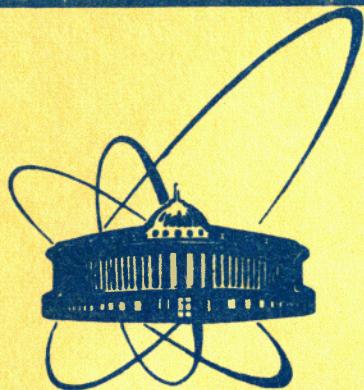


84-740



**сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна**

P11-84-740

Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский

**МНОГОСЕТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ  
РЕШЕНИЯ ЧАСТИЧНОЙ ПРОБЛЕМЫ  
НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ  
ДЛЯ КЛАССА МАТРИЦ ТИПА ТЕПЛИЦЕВЫХ**

**1984**

## ВВЕДЕНИЕ

Для обращения теплицевых и ганкелевых матриц имеются быстрые алгоритмы сложности  $O(n^2)$  и  $O(n \ln^2 n)$ , где  $n$  - порядок матрицы. Подробный обзор результатов в этой области можно найти в <sup>/1/</sup>.  $O(n^2)$  дается верхняя оценка сложности  $O(n^2 \ln n)$  для метода Ланцоша приведения теплицевой матрицы к трехдиагональной форме. Вычисление собственного вектора теплицевой матрицы методом обратных итераций имеет сложность  $O(nk \ln^2 n)$ , где  $k$  - число итераций, если использовать быстрый  $O(n \ln^2 n)$  прямой алгоритм обращения теплицевой матрицы. Такую же сложность имеют и методы ньютоновского типа. Здесь отметим, что для широкого класса спектральных задач, связанных с уравнением Шредингера, построены эффективные численные алгоритмы на основе непрерывного аналога метода Ньютона <sup>/3/</sup>.

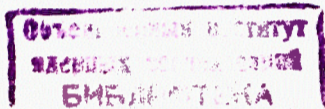
Однако ряд задач численного анализа сводится к определению инвариантного подпространства матриц большой размерности вида

$$A = D + C(T + H)C, \quad A: R^n \rightarrow R^n, \quad /1/$$

где  $T$  - симметричная теплицева,  $H$  - ганкелева, а  $D$  и  $C$  - диагональные матрицы. В частности, такие задачи возникают при решении релятивистских квазипотенциальных уравнений <sup>/4, 5/</sup>. Одним из методов численного решения таких уравнений является метод сплайнов <sup>/6/</sup>.

Рассматривая проблему определения  $p$  максимальных собственных чисел матрицы  $A$ , отметим, что быстрые прямые методы обращения последней, по-видимому, можно построить только в случае  $D = C = E$  <sup>/7/</sup>. Поэтому упомянутую спектральную задачу при  $p$  значительно меньше  $n$  целесообразно решать методом итерирования подпространства <sup>/8, 9/</sup>, используя быстрый алгоритм сложности  $O(n \ln n)$  умножения матриц  $T$  и  $H$  на вектор <sup>/10/</sup>. Если  $\Lambda^1 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  - искомое множество собственных чисел <sup>/С4/</sup>, а  $\Lambda = \{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$ ,  $\lambda_1 \geq 0$  - остальные <sup>/С4/</sup>, то сложность проблемы оценивается величиной  $O(kpn \ln n)$ , где  $k = \ln \varepsilon [\ln q]^{-1}$ ,  $q = \lambda_{p+1} \cdot \lambda_p^{-1}$ ,  $\varepsilon$  - требуемая точность собственных функций.

В ряде задач у исходного континуального оператора, определяющего матрицу  $A$ , имеется сгущающаяся подпоследовательность собственных чисел, включающая множество  $\Lambda$ . В результате величина  $q = \lambda_{p+1} \cdot \lambda_p^{-1}$  близка к 1 при всех  $p$ , т.е. медленная сходимость итераций обусловлена существом задачи. В этом случае значительное уменьшение вычислительной работы может быть достигнуто за счет использования последовательности спектральных задач



$$A_m u_m = \lambda u_m, \quad (u_m, u_m) = 1; \quad m = 1, \dots, M, \quad /2/$$

каждая из которых соответствует одной и той же дискретизации исходного оператора, но при различном числе неизвестных  $n_1 < n_2 < \dots < n_M$ . При реализации МС /многосеточного/ алгоритма решения задачи /2/ используем разложение сеточного решения  $u_m$  по степеням шага дискретизации  $h_m = R \cdot n_m^{-1}$ , что позволяет значительно ускорить сходимость процесса итерирования подпространства, а также уменьшить погрешность приближенного решения  $u_m$ .

В настоящей работе построен численный алгоритм, реализующий МС-метод решения частичной проблемы на собственные значения для матриц  $A$  вида

$$A = D + C \begin{pmatrix} B & V \\ V^T & 0 \end{pmatrix} C, \quad B: R^n \rightarrow R^n, \quad n = 2^{M_1}, \quad /3/$$

$$B = T + H, \quad V = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T,$$

$$D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_{n+1}), \quad C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_{n+1}),$$

возникающей в связи с решением спектральных задач вида

$$v(x)\Psi(x) + \beta c(x) \int_0^a G(x, y) c(y) \Psi(y) dy = \lambda \Psi(x), \quad x \geq 0; \quad /4/$$

$$0 < a \leq \infty, \quad G(x, y) = G_1(|x-y|) + G_2(x+y), \quad \int_0^a \Psi^2(y) dy = 1.$$

Алгоритм реализован в виде программы на FORTRANe и сочетает метод итерирования подпространства в реализации Рутисхаузера<sup>/9/</sup> с алгоритмом быстрого умножения  $T$ - и  $H$ -матриц порядка  $n = 2^{M_1}$  на вектор. МС-итерационный процесс основан на экстраполяции "вперед", предложенной в<sup>/11/</sup> и использующей разложение погрешности собственной функции /СФ/ по степеням шага дискретизации. Для уточнения приближенных решений используется одновременно два типа экстраполяций: экстраполяция Ричардсона относительно шага дискретизации  $h = R/n$  / $R$  - длина интервала дискретизации/, а также предлагаемая в настоящей работе экстраполяция по параметру  $R^{-1}$ , связанная с учетом асимптотического поведения последних компонент сеточного решения  $u = (u_1, \dots, u_{n+1})$  при больших значениях константы  $R^*$ .

Приведены основные характеристики разработанных программ при решении больших задач / $n = 1024$ ,  $p = 4$ / на ЭВМ CDC-6500 и проиллюстрирована эффективность используемых экстраполяций.

\* Во время обсуждения настоящей работы на семинаре ОБМ ЛВТА ОИЯИ И.В.Пузынин сообщил авторам о том, что в работе<sup>/13/</sup> также использовалось уточнение по параметру сингулярности  $R$  при расчетах уравнения Шредингера.

## §1. ОСНОВНЫЕ БЛОКИ АЛГОРИТМА

Последовательное решение задач /2/ для  $m = 1, 2, \dots, M$  осуществляем посредством процедуры RITZIT в реализации<sup>/9/</sup>. Необходимые массивы неизвестных  $X_1(p+1, n_1), \dots, X_M(p+1, n_M)$  в сумме не превышают удвоенного массива  $X_M$  максимальной размерности  $(p+1)n_M$ . Для  $m=1$  в качестве начального значения берется набор  $p$  случайных  $n_1$ -векторов. Для  $m=2$  начальное значение формируется из компонент решения  $X_1$  линейной интерполяцией:

$$X_2(\ell, 2k) = X_1(\ell, k);$$

$$X_2(\ell, 2k-1) = \frac{1}{2}(X_1(\ell, k-1) + X_1(\ell, k+1)), \quad k = 1, \dots, n_1. \quad /5/$$

При  $m \geq 2$  используем экстраполяцию по двум предыдущим решениям, предложенную в<sup>/11/</sup>:

$$X_m(\ell, k) = \omega P_{m-1} X_{m-1}(\ell, k) + (1-\omega) P_{m-2} X_{m-2}(\ell, k), \quad /6/$$

где операторы  $P_{m-1}, P_{m-2}$  интерполируют векторы из  $R^{n_{m-1}}$  и  $R^{n_{m-2}}$  в  $R^{n_m}$  с точностью, согласованной с порядком аппроксимации континуальной задачи. Значение параметра  $\omega$  определим позднее. Коэффициент ускорения  $\sigma_2$  от использования такой процедуры по сравнению с решением лишь одной задачи /2/ для  $m=M$ , можно определить из табл.1, составленной для модельной задачи. Он также превосходит соответствующий коэффициент  $\sigma_1$  для МС-алгоритма с интерполяцией /5/ для всех  $m \leq M$ .

Трудоёмкость процедуры умножения матрицы  $A$  типа /3/ на вектор определяется сложностью умножения блока  $B = T+H$  на  $n$ -вектор, где  $n = 2^{M_1}$ . Эта операция выполняется за  $O(n \ln n)$  умножений<sup>/10/</sup> при использовании быстрого преобразования Фурье /БПФ/. Приведем структуру алгоритма. Обозначим через

$$T = \{t_{j-i}\}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n-1 \quad /7/$$

теплицеву матрицу, а через

$$H = \{h_{i+j}\} = T_1 U_n, \quad i, j = 0, \dots, n-1 \quad /8/$$

ганкелеву матрицу, где  $T_1$  - типа /7/, а  $U_n$  - матрица перестановок размерности  $n \times n$ :

$$U_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу представления /8/ достаточно рассмотреть алгоритм умножения  $T_x$ . Последний реализуется дополнением матрицы  $T$  до циркулянтной  $C_{2n-1} = \text{circ}(t_0, t_{-1}, \dots, t_{-n+1}, 0, t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_1)$  размерности  $2n$  и последующего вычисления первых  $n$  компонент величины  $C_{2n-1}y$ , где  $y = (x, 0)^T$ , согласно представлению /1/

$$C_{2n-1} = FDF^*, \quad D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_{2n}\},$$

$$F = \{f_{k,m}\}, \quad f_{k,m} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \epsilon^{(k-1)(m-1)}, \quad /9/$$

$$\epsilon^{2n} = 1; \quad k, m = 1, \dots, 2n, \quad F \cdot F^* = E,$$

которое реализуется при помощи БПФ за  $O(2n \ln 2n)$  операций. При этом диагональные матрицы  $D$  из разложения /9/, соответствующие  $T$  и  $H$ , хранятся в оперативной памяти ЭВМ и используются многократно. В итоге одна итерация алгоритма выполняется за  $Q = pO(n \ln n) + O(p^2)$  арифметических действий.

Замечание 1. К проблеме /2/, /3/ сводятся спектральные задачи с матрицами  $A_1, A_2$  вида

$$A_1 = D + D_1(T+H), \quad D_1 > 0 \quad A_2 = D + (T+H)D_2, \quad D_2 > 0$$

посредством замен  $z_1 = D_1^{-1/2}u$ ,  $z_2 = D_2^{1/2}u$ , где  $D, D_1, D_2$  - диагональные матрицы.

Замечание 2. К уравнению вида /4/ приводятся, например, следующие задачи:

$$v(x)u(x) + \beta D_1(x) \int_0^a G(x,y)u(y)dy = \lambda u(x), \quad D_1(x) > 0, \quad /10/$$

$$v(x)u(x) + \beta \int_0^\infty G(\phi(x), \phi(y))u(y)dy = \lambda u(x), \quad /11/$$

где  $G(x,y)$  - вида /4/,  $\phi(x) \in C[0, \infty)$ , монотонна при  $x \geq 0$  и  $\phi(x) > 0$ ,  $x > 0$ . К уравнению /4/ сводится также дифференциальная задача

$$P\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)u + v(x)u = \lambda u, \quad 0 \leq x < \infty, \quad u(0) = 0, \quad u \in L_2(0, \infty), \quad /12/$$

где  $P(\xi)$  - полином, а  $\bar{g}(t) = \int_{-\infty}^\infty \bar{v}(x)e^{-itx} dx \in L_2(-\infty, \infty)$ , где  $\bar{v}(x)$  - четное продолжение  $v(x)$  на  $(-\infty, \infty)$ . Соответствующее /12/ уравнение имеет вид

$$P(t)\Psi(t) + \int_0^\infty G(t,r)\Psi(r)dr = \lambda\Psi(t), \quad G(t,r) = g(|t-r|) - g(t+r), \quad g(t) = \text{Re}\bar{g}(t),$$

$$\Psi(t) = i \text{Im} \int_{-\infty}^\infty u(r)e^{-it^2 r} dr, \quad t \geq 0.$$

## §2. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ /4/

Рассмотрим для определенности случай  $a = \infty$ , вариант  $a < \infty$  аналогичен. Предположим, что существует собственная функция  $\psi(x)$  задачи /4/ с СЧ  $\lambda$ . Пусть выполнены следующие условия:

$$1. \quad \Psi(x) \in C^N[0, \infty) \cap L_2[0, \infty), \quad N \geq 2.$$

$$2. \quad \Psi(0) = 0, \quad \Psi(x) = O(x^{-a}), \quad x \rightarrow \infty, \quad a > 0.$$

$$3. \quad v(x) \in C^N[0, \infty), \quad c(x) \in C^N[0, \infty).$$

$$4. \quad G_1(x), G_2(x) \in L_2[0, \infty); \quad G_1(x), G_2(x) \in C^N[\epsilon, \infty) \text{ для } \forall \epsilon > 0 \text{ и имеет, быть может, слабую особенность при } x \rightarrow 0.$$

Аппроксимацию уравнения /4/ строим методом Галеркина. Выберем некоторое число  $a_x > 0$  и положим  $h = a_x n^{-1}$ ,  $R = a_x + h$ . Определим систему базисных функций  $\phi_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, n+1$ , так что  $\phi_k$ ,  $k \leq n$  - кусочно-линейны,  $\phi_k(kh) = 1$ ,  $\phi_k(\xi) = 0$ , где  $\xi = (k-1)h$  или  $\xi = (k+1)h$ . Функция  $\phi_{n+1}(x)$  - кусочно-линейна на отрезке  $[a_x, R]$ ,  $\phi_{n+1}(k) = 1$ ,  $\phi_{n+1}(a_x) = 0$ ,  $\phi_{n+1}(x) = (R/x)^a$ , при  $x \geq R$ . Ищем решение  $\Psi(x)$  в виде

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n+1} u_i \phi_i(x), \quad /13/$$

где  $u_n = (u_1, \dots, u_{n+1})^T$  - вектор неизвестных. Вычисляя скалярные произведения вида  $(\phi_k, f)$ ,  $k \leq n$  по формуле прямоугольников, приходим к алгебраической системе:

$$v(p_i)u_i + c(p_i) \sum_{j=1}^n a_{ij} c(p_j)u_j +$$

$$+ u_{n+1} \beta c(p_i) \int_0^\infty G(p_i, y) c(y) \phi_{n+1}(y) dy = \lambda u_i,$$

$$a_{ij} = \beta \int_0^\infty G(p_i, y) \phi_j(y) dy; \quad i = 1, \dots, n; \quad p_i = ih, \quad p_j = jh;$$

$$\beta \sum_{j=1}^n u_j c(p_j) \int_0^\infty G(p_j, y) c(y) \phi_{n+1}(y) dy + u_{n+1} [(v\phi_{n+1}, \phi_{n+1}) +$$

$$+ \beta \int_0^\infty \int_0^\infty c(p) \phi_{n+1}(p) G(p, y) c(y) \phi_{n+1}(y) dy dp] = \lambda u_{n+1} (\phi_{n+1}, \phi_{n+1}),$$

$i = n+1.$

Полагая  $a^2 = (\phi_{n+1}, \phi_{n+1})$ ,  $c_1 = ah^{-1/2}$  и делаем замену  $z = c_1 \cdot u_{n+1}$ ,  $u_n = (u_1, \dots, u_n, z)^T$ , после чего окончательно получаем систему вида /3/, где

$$D = \text{diag}(v(p_1), \dots, v(p_n), v_{n+1}),$$

$$v_{n+1} = a^{-2} [(v \phi_{n+1}, \phi_{n+1}) + \beta (c(x) \phi_{n+1}, \int_0^{\infty} G(x, y) c(y) \phi_{n+1}(y) dy)],$$

$$C = \text{diag}(c(p_1), \dots, c(p_n), 1), \quad a_i = \beta \cdot c_i^{-1} \int_0^{\infty} G(p_i, y) c(y) \phi_{n+1}(y) dy. \quad /14/$$

Предположим далее, что при  $x \geq R$  справедливо разложение

$$\Psi(x) = \sum_{i=0}^L \frac{b_i}{x^{\alpha+si}} + O\left(\frac{1}{x^{\alpha+1+Ls}}\right), \quad s > 0. \quad /15/$$

Тогда нетрудно проверить, что при  $|v(x)| \leq \text{const}$ ,  $G_1, G_2 \in C^N[0, \infty)$  ошибка аппроксимации исходного уравнения системой /3/, /14/ имеет вид

$$P_n G u - G_n P_n u = P_n \left[ \sum_{i=1}^N z_i(x) h^{1+i} + \sum_{i=0}^L \frac{g_i(x, h)}{R^{\alpha+si-1}} \right] +$$

$$+ O(h^{1+N}) + O(R^{-\alpha-Ls}), \quad /16/$$

$$g_i(x, h) = g_{i0}(x) + g_{i2}(x) h^2 + g_{i3}(x) h^3 + \dots$$

Здесь  $G u$  - значение оператора в левой части /4/,  $G_n$  - матрица, задаваемая системой /14/, а  $P_n$  - проектор на пространство  $R^{n+1}$ , согласно /13/. Разложение /16/ дает основание предположить, что погрешность приближенных решений системы /3/, /14/ имеет двухпараметрическое представление

$$P_h u^* - u_h = P_h \left[ \sum_{i=1}^N c_i(x) h^{1+i} + \sum_{i=1}^L \frac{g_i^o(x, h)}{R^{\alpha-1+si}} \right] + O(R^{-\alpha-Ls}) + O(h^{1+N}),$$

$$\lambda^* - \lambda_n = \sum_{i=1}^N d_i h^{1+i} + \sum_{i=1}^L \frac{\nu_i(h)}{R^{\alpha-1+si}} + O(R^{-\alpha-Ls}) + O(h^{1+N}), \quad /17/$$

$$g_i^o = g_{i0}^o(x) + g_{i2}^o(x) h^2 + \dots; \quad \nu_i = \nu_{i0} + \nu_{i2} \cdot h^2 + \dots; \quad g_{ij}^o, \nu_{ij} \text{ - не зависят от } h.$$

Строгое доказательство разложения /17/ является предметом специального рассмотрения и будет опубликовано в дальнейшем. Однако оно подтверждается численными результатами, приводимыми ниже. Однопараметрическое разложение типа /17/ /нет параметра  $R^{-1}$ / для задачи на конечном отрезке без особенностей на концах, получено в /12/. Практическое значение представления /17/ состоит в том, что оно дает возможность эффективно учесть асимптотику решения при  $x \rightarrow \infty$ , используя двухпараметрическую экстраполяцию как относительно шага дискретизации  $h$ , так и относительно параметра  $R^{-1}$ .

### §3. МГ-АЛГОРИТМ И ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ В ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТАХ

Проиллюстрируем основные характеристики предлагаемого алгоритма на примере точно решаемой модели. Положим  $v(x) = x^2/2$ ,  $G_1(x) = \ln x$ ,  $G_2(x) = -\ln x$ ,  $c(x) = 1$ ,  $\Psi(x) = O(1/x^3)$ ,  $x \rightarrow \infty$ ,  $\Psi(0) = 0$ ,  $\beta = \pi^{-1}$ ,  $s = 2$  в соотношении /16/.  $\lambda_1 = -0,5$ ,  $\Psi_1(x) = x \cdot (x^2 + 1)^{-2}$ .

Сначала укажем необходимые массивы переменных. Для вычисления  $p$  собственных векторов при размерности системы /3/ порядка  $N = n+1$  требуется массив размерности  $2(p+1)N$  для многосеточной реализации алгоритма /удвоение массива по сравнению с расчетом только на последней сетке/, три массива размерности  $N$  для хранения векторов  $D, C, V$ , а также два массива размерности  $2N$  для хранения информации о матрицах  $T$  и  $H$ . Для выполнения итераций в подпространстве требуется массив порядка  $3N$ , а для реализации умножения  $T+H$  на вектор - вспомогательный массив размерности  $4N$ . В итоге общая размерность оперативной памяти составляет  $2(p+1)N + 14N + O(p^2)$ . На ЭВМ CDC-6500 решалась задача для  $p = 4$ ,  $n_7 = 2^{10} + 1 = 1025$  с использованием 6 вспомогательных сеток размерности  $n_i = 2^{3+i} + 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ . Используем обозначения  $\epsilon$  - точность ортонормированных СФ,  $ME$  - число СФ, точность которых контролируется,  $k_i$  - число итераций на сетке  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ . Отметим, что расчетное время  $r_i$  приблизительно пропорционально числу  $k_i$ , причем  $r_i \approx 2 \cdot r_{i-1}$  при  $k_i = k_{i-1}$ . В табл.1 приведены числа  $k_i$  при  $\epsilon = 10^{-5} \div 10^{-8}$ ,  $ME = 1$ ,  $p = 4$ , для двух способов реализации МГ-алгоритма: по формулам /5/- (MG1), и по формулам /6/- (MG2) при  $\omega = 5/4$ , а также при независимых расчетах на сетках  $\omega_i$  - (UG).

Суммарное число итераций для МГ-метода в расчете на последнюю сетку  $\omega_7$  равно  $\Sigma = \sum_{j=1}^7 k_j 2^{j-7}$ .

В табл.2 приведены абсолютные точности  $\Delta$  величины  $\lambda_1$  на сетке  $\omega_7$  и результаты экстраполяции относительно параметра  $h$  по двум и трем сеткам  $\omega_7, \omega_8, \omega_5$ , для различных значений  $a_x$ . Далее приведены результаты экстраполяции по параметру  $R^{-1}$ .

Коэффициенты для экстраполяции по шагу  $h$  хорошо известны, а для экстраполяции по  $R^{-1}$  удовлетворяют в нашем случае системе:

$$\mu_1 + \mu_2 = 1, \quad \frac{\mu_1}{R_1^4} + \frac{\mu_2}{R_2^4} = 0 \text{ для двух значений } R_1 \text{ и } R_2. \text{ Приведем}$$

абсолютные погрешности  $\Delta(R_1, R_2)$  величин  $\lambda(R_1, R_2) = \mu_1 \lambda_1(R_1) + \mu_2 \lambda_1(R_2)$ , где  $\lambda_1(R_i)$  - приближенное значение величины  $\lambda_1$  при  $a_x = R_i - h$ :  $\Delta/10; 12,5/ = -9,0 \cdot 10^{-8}$ ,  $\Delta/10; 15/ = -7,2 \cdot 10^{-7}$ ,  $\Delta/12,5; 15/ = -4,0 \cdot 10^{-8}$ .

Отметим, что коэффициенты  $\mu_1, \dots, \mu_\ell$  для экстраполяции /после уточнения относительно  $h$ / по  $\ell$  значениям  $R_1, \dots, R_\ell$  удовлетворяют системе уравнений

Таблица 1

$\epsilon$	метод	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$K_6$	$K_7$
$10^{-5}$	MG2	40	72	101	81	58	20	31
	MG1	40	72	99	91	77	62	41
	UG	40	76	114	122	121	150	151
$10^{-4}$	MG2	40	72	78	37	29	20	20
	MG1	40	72	77	48	41	36	20
	UG	40	59	90	95	109	123	122
$10^{-3}$	MG2	33	64	42	20	20	20	20
	MG1	33	64	29	29	25	20	20

Таблица 2

$a_x$	$\Delta_7$	$\Delta_{7,6}$	$\Delta_{7,6,5}$
10.	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$2,7 \cdot 10^{-6}$	$2,78 \cdot 10^{-6}$
12.5	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$1,08 \cdot 10^{-6}$
15.	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$6,0 \cdot 10^{-7}$	$4,91 \cdot 10^{-7}$

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_\ell = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \mu_i R_i^{-2-s} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \mu_i R_i^{-2-(\ell-1)s} = 0.$$

**Замечание 3.** Разработанный алгоритм без изменений может быть использован и для решения спектральной задачи с интегро-дифференциальным оператором вида

$$P\left(\frac{d^2}{dx^2}\right) + v(x) + \int_0^a G(x, y) (\cdot) dy, \quad a \leq \infty,$$

$$G(x, y) = G_1(|x - y|) + G_2(x + y),$$

где  $P(t)$  - полином, так как дискретным аналогом оператора  $P(d^2/dx^2)$  для однородных условий Дирихле является симметричная теплицева матрица.

В заключение авторы выражают благодарность Н.В.Скачкову и А.В.Сидорову за эффективное сотрудничество при работе над проблемой, а также Э.А.Айряню за помощь при отладке комплекса программ EVPRIM.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. Вычисления с теплицевыми матрицами. В кн.: Вычислительные процессы и системы. "Наука", М., 1983, с. 124-266.
2. Икрамов Х.Д. Ж. вычисл.матем. и матем. физ., 1981, т. 21, №4, с. 1031-1035.
3. Пузынин И.В. Непрерывный аналог метода Ньютона для численного решения задач квантовой механики. Автореферат диссертации ОИЯИ, 11-12016, Дубна, 1978.
4. Logunov A.A., Tavhelidze A.N. Nuovo Cimento, 1963, 29, p. 380.
5. Kadyshevsky V.G., Mateev M.D. Nuovo Cimento, 1968, 55A, p. 275.
6. Сидоров А.В., Скачков Н.В. ОИЯИ, P2-84-502, Дубна, 1984; Александров Л., Караджов Д. ЖВМ и МФ, 1980, 20, с. 923.
7. Нерсисян А.Б., Папоян А.А. Известия АН Армянской ССР, 1983, №2, т. XVIII, с. 150-161.
8. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. "Мир", М., 1983.
9. Уилкинсон Дж., Райнш С. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. "Машиностроение", М., 1976.
10. Бадева В., Морозов В.А. В кн.: Численный анализ на ФОРТРАНе. Изд-во МГУ, М., 1977, вып. 20, с. 80-90.
11. Ауг'ян Е.А., Zhidkov E.P., Khoromsky V.N. Comp.Phys.Comm., 1983, 29, p. 125-130.
12. Нгуен М., Хоромский Б.Н., Ямалеев Р.М. Дифф.уравнения, 1980, т. 16, №7, с. 1293-1302.
13. Веницкий С.В. и др. ОИЯИ, P4-84-642, Дубна, 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел  
20 ноября 1984 года.

СООБЩЕНИЯ, КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ, ПРЕПРИНТЫ И СБОРНИКИ ТРУДОВ КОНФЕРЕНЦИЙ, ИЗДАВАЕМЫЕ ОБЪЕДИНЕННЫМ ИНСТИТУТОМ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ЯВЛЯЮТСЯ ОФИЦИАЛЬНЫМИ ПУБЛИКАЦИЯМИ.

Ссылки на СООБЩЕНИЯ и ПРЕПРИНТЫ ОИЯИ должны содержать следующие элементы:

- фамилии и инициалы авторов,
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс публикации,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы /при необходимости/.

Пример:

1. *Первушин В.Н. и др. ОИЯИ, P2-84-649, Дубна, 1984.*

Ссылки на конкретную СТАТЬЮ, помещенную в сборнике, должны содержать:

- фамилии и инициалы авторов,
- заглавие сборника, перед которым приводятся сокращенные слова: "В кн."
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс издания,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы.

Пример:

*Колпаков И.Ф. В кн. XI Международный симпозиум по ядерной электронике, ОИЯИ, Д13-84-53, Дубна, 1984, с.26.*

*Савин И.А., Смирнов Г.И. В сб. "Краткие сообщения ОИЯИ", № 2-84, Дубна, 1984, с.3.*

Жидков Е.П., Хоромский В.Н.

P11-84-740

Многосеточный алгоритм решения частичной проблемы на собственные значения для класса матриц типа теплицевых

Построен численный алгоритм, реализующий многосеточный метод решения частичной проблемы на собственные значения для одного класса матриц, близких к теплицевым. Использован быстрый алгоритм умножения теплицевой матрицы на вектор, а также метод итерирования подпространства и специальный алгоритм двухслойной экстраполяции для выбора начальных приближений. Применяется способ уточнения приближенных решений, учитывающий как разложение погрешности по степеням шага дискретизации, так и асимптотику решения в окрестности особой точки. Приведены основные характеристики алгоритма для задачи с матрицей размерности  $n \times n$  для  $n = 1025$ .

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.  
Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Zhidkov E.P., Khoromsky V.N.

P11-84-740

Multigrid Algorithm for Several Eigenvalue Problem Solution for One Class of Matrices Close to Toeplitz Ones

The numerical algorithm is developed which uses multigrid method for several eigenvalue problem solution for one class of matrices, close to Toeplitz ones. Fast algorithm is used for multiplying the Toeplitz matrix by vector, method of subspace iterating and a special algorithm of two-level extrapolation for choosing the initial approximation. The method for increasing the accuracy is used which takes into account both the decomposition of an error over degrees of discretization steps and the asymptotic form of the solution in the neighbourhood of a singular point. The main characteristics of an algorithm for the problem with matrix  $n \times n$  for  $n = 1025$  are given.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984