запишем $R^{(m)}(F)$ в виде

$$R^{(m)}(F) = \int_C P[x] z_{2m+1}[x] d_{W^*} x - I^{(m)}(z_{2m+1}) \quad (28)$$

и оценим величину $l_1 = \int_C P[x] z_{2m+1}[x] d_{W^*} x$. При условии (25) будем иметь:

$$|l_1| \leq \int_C C_1(m) \exp\left\{ \int_0^1 [\lambda x^2(t) + g x(t)] dt + C_2(m) \int_0^1 x^2(t) dt \right\} d_{W^*} x = \\ = C_1(m) \cdot \frac{\sqrt{2(\lambda + C_2(m))}}{\sqrt{\sin \sqrt{2(\lambda + C_2(m))}}} \exp\left\{ \frac{g^2}{2(\lambda + C_2(m))^{3/2}} \cdot \left[\operatorname{tg} \sqrt{\frac{\lambda + C_2(m)}{2}} - \sqrt{\frac{\lambda + C_2(m)}{2}} \right] \right\} \quad (29)$$

(ср. с формулой (31)).

Для оценки величины $l_2 = I^{(m)}(z_{2m+1})$ представим квадратичный функционал $\int_0^1 x^2(t) dt$ в виде (см. /3/):

$$\int_0^1 x^2(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(x, e_k) \frac{2}{H}.$$

Здесь $\gamma_k = \frac{1}{k^2 \pi^2}$; $e_k(t) = \frac{\sqrt{2}}{k\pi} \sin k\pi t$. Тогда, согласно (21),

$$|l_2| \leq \sqrt{\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sin \sqrt{2\lambda}}} \exp\left\{ \frac{g^2}{2\lambda\sqrt{2\lambda}} \left[\operatorname{tg} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} - \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \right] \right\} \cdot |\tilde{l}_2|,$$

где

$$\tilde{l}_2 = \frac{1}{2^m} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 C_1(m) \exp\left\{ C_2(m) \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k([\tilde{\theta}_m(\vec{u}, \cdot) + \alpha(\cdot)], e_k)^2 \right\} du_1 \dots du_m.$$

Применяя в выражении

$$|(\tilde{\theta}_m + \alpha, e_k)|^2 \leq \left[\sum_{j=1}^m C_j^{(m)} |(\theta(u_j, \cdot), e_k)| + |(\alpha, e_k)| \right]^2$$

неравенство Коши-Буняковского и воспользовавшись оценками

$$\left| \sum_{j=1}^m C_j^{(m)} \right| \leq \sqrt{m},$$

$$|(\theta, e_k)| \leq \frac{3T\sqrt{2}}{\sin \sqrt{2\lambda}} \cdot \frac{k\pi}{k\pi - \sqrt{2\lambda}} + \left(1 + \frac{2\lambda}{k^2\pi^2 - 2\lambda} \right) \sqrt{2},$$

$$|(\alpha, e_k)| \leq g\sqrt{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}} \left[1 + T \frac{k^2\pi^2 \sin \sqrt{2\lambda} + k\pi \sqrt{2\lambda}}{(k^2\pi^2 - 2\lambda) \cdot \sin \sqrt{2\lambda}} \right],$$

получаем

$$|\tilde{l}_2| \leq C_1(m) \cdot \exp\left\{ C_2(m) \cdot \theta(m) \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \right\}, \quad (30)$$

где $\theta(m)$ и T определяются (27).

Поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = \frac{1}{6}$, для $|R^{(m)}(F)| \leq |l_1| + |l_2|$

из (29) и (30) получаем оценку (26). Теорема доказана.

Таким образом, достаточным условием стремления к нулю остаточного члена формулы (21) $R^{(m)}(F)$ при $m \rightarrow \infty$ является такое стремление к нулю остатка $z_{2m+1}[x]$ при $m \rightarrow \infty$, что

$$c_2(m) \equiv c_2 = \text{const.},$$

$$c_1(m) \cdot \exp\left\{\frac{1}{6} c_2 (d_1 \sqrt{m} + d_2)^2\right\} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

4. Примеры

Рассмотрим в качестве примера нахождение интеграла

$$I = \int_C \exp\left\{\int_0^1 [\lambda x^2(t) + g x(t)] dt\right\} d_{w^*} x.$$

Используя (2I), получаем:

$$I = \frac{\sqrt[4]{2\lambda}}{\sqrt{\sin\sqrt{2\lambda}}} \exp\left\{\frac{g^2}{2\lambda\sqrt{2\lambda}} \left[tg\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right]\right\}. \quad (3I)$$

Формула (2I) дает в данном случае точный ответ. Нетрудно убедиться, что он совпадает с результатом, полученным путем рассуждений, аналогичных рассуждениям, проделанным в [9] для $g = 0$. Действительно, после некоторых преобразований для интеграла несколько более общего вида будем иметь:

$$\int_C \exp\left\{\int_0^1 [\lambda p(t)x^2(t) + g(t)x(t)] dt\right\} d_{w^*} x = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(0)}} \cdot \exp\left\{\frac{1}{\mathcal{D}(0)} \int_0^1 g(t)\mathcal{D}(t) \int_0^t R(s)g(s) ds dt\right\}, \quad (32)$$

где $\mathcal{D}(t)$ - решение задачи

$$\mathcal{D}''(t) + 2\lambda p(t)\mathcal{D}(t) = 0 \quad t \in [0, 1]$$

$$\mathcal{D}(1) = 0$$

$$\mathcal{D}'(1) = -1,$$

$R(t)$ - решение задачи

$$R''(t) + 2\lambda p(t)R(t) = 0 \quad t \in [0, 1]$$

$$R(0) = 0$$

$$R'(0) = 1.$$

При $p(t) \equiv 1$; $g(t) \equiv g$ получаем

$$\mathcal{D}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \sin \sqrt{2\lambda}(t-t),$$

$$R(t) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \sin \sqrt{2\lambda} t,$$

после чего из (32):

$$I = \frac{\sqrt[4]{2\lambda}}{\sqrt{\sin\sqrt{2\lambda}}} \exp\left\{\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sin\sqrt{2\lambda}} g^2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \sin\sqrt{2\lambda}(t-t) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \sin\sqrt{2\lambda} s ds dt\right\} = \frac{\sqrt[4]{2\lambda}}{\sqrt{\sin\sqrt{2\lambda}}} \exp\left\{\frac{g^2}{2\lambda\sqrt{2\lambda}} \left[tg\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right]\right\},$$

что совпадает с (3I).

Рассмотрим теперь интеграл

$$I = \int_C P[x] \exp\left\{-\int_0^1 [\lambda x^2(t) + g x(t)] dt\right\} d_{w^*} x, \quad (33)$$

где $P[x]$ определяется согласно (II) при условии (I8). Очевидно, что точный ответ

$$I = 1.$$

Результаты приближенного вычисления интеграла (33) по формуле (2I) при $m=1$ для некоторых значений параметров λ и g , полученные на ЭВМ CDC-6500, приведены в таблице I и в таблице 2 (для $\lambda=0$). Графики зависимости результатов от g при различных λ показаны на рис.2. Графики демонстрируют хорошую точность приближенных вычислений при малых значениях параметров λ и g . С ростом λ и g погрешность возрастает, поскольку функционал F все более "отклоняется" от функционального многочлена фиксированной степени.

Оценим погрешность формулы (2I) при вычислении интеграла (33) в случае $\lambda = 0$. Функционал $F[x] = \exp\{-g \int_0^1 x(t) dt\}$ представляется в виде ряда

$$F[x] = 1 + \sum_{k=1}^{2m+1} \frac{(-1)^k}{k!} \left[g \int_0^1 x(t) dt \right]^k + z_{2m+1}[x],$$

где

$$z_{2m+1}[x] = \frac{1}{(2m+2)!} \exp\left\{-\theta g \int_0^1 x(t) dt\right\} \cdot \left[g \int_0^1 x(t) dt \right]^{2m+2}, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Так как

$$\begin{aligned} |z_{2m+1}[x]| &\leq \frac{e^{\frac{1}{2}|g|}}{(2m+2)!} \exp\left\{\frac{1}{2}|g| \int_0^1 x^2(t) dt\right\} \cdot \left[g \int_0^1 x(t) dt \right]^{2m+2} \leq \\ &\leq g^{2m+2} \cdot e^{\frac{1}{2}|g|} \cdot \frac{(m+1)!}{(2m+2)!} \exp\left\{\left(\frac{1}{2}|g|+1\right) \int_0^1 x^2(t) dt\right\}, \end{aligned}$$

то для оценки остатка формулы (21) можно воспользоваться теоремой 3. В данном случае

$$C_1(m) = g^{2m+2} \cdot e^{\frac{1}{2}|g|} \cdot \frac{(m+1)!}{(2m+2)!}$$

$$C_2(m) = \frac{1}{2}|g| + 1 \equiv C_2$$

$$|R^{(m)}(F)| \leq C_1(m) \left[\sqrt{\frac{\sqrt{2C_2}}{\sin\sqrt{2C_2}}} \cdot \exp\left\{ \frac{g^2}{2C_2\sqrt{2C_2}} \left[\operatorname{tg}\sqrt{\frac{C_2}{2}} - \sqrt{\frac{C_2}{2}} \right] \right\} + \right. \\ \left. + \exp\left\{ \frac{g^2}{12\sqrt{2}} + \frac{1}{6} C_2 \cdot \theta(m) \right\} \right] = \bar{R}^{(m)}(F)$$

В таблице 2 приведены значения реальной погрешности

$$\epsilon^{(n)} = I - I^{(n)}$$

и теоретически полученной оценки погрешности $\bar{R}^{(n)}(F)$. Из таблицы видно, что приближенная формула (21) дает достаточно точный результат при малых значениях параметра g . При тех же значениях параметра хорошо работает теоретическая оценка погрешности. При больших значениях g целесообразнее использовать формулы с большими значениями m .

Здесь $\theta(m) = 2(\sqrt{m} + g)^2$, поскольку $\frac{T}{\sin\sqrt{2\lambda}} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$.
Очевидно, что $R^{(m)}(F) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

Таблица 1

$\lambda \backslash g$	0	1	2	3	4
0	I	0,9997	0,9948	0,9756	0,9311
1	0,9900	0,9985	1,0131	1,0071	0,9531
2	0,9550	0,9842	1,0416	1,0568	0,9687
-1	0,9931	0,9896	0,9777	0,9539	0,9138
-2	0,9768	0,9724	0,9589	0,9350	0,8990

Таблица 2

g	$I^{(n)}$	$\epsilon^{(n)}$	$\bar{R}^{(n)}$
0	I	0	0
0,1	0,9999938	$0,62 \cdot 10^{-5}$	$2,39 \cdot 10^{-5}$
0,2	0,9999972	$0,28 \cdot 10^{-5}$	$4,30 \cdot 10^{-4}$
0,3	0,9999962	$0,38 \cdot 10^{-5}$	$2,48 \cdot 10^{-3}$
0,4	0,9999891	$0,11 \cdot 10^{-4}$	$9,01 \cdot 10^{-3}$
0,5	0,9999777	$0,22 \cdot 10^{-4}$	$2,58 \cdot 10^{-2}$

Литература

1. Kogut J.V. ILL-(TH)-82-46, Urbana, 1982.
2. Cahill K., Reeder R. Phys. Lett., 1984, 136B, p.77.
3. Янович Л.А. Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. "Наука и техника", Минск, 1976.
4. Wiener N. Journ. Math. and Phys., 1923, 2, p.131.
Proc London Math. Soc., 1924, v.22, No6, p.454.
5. Cameron R.H. Duke Math. Journ., 1951, v.18, No1, p.111.
6. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Сидорова О.В. ОИЯИ, ПИ-83-867, Дубна, 1983.
7. Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. "Наука", М., 1983.
8. Глимм Дж., Джаффе А. Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов. "Мир", М., 1984.
9. Гельфанд И.М., Яглом А.М. УМН, 1956, XI, I, с.77.
10. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. "Мир", М., 1965.
11. Fosdick L.D., Jordan H.F. Journ. Comput. Phys., 1968, v.3, No1, p.1.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 декабря 1984 года.

В Объединенном институте ядерных исследований начал выходить сборник "Краткие сообщения ОИЯИ". В нем будут помещаться статьи, содержащие оригинальные научные, научно-технические, методические и прикладные результаты, требующие срочной публикации. Будучи частью "Сообщений ОИЯИ", статьи, вошедшие в сборник, имеют, как и другие издания ОИЯИ, статус официальных публикаций.

Сборник "Краткие сообщения ОИЯИ" будет выходить регулярно.

The Joint Institute for Nuclear Research begins publishing a collection of papers entitled *JINR Rapid Communications* which is a section of the *JINR Communications* and is intended for the accelerated publication of important results on the following subjects:

Physics of elementary particles and atomic nuclei.
Theoretical physics.
Experimental techniques and methods.
Accelerators.
Cryogenics.
Computing mathematics and methods.
Solid state physics. Liquids.
Theory of condensed matter.
Applied researches.

Being a part of the *JINR Communications*, the articles of new collection like all other publications of the Joint Institute for Nuclear Research have the status of official publications.

JINR Rapid Communications will be issued regularly.



Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Сидорова О.В.
Приближенные формулы с весом для континуальных интегралов
по условной мере Винера

P11-84-775

Построены приближенные формулы для вычисления континуальных интегралов по условной мере Винера $\int_c P[x] F[x] d_{W+x}$; где $x(t) \in c = \{c[0,1] : x(0) = x(1) = 0\}$,

$P[x]$ - весовой функционал вида $P[x] = \exp \int_0^1 [\lambda p(t) x^2(t) + g(t)x(t)] dt$.

Формулы точны для функциональных многочленов степени $\leq 2m+1$ ($m=1,2,3,\dots$). Континуальные интегралы вычисляются по этим формулам путем интегрирования некоторой функции, зависящей от $F[x]$, по m -мерному единичному кубу в пространстве R^m . Особо рассмотрен случай $p(t) \equiv 1$, $g(t) \equiv g = \text{const}$. Для некоторого класса функционалов получена оценка остаточного члена формул, а также достаточное условие сходимости приближений, вычисляемых по этим формулам, при $m \rightarrow \infty$. Использование формул продемонстрировано на численных примерах. Приведено сравнение реальной погрешности интегрирования с теоретически найденной оценкой погрешности.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Zhidkov E.P., Lobanov Yu.Yu., Sidorova O.V.
Formulas with a Weight for the Approximate Evaluation of Conditional Wiener Integral

P11-84-775

Some approximate formulas are derived for calculation of a conditional Wiener integral $\int_c P[x] F[x] d_{W+x}$. Here $x(t) \in c = \{c[0,1] : x(0) = x(1) = 0\}$, $P[x]$ is a weight functional $P[x] = \exp \int_0^1 [\lambda p(t) x^2(t) + g(t)x(t)] dt$. Formulas are exact when $F[x]$ is a functional polynomial of degree at most $2m+1$ ($m=1,2,3,\dots$). Functional integrals are calculated using these formulas by integrating a certain function depending on $F[x]$ over the m -dimensional unity cube in R^m space. Separately the case of $p(t) \equiv 1$; $g(t) \equiv g = \text{const}$ is investigated. For a certain class of functionals an estimate of the remainder of the formulas is obtained. Sufficient condition of the convergence for $m \rightarrow \infty$ of approximations, obtained by these formulas, is derived. Numerical examples illustrate the obtained results. The comparison of actual integration error with theoretically found error estimate is presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984