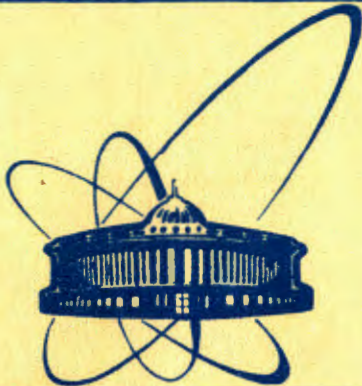


28/IV-84



сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна

2030/84

P11-84-77

А.А.Боголюбская, С.И.Сердюкова

К ИССЛЕДОВАНИЮ СПЕКТРА  
ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

1984

Движение флюксонов в ограниченной протяженной системе описывается /1/ уравнением

$$\phi_{tt} = \phi_{xx} - (1 - \mu\delta(x - x_0)) \sin\phi - a\phi_t, \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

Заданы начальные и граничные условия

$$\phi(x, 0) = f(x), \quad \phi_t(x, 0) = g(x), \quad \phi_x(0, t) = \phi_x(\ell, t) = 0.$$

После замены  $u = \phi_x$ ,  $v = \phi_t$  получаем систему

$$u_t = v_x, \quad v_t = u_x - (1 - \mu\delta(x - x_0)) \sin(f(x) + \int_0^t v(x, t) dt) - av,$$

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad u(x, 0) = f'_x(x), \quad v(x, 0) = g(x).$$

Задача решается численно. Используется схема Русанова /2/ третьего порядка точности. Недостающие значения  $u$ ,  $v$  в приграничных точках считаются по схеме второго порядка точности. Расчетные формулы приведены ниже. При счете наблюдалась сильная неустойчивость экспоненциального типа, распространяющаяся от границ. После того, как приграничные точки стали считаться по схеме-треноге, сильные осцилляции в окрестности границ исчезли. Хотелось бы такого рода явления неустойчивости исключать заранее. Принципиально вопрос об устойчивости линейных разностных краевых задач решен в работах /3-4/. Из рассматриваемой далее модельной задачи видно, что проверка критериев устойчивости разностных краевых задач трудоемка и, по-видимому, здесь необходимо использовать какую-то систему аналитических выкладок. Как обычно, при исследовании устойчивости рассматриваем более простую модельную задачу. Расчет показывает, что аналогичное явление неустойчивости наблюдается у волнового уравнения. Соответствующая разностная краевая задача имеет вид:

$$\frac{u_{\nu+1/2}^{(1)} - \frac{u_{\nu+1}^n + u_{\nu}^n}{2}}{(\tau/3)} = \frac{v_{\nu+1}^n - v_{\nu}^n}{h}, \quad \frac{v_{\nu+1/2}^{(1)} - \frac{v_{\nu+1}^n + v_{\nu}^n}{2}}{(\tau/3)} = \frac{u_{\nu+1}^n - u_{\nu}^n}{h}, \quad \nu \geq 1,$$

$$\frac{u_{\nu}^{(2)} - u_{\nu}^n}{(2\tau/3)} = \frac{v_{\nu+1/2}^{(1)} - v_{\nu-1/2}^{(1)}}{h}, \quad \frac{v_{\nu}^{(2)} - v_{\nu}^n}{(2\tau/3)} = \frac{u_{\nu+1/2}^{(1)} - u_{\nu-1/2}^{(1)}}{h}, \quad \nu \geq 2.$$



Здесь  $r, h$  - шаги сетки по  $t, x$  соответственно,  $u_1^{(2)} = 0, v_1^{(2)}$  находится из аппроксимации  $u_t = v_x$  по четырем приграничным точкам:

$$\frac{\frac{u_1^{(2)} + u_2^{(2)}}{2} - \frac{u_1^n + u_2^n}{2}}{(2r/3)} = \frac{\frac{v_2^{(2)} + v_2^n}{2} - \frac{v_1^{(2)} + v_1^n}{2}}{h}.$$

Положим  $a = r/h$ . Для  $\nu \geq 3$

$$u_\nu^{n+1} = u_\nu^n - \frac{1}{12}(u_{\nu+2}^n - 4u_{\nu+1}^n + 6u_\nu^n - 4u_{\nu-1}^n + u_{\nu-2}^n) + \frac{a}{24}(-2v_{\nu+2}^n + 7v_{\nu+1}^n - 7v_{\nu-1}^n + 2v_{\nu-2}^n) + \frac{3a}{8}(v_{\nu+1}^{(2)} - v_{\nu-1}^{(2)}),$$

$$v_\nu^{n+1} = v_\nu^n - \frac{1}{12}(v_{\nu+2}^n - 4v_{\nu+1}^n + 6v_\nu^n - 4v_{\nu-1}^n + v_{\nu-2}^n) + \frac{a}{24}(-2u_{\nu+2}^n + 7u_{\nu+1}^n - 7u_{\nu-1}^n + 2u_{\nu-2}^n) + \frac{3a}{8}(u_{\nu+1}^{(2)} - u_{\nu-1}^{(2)}).$$

Заданы начальные данные  $u_\nu^0, v_\nu^0$ . Переход от  $n$ -го слоя к  $(n+1)$ -му проходит в три этапа. На слое  $t = (n+1/3)r$  считаются значения  $u, v$  в полуцелых точках по схеме Лакса. На следующем слое  $t = (n+2/3)r$  считаются значения  $u, v$  в целых точках по схеме-крест. Недостающее  $v_1^{(2)}$  находится из аппроксимации уравнения  $u_t = v_x$  по четырем приграничным точкам. Наконец, значения  $u, v$  на  $(n+1)$ -м слое находятся по приведенным выше формулам, обеспечивающим третий порядок точности/2/. Недостающие  $u_2^{n+1}, v_2^{n+1}$  находятся из аппроксимации второго порядка точности:

$$\frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{r} = \frac{1}{4} \frac{v_3^n - v_1^n}{2h} + \frac{3}{4} \frac{v_3^{(2)} - v_1^{(2)}}{2h}, \quad /1/$$

$$\frac{v_2^{n+1} - v_2^n}{r} = \frac{1}{4} \frac{u_3^n - u_1^n}{2h} + \frac{3}{4} \frac{u_3^{(2)} - u_1^{(2)}}{2h}.$$

$v_1^{n+1}$  находится из аппроксимации уравнения  $u_t = v_x$  по четырем приграничным точкам:

$$\frac{\frac{u_2^{n+1} + u_1^{n+1}}{2} - \frac{u_2^n + u_1^n}{2}}{r} = \frac{\frac{v_2^{n+1} + v_2^n}{2} - \frac{v_1^{n+1} + v_1^n}{2}}{h}.$$

Далее счет по такому алгоритму называем "счет II". Счет II отличается от счета I тем, что вместо /1/ используется аппроксимация по схеме-треноге:

$$u_2^{n+1} = u_2^n + \frac{a}{2}(v_3^n - v_1^n) + \frac{a^2}{2}(u_3^n - 2u_2^n + u_1^n),$$

$$v_2^{n+1} = v_2^n + \frac{a}{2}(u_3^n - u_1^n) + \frac{a^2}{2}(v_3^n - 2v_2^n + v_1^n).$$

Неустойчивость счета I, по-видимому, связана с тем, что оператор перехода от слоя к слою G имеет точки спектра вне единичного круга. В предлагаемой работе формулируется алгебраическая задача \*, к которой сводится задача определения точек спектра оператора G. В случае счета II, оператор G, по-видимому, не имеет точек спектра вне единичного круга. Снова возникает задача \*. Если G не имеет точек спектра вне единичного круга, дополнительному исследованию на единичной окружности подлежит единственная определяющая точка  $z=1$ . Доказано, что  $z=1$  не является точкой спектра оператора перехода от слоя к слою.

Переходим непосредственно к постановке задачи \*. При  $\nu \geq 3$  рассматриваемый разностный оператор имеет вид

$$w_\nu^{n+1} = \sum_{\ell=-2}^2 A_\ell w_{\nu+\ell}^n, \quad w_\nu^n = (u_\nu^n, v_\nu^n)^*,$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{12} + \frac{a^2}{8} & -\frac{a}{12} + \frac{a^3}{12} \\ -\frac{a}{12} + \frac{a^3}{12} & -\frac{1}{12} + \frac{a^2}{8} \end{vmatrix}, \quad A_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2a}{3} & -\frac{a^3}{6} \\ \frac{2a}{3} & -\frac{a^3}{6} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$$A_0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \frac{a^2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{a^2}{4} \end{vmatrix},$$

$$A_{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \frac{2a}{3} + \frac{a^3}{6} & \\ -\frac{2a}{3} + \frac{a^3}{6} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}, \quad A_{-2} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{12} + \frac{a^2}{8} & \frac{a}{12} - \frac{a^3}{12} \\ \frac{a}{12} - \frac{a^3}{12} & -\frac{1}{12} + \frac{a^2}{8} \end{vmatrix}.$$

Обозначим через D характеристическую матрицу

$$D(e^{i\phi}) = \sum_{\ell=-2}^2 A_\ell e^{i\ell\phi}. \quad /2/$$

При  $a \leq 1$  соответствующая задача Коши устойчива в  $L_2$ : собственные значения D удовлетворяют соотношению  $|\lambda(e^{i\phi})| \leq 1$ . Более того, задача Коши устойчива в  $C^{5,6/}$ . Тогда для  $|z| > 1$  характеристическое уравнение

$$\text{Det} \left\| \sum_{\ell=-2}^2 A_\ell z^\ell - zI \right\| = 0 \quad /3/$$

не имеет решений, равных по модулю единице:  $|\kappa_i(z)| \neq 1, |z| > 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ . При  $|z| \geq 1$  решения разбиваются на два непересекающихся класса  $|\kappa_i| \leq 1$  и  $|\kappa_i| \geq 1$ . Так как  $|\kappa_i(z)| \neq 1, |z| > 1$ , собственные значения не могут переходить из одного класса в другой. Если при некотором  $z, |z| > 1, |\kappa_i| < 1$ , то  $|\kappa_i(z)| < 1$  для всех  $z$ , расположенных вне единичного круга. Асимптотика на бесконечности показывает, что ровно четыре  $|\kappa_i| < 1$  и ровно четыре  $|\kappa_i| > 1$ . Тогда при  $|z| \geq 1$  определено /7/ невырожденное аналитическое преобразование подобия  $T(z)$ , приводящее резольвентную матрицу

$$M(z) = \begin{vmatrix} -A_2^{-1} \cdot A_1 & -A_2^{-1} \cdot (A_0 - zI) & -A_2^{-1} \cdot A_{-1} & -A_2^{-1} \cdot A_{-2} \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{vmatrix}$$

к блочному виду. Верхнему блоку отвечают  $|\kappa_i| \leq 1$ , нижнему -  $|\kappa_i| \geq 1, |z| \geq 1$ . В расчетах  $a = 1/2$ . Далее полагаем  $a = 1/2$ . Характеристическое уравнение принимает вид

$$[-5(\kappa^2 + \kappa^{-2}) + 32(\kappa + \kappa^{-1}) + 42 - 96z]^2 = [-3(\kappa^2 - \kappa^{-2}) + 30(\kappa - \kappa^{-1})]^2. \quad /4/$$

Собственному значению  $\kappa(z)$  резольвентной матрицы отвечает собственный вектор  $\xi = (\kappa^3 E(\kappa), \kappa^2 E(\kappa), \kappa E(\kappa), E(\kappa))^*$ , где

$$E(\kappa) = \begin{vmatrix} \frac{\kappa^2 - \kappa^{-2}}{32} - \frac{5(\kappa - \kappa^{-1})}{16} \\ -\frac{5(\kappa^2 + \kappa^{-2})}{96} + \frac{\kappa + \kappa^{-1}}{3} + \frac{7}{16} - z \end{vmatrix}. \quad /5/$$

Если при некотором  $z$  нет кратных собственных значений, то  $\xi_i(z) = \xi(\kappa_i(z))$  линейно независимы и

$$T^{-1}(z) = (\xi_1(z), \xi_2(z), \dots, \xi_8(z)).$$

Напомним, что  $|\kappa_i(z)| < 1, |z| > 1, i = 1, \dots, 4$ . Введем в рассмотрение матрицы

$$T_{11}^{-1} = \begin{vmatrix} \kappa_1^3 E_1 & \kappa_2^3 E_2 & \kappa_3^3 E_3 & \kappa_4^3 E_4 \\ \kappa_1^2 E_1 & \kappa_2^2 E_2 & \kappa_3^2 E_3 & \kappa_4^2 E_4 \\ \kappa_1 E_1 & \kappa_2 E_2 & \kappa_3 E_3 & \kappa_4 E_4 \\ E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{vmatrix},$$

$$T_{21}^{-1} = \begin{vmatrix} \kappa_1 E_1 & \kappa_2 E_2 & \kappa_3 E_3 & \kappa_4 E_4 \\ E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{vmatrix}.$$

Счету I отвечают краевые матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a} & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{a^2}{8} & \frac{a^3}{12} & 0 & \frac{11a}{16} - \frac{a^3}{4} \\ \frac{a^3}{12} & \frac{a^2}{8} & \frac{a}{2} - \frac{a^3}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 - \frac{3a^2}{8} & -\frac{3a}{4} + \frac{a^3}{4} & \frac{a^2}{4} & \frac{a}{16} - \frac{a^3}{12} \\ \frac{a^3}{12} & 1 - \frac{a^2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Счету II отвечают краевые матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a} & -1 & \frac{1}{a} & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{a^2}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & \frac{a}{2} & \frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 - a^2 & 0 & \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} \\ 0 & 1 - a^2 & -\frac{a}{2} & \frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 1 & \frac{1}{a} & -1 \end{vmatrix}.$$

Уравнение /4/ эквивалентно двум уравнениям четвертого порядка с параметром  $z$ , решения которых выписываются в радикалах. Пусть при некотором  $z$  нет кратных собственных значений,  $z$  является точкой спектра, если и только если

$$\text{Det} \| BT_{11}^{-1}(z) + (C - zA) T_{21}^{-1}(z) \| = 0. \quad /6/$$

Избавляясь в /6/ от радикалов, получаем уравнение  $Q(z) = 0$ , где  $Q(z)$  - многочлен. Значит, спектр оператора перехода от слоя к слою состоит из конечного числа точек. Но в число решений /6/ входят также  $z$ , которым отвечают кратные собственные значения  $\kappa_i$ . Тогда  $\xi_i(z)$  линейно зависимы и требуется дополни-



тельное исследование. Но это более простая задача, мы избавились от параметра  $z$ ! Уже выписывание в явном виде решений уравнения /4/ - трудоемкая задача. Дальнейшие выкладки, связанные с нахождением  $\text{Det}$  в /6/ и  $Q(z)$ , по-видимому, могут быть реализованы лишь с помощью ЭВМ. На таком пути мы надеемся найти точки спектра, большие по модулю единицы, в случае счета I, а в случае счета II показать, что все точки спектра лежат в единичном круге  $|z| \leq 1$ .

Если нет точек спектра вне единичного круга, дополнительному исследованию на единичной окружности подлжет единственная определяющая точка  $z=1$ . Если определяющая точка является точкой спектра, может возникнуть неустойчивость степенного типа /4/, которая не столь ярко проявляется на счете. При  $z=1$  уравнение /4/ имеет кратный корень  $\kappa_{4,5}(1) = 1$ . Остальные решения по модулю не равны 1:

$$\kappa_{1,2}(1) = -0,002739... \pm i \cdot 0,192349..., \quad \kappa_3(1) = 0,1480299...,$$

$$\kappa_{6,7}(1) = \kappa_{1,2}^{-1}(1), \quad \kappa_8(1) = \kappa_3^{-1}(1).$$

Этим собственным значениям отвечают собственные векторы, определяемые /5/. Но  $E_4(1) = E_5(1) = (0, 0)^*$ . В этом случае собственные векторы находим из разложения характеристической матрицы /2/. Векторы  $E(\kappa)$  являются решением системы

$$\left( \sum_{l=2}^2 A_l \kappa^l - zI \right) \cdot E(\kappa) = 0.$$

Положим  $\kappa = e^{i\phi}$ ,  $z = \lambda$ , тогда получаем задачу на собственные значения для характеристической матрицы

$$\left( \sum_{l=2}^2 A_l e^{il\phi} - \lambda I \right) \cdot E(e^{i\phi}) = 0.$$

В окрестности  $\phi = 0$  справедливо разложение

$$D(e^{i\phi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & ai \\ ai & 0 \end{pmatrix} \phi + O(\phi^2).$$

Собственные значения  $D(e^{i\phi})$  имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{2}{3} \cos \phi + \left( \frac{a^2}{4} - \frac{1}{6} \right) \cos 2\phi \pm \pm i \left\{ \left( \frac{4a}{3} + \frac{a^3}{3} \right) \sin \phi + \left( \frac{a^3}{6} - \frac{a}{6} \right) \sin 2\phi \right\} = \exp\{\pm ia\phi + O(\phi^2)\}.$$

Матрица  $(D(e^{i\phi}) - I)/\phi$  при малых  $\phi$  имеет различные собственные значения, которым отвечают различные собственные векторы  $\tilde{E}_i(\kappa)$ . При  $z=1$  в качестве базисных векторов  $\tilde{E}_{3,4}$  могут быть взяты  $(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1)^*$ ,  $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^*$ .

Вместо комплексно-сопряженных  $\tilde{E}_1(1)$ ,  $\tilde{E}_2(1)$  в качестве базисных векторов возьмем  $\text{Re}\tilde{E}_1(1)$  и  $\text{Im}\tilde{E}_1(1)$ . В случае счета II получаем

$$\text{Det} \| \text{BT}_{11}^{-1}(1) + (C - A) T_{21}^{-1}(1) \| = -7718,5 \dots \cdot |\kappa_1(1)|^4 \cdot |\kappa_3(1)|^2,$$

так что  $z=1$  не является точкой спектра /3/, и неустойчивость степенного типа исключается.

Разберемся, как доопределить базис, когда есть кратные собственные значения. Пусть  $\kappa_i(z_0) = \kappa_j(z_0) = \kappa_0$ , тогда  $\tilde{E}_i(z_0)$  и  $\tilde{E}_j(z_0)$  линейно зависимы. Один из этих векторов заменяем на присоединенный вектор.

Рассмотрим вектор  $(\tilde{E}_i - \tilde{E}_j)/(\kappa_i - \kappa_j)$ :

$$M \frac{\tilde{E}_i - \tilde{E}_j}{\kappa_i - \kappa_j} = \kappa_i \frac{\tilde{E}_i - \tilde{E}_j}{\kappa_i - \kappa_j} + \tilde{E}_j.$$

По определению

$$\left. \frac{\tilde{E}_i - \tilde{E}_j}{\kappa_i - \kappa_j} \right|_{z=z_0} = \begin{pmatrix} 3\kappa_0^2 E(\kappa_0) + \kappa_0^3 \cdot E'(\kappa_0) \\ 2\kappa_0 E(\kappa_0) + \kappa_0^2 E'(\kappa_0) \\ E(\kappa_0) + \kappa_0 E'(\kappa_0) \\ E'(\kappa_0) \end{pmatrix}, \quad \text{где}$$

$$E'(\kappa) = \begin{pmatrix} \frac{\kappa^2 + \kappa^{-2}}{16\kappa} - \frac{5(\kappa + \kappa^{-1})}{16} \\ -\frac{5(\kappa^2 - \kappa^{-2})}{48\kappa} + \frac{\kappa - \kappa^{-1}}{3\kappa} \end{pmatrix}.$$

Аналогично могут быть построены присоединенные векторы для собственных значений кратности 3.

Наиболее громоздкие аналитические вычисления в данной работе проводились с помощью системы REDUCE /версия от 15 апреля 1979 г./ /8/ на ЭВМ ЕС-1060. В частности, с помощью ЭВМ получено характеристическое уравнение, найдены его корни, вычислен определитель /6/ и проверены соответствующие выкладки.

Из-за того, что в системе REDUCE нет библиотеки стандартных математических функций /например, степенных, для степеней 1/2 и 1/3/, для получения числовых результатов приходилось переходить в фортран, создавая предварительно текст фортранной программы с помощью системы. Отметим некоторые особенности фортран-вывода /присущие конкретной версии системы/:

1/ если требуется, чтобы выводимое выражение /или подвыражение/ имело комплексный тип, можно умножить его на единицу, например, XE, задавая эту переменную в фортранной программе следующим образом: COMPLEX XE, XE = (1., 0.);



2/ если требуется записать в фортран-формате элементы массива, например, AR, нельзя написать просто AR; или AR(1,1); /после команды OUT/, т.к. в выводимом фортранном тексте массив будет записан через внутренние системные переменные или в виде AR(1.,1.). В этом случае следует воспользоваться командой WRITE.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. ОИЯИ, P17-83-632, Дубна, 1983.
2. Rusanov V.V. Fluid Dynam.Trans., 1969, vol.4, pp.285-294.
3. Kreiss H.-O. Math. of Comp., 1969, 22, 104, pp.702-714.
4. Сердюкова С.И. ДАН СССР, 1973, 208, 1, с.52-55.
5. Сердюкова С.И. ДАН СССР, 1967, 173, 3, с.526-528.
6. Сердюкова С.И. ОИЯИ, P5-10708, Дубна, 1977.
7. Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966, p.99.
8. Hearn A.C. REDUCE User's Manual. - 2nd ed.- Univ. of Utah, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел  
8 февраля 1984 года.

Боголюбская А.А., Сердюкова С.И.

P11-84-77

К исследованию спектра одной разностной краевой задачи

Исследуется явление неустойчивости, которое наблюдается в окрестности границ при численном моделировании движения флюксонов в системе с микро-неоднородностями по схеме Русанова. В качестве модельного берется волновое уравнение, у которого наблюдается аналогичное явление неустойчивости. Биения экспоненциального типа у границ указывают на наличие точек спектра вне единичного круга. В работе формулируется алгебраическая задача, к которой сводится задача поиска точек спектра оператора перехода от слоя к слою разностной краевой задачи. Решение этой задачи приводит к громоздким выкладкам, которые, по-видимому, могут быть реализованы с применением системы аналитических вычислений.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод авторов

Bogolubskaja A.A., Serdjukova S.I.  
To the Investigation of the Spectrum  
of Some Difference Boundary Problem

P11-84-77

There is investigated the phenomenon of instability observed near the boundary in numerical modelling of the motion of fluxons in the system with microinhomogeneity by the Rusanov's scheme. As model we use the wave equation on which the same phenomenon of instability is observed. Beatings of exponential type near the boundary indicate the presence of the spectrum points outside the unite circle. In this work we formulate the algebraic problem to which the problem of searching of the spectrum of the operator of transition from layer to layer of the difference boundary problem is reduced. The solution of this problem could be realised by application of symbolic computation system.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984