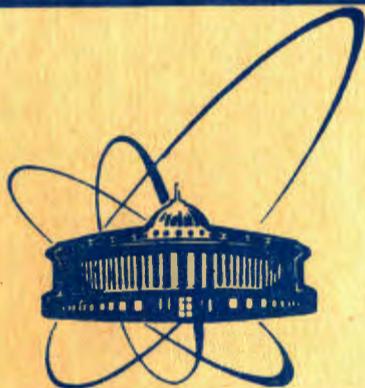


84-76



сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна



P11-84-76

Г.С.Казача, С.И.Сердюкова, А.Т.Филиппов

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ДВИЖЕНИЯ ФЛЮКСОНОВ  
В СИСТЕМЕ С МИКРОНЕОДНОРОДНОСТЯМИ

1984

В /1-4/ обнаружены и исследованы статические связанные состояния флюксонов на микронеоднородностях длинного /одномерного/ джозефсоновского перехода. Микронеоднородности соответствуют локальному уменьшению джозефсоновского тока, их приближенно можно описать с помощью  $\delta$ -функций:

$$j = [1 - \sum_{i=1}^n \mu_i \delta(x - x_i)] \sin \phi, \quad /1/$$

где  $\phi(x, t)$  - магнитное поле в переходе. Реальные физические неоднородности, конечно, "размазаны", но их можно приближенно заменить  $\delta$ -функциями, если размер неоднородностей меньше размера флюксона. Последний примерно равен  $2\lambda_J$ , где  $\lambda_J$  - джозефсоновская длина, определяющая характерный размер, на котором происходит заметное изменение магнитного поля в переходе. В дальнейшем  $\lambda_J$  принимается за единицу длины. В качестве единицы времени выбирается  $\omega_J^{-1}$ , где  $\omega_J$  - джозефсоновская частота, определяющая характерное время, за которое магнитное поле может заметно изменяться.

Изменения магнитного поля в переходе описываются возмущенным уравнением sine-Gordon

$$\phi_{tt} = \phi_{xx} - j(x) - \alpha \phi_t, \quad /2/$$

где малый параметр  $\alpha$  определяет эффекты затухания. Граничные условия на концах перехода  $-\ell \leq x \leq \ell$  определяются значениями внешнего магнитного поля  $h$ :

$$\phi_x(-\ell, t) = h_{-\ell}, \quad \phi_x(\ell, t) = h_{\ell}. \quad /3/$$

В /1-4/ были изучены статические распределения магнитного поля. В этом случае  $\phi$  не зависит от  $t$  и удовлетворяет уравнению

$$\phi_{xx} = j(x) \quad /4/$$

и граничным условиям /3/. Для локальных неоднородностей, описываемых выражением /1/, задачу можно решить точно, и в простейшем случае /одна микронеоднородность/ свойства точных решений поддаются достаточно полному исследованию.

В зависимости от величины  $\ell$ ,  $\mu$  и внешнего поля в случае одной микронеоднородности существуют одно или два устойчивых относительно малых возмущений состояния с различными значения-

ми полного магнитного потока. Они и были названы связанными состояниями. Если внешнее поле нулевое, то, помимо основного состояния  $\phi = 0$ , существует состояние, в котором магнитный поток локализован вблизи микронеоднородности. Его форма, при достаточно большом значении  $\ell$ , приблизительно совпадает с формой свободного флюксона в безграничном переходе

$$\phi(x) = 2 \arccos(-\text{th}(x)), \quad /5/$$

но этот флюксон локализован на неоднородности, которую мы поместили в середине перехода.

Связанное состояние устойчиво, если  $\mu > 0$ , при  $\mu < 0$  оно также существует, но неустойчиво. Наглядно можно представить себе, что микронеоднородность с  $\mu > 0$  притягивает флюксон, а с  $\mu < 0$  - отталкивает. В дальнейшем изучается притягивающая микронеоднородность.

Процессы, в которых образуются такие связанные состояния, описываются уравнением /2/, которое не поддается точному аналитическому решению, и необходимо обратиться к численным методам. При малых значениях  $\mu$  и  $\alpha$  можно, конечно, воспользоваться теорией возмущений по этим параметрам, но в существующих на сегодня вариантах теории возмущений /см., например, /5/ / наличие устойчивых связанных состояний в исходном приближении не учитывается. Например, в нашей простейшей задаче флюксон приближенно заменяется точечной частицей, а микронеоднородность описывается притягивающим эту частицу потенциалом. В этой картине флюксон, налетающий на неоднородность, может быть захвачен, и тогда он образует связанное состояние. Однако осцилляции флюксона около равновесного положения могут быть весьма значительными, и при малом  $\alpha$  они слабо затухают.

Учет связанного состояния может привести к совершенно иной картине захвата флюксона микронеоднородностью. Как показано в /1-7/, связанное состояние характеризуется не только определенной энергией связи /энергия связанного состояния меньше энергии свободного покоящегося флюксона на величину  $\approx 2\mu /$ , но и характерной собственной частотой  $\omega_0 \approx \sqrt{\mu/2}$ . Если на связанное состояние наложить некоторое внешнее возмущение, то оно в ответ не будет осциллировать как точка около равновесного положения, а начнет менять свою форму с частотой  $\omega_0$ , оставаясь локализованным на микронеоднородности /такое движение назовем пульсацией/. Пульсации могут в принципе возбуждаться и в том случае, когда флюксон налетает на неоднородность. Теория возмущений подобных деформаций не описывает.

В этом сообщении обсуждаются "численные эксперименты", в которых хорошо сформированный флюксон /его форма в системе покоя близка к /5// налетает на притягивающую микронеоднородность и захватывается ею, образуя связанное состояние. При расчетах можно было бы размазать  $\delta$ -функцию, однако небезынтересно по-

пытаться произвести их, не используя "размазку". В этом случае можно было бы надеяться сравнить полученное при больших временах локализованное статическое состояние с тем, которое вычисляется аналитически в задаче /2/. Мы увидим, что такое количественное сравнение вряд ли возможно. Однако качественные результаты хорошо согласуются с интуитивной физической картиной, подсказываемой результатами /1-4/.

Итак, движение флюксонов в ограниченной протяженной системе с притягивающей микронеоднородностью описывается уравнением

$$\phi_{tt} = \phi_{xx} - (1 - \mu\delta(x - x_0)) \sin\phi - \alpha\phi_t, \quad -\ell \leq x \leq \ell, \quad \phi_x(-\ell) = \phi_x(\ell) = 0.$$

В качестве начальных данных берется "хорошо сформированный флюксон":

$$\phi(x, 0) = 2 \arccos\left(-\text{th}\frac{x-a}{\sqrt{1-v_0^2}}\right) + c_1 e^{-10(x+\ell)} + c_2 e^{10(x-\ell)},$$

$$\phi_t(x, 0) = \frac{-2v_0}{\sqrt{1-v_0^2} \text{ch}\left(\frac{x-a}{\sqrt{1-v_0^2}}\right)}.$$

Постоянные  $c_1, c_2$  выбираются так, чтобы удовлетворялись граничные условия. В расчетах, о которых идет речь ниже,  $\ell = 9$ ,  $a = -2$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\alpha = 0$ . После замены  $u = \phi_x$ ,  $v = \phi_t$  получаем систему:

$$u_t = v_x, \quad v_t = u_x - (1 - \mu\delta(x - x_0)) \sin(\phi(x, 0)) + \int_0^t v(x, t) dt - \alpha v,$$

$$u(-\ell) = u(\ell) = 0, \quad u(x, 0) = \frac{2}{\sqrt{1-v_0^2} \text{ch}\left(\frac{x-a}{\sqrt{1-v_0^2}}\right)} - 10c_1 e^{-10(x+\ell)} + 10c_2 e^{10(x-\ell)},$$

$$v(x, 0) = \frac{-2v_0}{\sqrt{1-v_0^2} \text{ch}\left(\frac{x-a}{\sqrt{1-v_0^2}}\right)}.$$

Задача решается численно. Используется метод конечных разностей. Интегралы заменяются интегральными суммами. Далее  $\tau, h$  - шаги сетки по  $t, x$  соответственно,

$$f_{\nu}^n = f(-\ell + (\nu-1)h, n\tau), \quad f_{\nu+1/2}^{n+1/2} = f(-\ell + (\nu - \frac{1}{2})h, (n + \frac{1}{2})\tau).$$

В полуцелых точках счет ведется по схеме Лакса:

$$u_{\nu+1/2}^{n+1/2} = \frac{u_{\nu+1}^n + u_{\nu}^n}{2} + \frac{\tau}{2h} (v_{\nu+1}^n - v_{\nu}^n), \quad \nu = 1, \dots, N,$$

$$v_{\nu+1/2}^{n+1/2} = \frac{v_{\nu+1}^n + v_{\nu}^n}{2} + \frac{r}{2h}(u_{\nu+1}^n - u_{\nu}^n) -$$

$$- \frac{r}{2} \sin\{\phi(-\ell + (\nu - \frac{1}{2})h, 0) + \frac{r}{4} \sum_{\ell=1}^n (v_{\nu}^{\ell} + v_{\nu+1}^{\ell} + v_{\nu}^{\ell-1} + v_{\nu+1}^{\ell-1})\},$$

Значения  $u, v$  на  $(n+1)$ -м слое считаются по схеме-крест:

$$u_{\nu}^{n+1} = u_{\nu}^n + \frac{r}{h}(v_{\nu+1/2}^{n+1/2} - v_{\nu-1/2}^{n+1/2}), \quad \nu = 1, \dots, N,$$

$$v_{\nu}^{n+1} = v_{\nu}^n + \frac{r}{h}(u_{\nu+1/2}^{n+1/2} - u_{\nu-1/2}^{n+1/2}) - r(1 - \frac{\mu}{h} \delta(\nu - n_0)) \times$$

$$\times \sin\{\phi(-\ell + (\nu - 1)h, 0) + \frac{r}{2} \sum_{\ell=1}^n (v_{\nu}^{\ell} + v_{\nu}^{\ell-1}) + \frac{r}{4} (v_{\nu+1/2}^{n+1/2} + v_{\nu-1/2}^{n+1/2})\},$$

$$2. \ell = N \cdot h, \quad x_0 = -\ell + (n_0 - 1)h, \quad \delta(\nu - n_0) = \begin{cases} 1, & \nu = n_0, \\ 0, & \nu \neq n_0. \end{cases}$$

В расчетах  $h = 0,06$ ,  $r = 0,03$ . Моделировалось движение флюксонов с такими параметрами: при  $\mu = 0,3$  скорость  $v_0$  принималась равной 0; 0,1; 0,3; при  $\mu = 0,5$ ;  $v_0 = 0,2$ ; 0,3. Во всех случаях флюксон устанавливается вблизи неоднородности /  $x_0 = 0$ /. Ниже в таблице приведено время и место установления флюксона.

Таблица

	$\mu$	$v_0$	$t_s$	$x_s$
1	0,3	0	33	-0,36
2	0,3	0,1	30	/-0,24, -0,36/
3	0,3	0,3	72	+0,84 /осцилляции/
4	0,5	0,2	21	-0,12
5	0,5	0,3	30	+0,36 /пульсации/

При нулевой скорости /1/ к моменту  $t = 15$  флюксон достигает центра, после чего отражается влево на 0,84. Затем флюксон возвращается к центру и с момента  $t = 33$  до конца счета / $t = 81$ / практически стоит на месте, очень слабо пульсируя. В остальных случаях флюксон проходит центр. Затем при "малых" скоростях /см. 2,4/ флюксон возвращается и устанавливается слева от центра. В случае 2 флюксон до конца счета осциллирует в указанных в таблице пределах. При  $v_0 = 0,3/3,5/$  флюксон ведет себя более

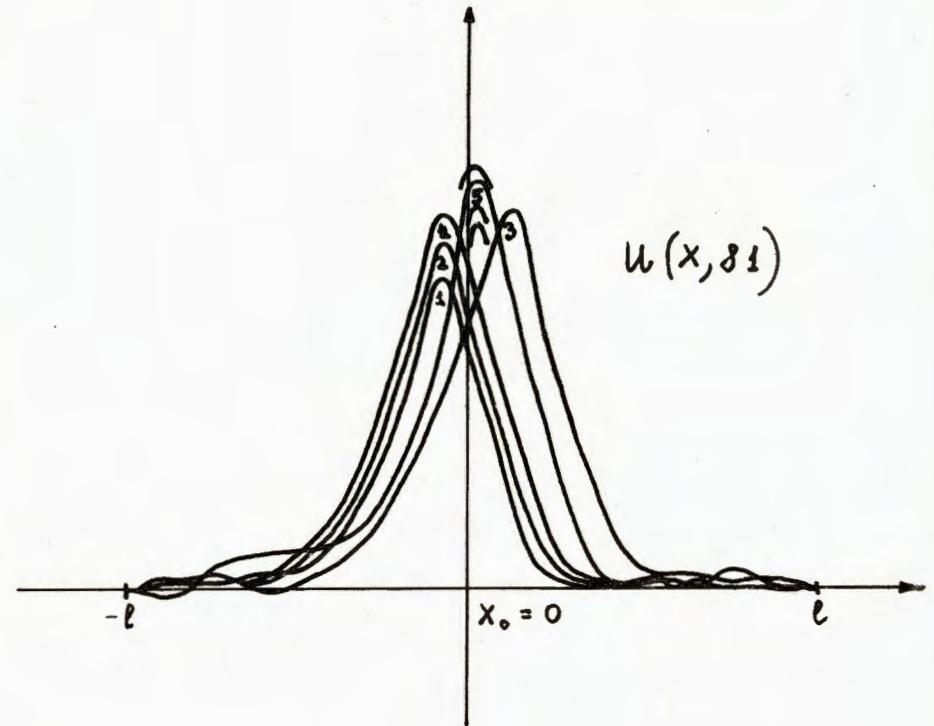


Рис. 1

активно. При этом в случае 3 / $\mu = 0,3$ / более ярко выражены осцилляции: флюксон устанавливается лишь к моменту  $t = 72$ . При  $\mu = 0,5$  /5/ микрон неоднородность притягивает сильнее, флюксон устанавливается уже к моменту  $t = 21$ . Зато здесь более ярко выражены пульсации  $1,826 \leq u_{\max} \leq 2,235$ . На рис. 1 представлены графики  $u$  при  $t = 81$  /в конце счета/ для различных  $\mu, v_0$ , графики 1-5 соответственно таблице. Для варианта 5 нанесены также промежуточные положения "головы флюксона" после его установления.

Расчеты показывают, что динамика флюксона существенно зависит от протяженности системы. Так, при  $\ell = 6$  / $\mu = 0,3$ ;  $v_0 = 0,3$ ;  $a = -2$ ;  $x_0 = 0$ / флюксон доходит до правой стенки, дважды около нее переворачивается и лишь после этого устанавливается справа от центра на расстоянии 3,84.

Для проверки правильности счета естественно использовать энергетическое соотношение

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\phi_t^2}{2} + \frac{\phi_x^2}{2} + (1 - \cos \phi) dx - \mu(1 - \cos \phi(x_0)) \right) = 0$$

и соотношение на разрыве  $\phi_x(x_0+0) - \phi_x(x_0-0) = -\mu \sin \phi(x_0)$ . Интеграл в  $\bar{\epsilon}$  вычисляется по формуле Симпсона. Расчетное значение энергии  $\bar{\epsilon}(t)$  на интервале  $0 \leq t \leq 81$  падает в среднем на 1. Например, при  $\mu = 0,3$ ;  $v_0 = 0,3 / 3 / \bar{\epsilon}(0) = 8,35$ ;  $\bar{\epsilon}(81) = 7,53$ . В случае  $\mu = 0,5$ ;  $v_0 = 0,3 / 5 / \bar{\epsilon}(0) = 8,53$ ;  $\bar{\epsilon}(81) = 6,89$ . Заметим, что после установления флюксона  $\bar{\epsilon}(t)$  практически не меняется. Что касается соотношения на разрыве, то разрыв хорошо просматривается на счете, но он размазан.

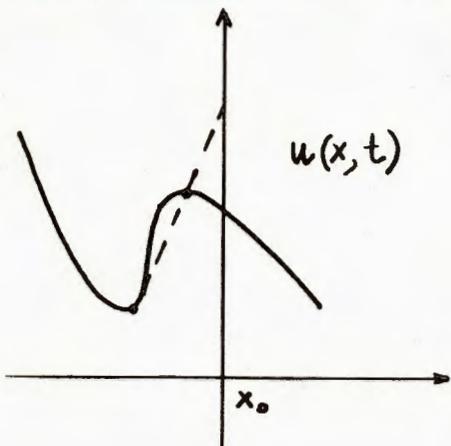


Рис. 2  
осцилляции, распространяющиеся от границ. В дальнейшем была найдена устойчивая аппроксимация.

На рис. 2 представлен типичный случай. Значение справа  $u(x_0+0)$  определено однозначно. Соотношение на разрыве хорошо выполняется, если значение  $u(x_0-0)$  экстраполировать по двум близлежащим значениям слева. Но на самом деле вопрос остается открытым. Проводился контрольный счет с  $h/2, \tau/2$ . При этом  $u(x, t)$  и  $\bar{\epsilon}(t)$  ведут себя устойчиво. При счете того же варианта по схеме Русанова <sup>10</sup> расхождение в числах более значительно. Однако качественная картина динамики флюксона сохраняется. В предварительных расчетах по схеме Русанова наблюдались сильные осцилляции, распространяющиеся от границ. В дальнейшем была найдена устойчивая аппроксимация.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. Письма в ЖЭТФ, 1982, т.35, с.470-472.
2. Filippov A.T., Galpern Yu.S. JINR, E17-83-262, Dubna, 1983.
3. Filippov A.T., Galpern Yu.S. Solid.State Comm., 1983, vol.48, pp.665-669.
4. Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. ОИЯИ, P17-83-632, Дубна, 1983.
5. Fogel M.B. et al. Phys.Rev., 1977, vol.B15, pp.1578-1592.
6. Rusanov V.V. Fluid Dynam.Trans., 1969, vol.4, pp.285-294.

Рукопись поступила в издательский отдел  
8 февраля 1984 года.

#### НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
D11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
D4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
D4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
D2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
D10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
D1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
D17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
D1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
P18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
D2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
D9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
D3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
D2,4-83-179	Труды XV Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Дубна, 1982.	4 р. 80 к.
	Труды УШ Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Протвино, 1982 /2 тома/	11 р. 40 к.
D11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
D7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
D2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:  
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79  
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

**ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ  
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ**

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Казача Г.С., Сердюкова С.И., Филиппов А.Т.  
Численное моделирование движения флюксонов  
в системе с микронеоднородностями

P11-84-76

Движение флюксонов в протяженной системе с микронеоднородностями описывается уравнением sine-Gordon с однородными граничными условиями. В качестве начальных данных берется "хорошо сформированный флюксон". Задача решается численно. Эквивалентная система уравнений решается по схеме Лакса с пересчетом по схеме-крест. Для аппроксимации  $\delta$ -функции, входящей в микронеоднородность, применяется классическая аппроксимация. Для проверки правильности счета используются энергетическое соотношение и соотношение на разрыве. Численные эксперименты показывают, что динамика флюксона существенно зависит от начальной скорости, от величины микросопротивления и протяженности системы. Приведены соответствующие графики и таблицы.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Kazacha G.S., Serdyukova S.I., Filippov A.T.  
The Numerical Modelling of the Motion of Fluxons  
in the Long System with Microinhomogeneities

P11-84-76

The motion of fluxons in the long system with microinhomogeneities is described by sine-Gordon equation with homogeneous boundary conditions. As initial data we take "a well formed fluxon". The problem is solved numerically. The equivalent system of equations is solved by the scheme of Lax with recalculation by the scheme-cross. As approximation of the  $\delta$ -function, contained in the microinhomogeneity there is used the classical approximation. For verification of correctness of calculations there are used the energetic relation and the relation at discontinuity. Numerical experiments show that dynamics of fluxons essentially depends on the initial velocity, the quantity of microresistance and the size of the system. The corresponding tables and pictures are applied.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984