

**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P11-84-596

А.В.Егоров, Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ
ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА
НА ПОВЕРХНОСТИ КУБА
Часть 2**

1984

В этой части описывается численный метод решения граничных интегральных уравнений /ГИУ/ для оператора Лапласа, заданных на поверхности куба. Метод позволяет на основе блочной структуры возникающих при дискретизации ГИУ матриц провести экономию вычислительных ресурсов.

Приводятся численные результаты по решению задачи Неймана с использованием варианта метода неполного обращения^{1,2/}. В Приложении выписаны формальные решения /в виде рядов по сферическим функциям/ краевых задач для уравнения Лапласа первого, второго и третьего типов в случае шаровой поверхности.

§1. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ГИУ: СТРУКТУРА ВОЗНИКАЮЩИХ МАТРИЦ

Рассматриваются ГИУ для уравнения Лапласа

1/ задача Дирихле $a = -1$ - внутренняя / $a = 1$ - внешняя/. ГИУ -

$$Lv = a(E + aK)g = \Psi(M); \quad g(M) = u(M), \quad M \in \Gamma.$$

2/ задача Неймана $a = -1$ - внутренняя / $a = 1$ - внешняя/. ГИУ

$$(E + aK)u = aLf \equiv \Phi(M) = \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(P) \Big|_{P=M}, \quad M \in \Gamma.$$

Дискретизация уравнений проводится на основе коллокации и кусочно-линейной интерполяции базисными функциями вида

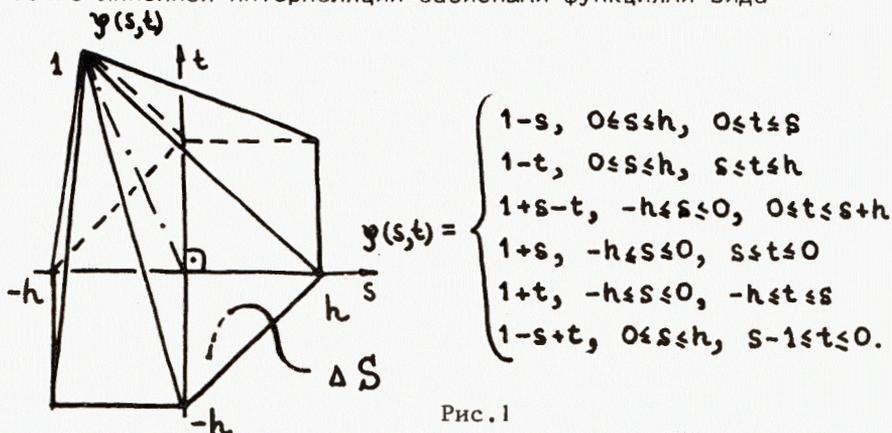


Рис. 1

Обозначения:

$$Lv = \int_{\Gamma} L(M,P)v(P)d\sigma_P = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r_{MP}} v(P)d\sigma_P;$$

$$Ku = \int_{\Gamma} K(M,P)u(P)d\sigma_P = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r_{MP}^2} u(P)d\sigma_P;$$

Γ - ляпуновская поверхность, геометрически близкая к поверхности куба, \vec{n} - внутренняя нормаль в точках Γ , $d\sigma_P$ - элемент площади Γ , u, v - граничные значения гармонической функции и ее производной по \vec{n} соответственно.

Дискретизация проводится на равномерной квадратной сетке с шагом h . Нумерация узлов представлена на рис.2. В точках ребер куба значение краевых условий для упрощения алгоритмической логики полагается нулем, что дает аппроксимацию $\sim h$. В дальнейшем через L и K обозначаются матрицы, соответствующие интегральным операторам:

$$L = (l_{ij})_{i,j=1,N}; \quad l_{ij} = \int_{\Delta S_j} \frac{1}{r_{M_i P}} \phi_j(P)d\sigma_P;$$

$$K = (k_{ij})_{i,j=1,N}; \quad k_{ij} = \int_{\Delta S_j} \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r_{M_i P}^2} \phi_j(P)d\sigma_P.$$

N - число носителей ΔS_i на поверхности куба.

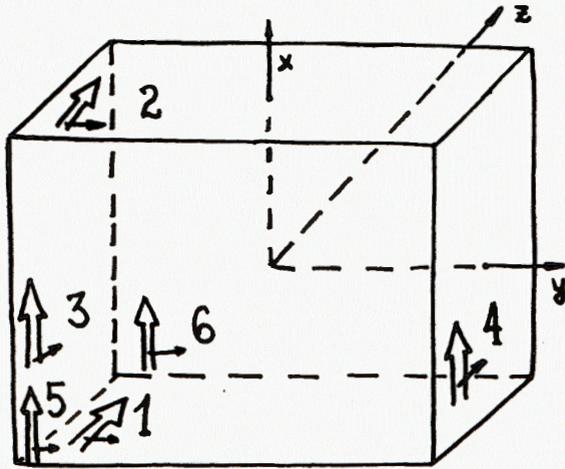


Рис.2. \Rightarrow - направление главной нумерации; \rightarrow - смещение главного направления; цифры /1-6/ - порядок нумераций граней.

Поставим каждому двум граням в соответствие блок в матричной записи для L и K . В^{3/} с учетом такой блочности изучена структура матриц L и K для параллелепипеда и отдельно - для куба.

Показано, что общая память, необходимая для хранения L и K , $\sim p^3$, где p - число узлов вдоль ребра куба. Оценка получается экономией памяти на двух уровнях: 1 - блочном, 2 - внутри блока.

Предлагаемый метод основан на экономии памяти на первом уровне. Согласно^{3/}, достаточно знать элементы 5 блоков из 72 составляющих L и K ; все блоки выражаются через эти пять с помощью операторов перенумерации, что ведет к экономии памяти в 14 раз /14,4/.

Матрицы L и K для конкретного вида нумерации /рис.2/ и носителя /рис.1/ представлены в табл.1 /укажем матрицу \mathcal{O}_b , понимая, что это L либо K /.

Таблица 1

	1	2	$\mathcal{O}_b (N \times N)$	4	5	6
1	A	B	C	I11(I), J	I2(I), J	I11I2(I), J
2	B	A	I1(I), I2I22(J)	I11I1(I), I2I22(J)	I1I2(I), I2I22(J)	I22(I), I2I22(J)
3	I2(I), I2(J)	I2I1(I), I2(J)	A	B	I, I2(J)	I11(I), I2(J)
4	I1I2(I), I22(J)	I22(I), I22(J)	B	A	I1(I), I22(J)	I1I11(J), I22(J)
5	I2(I), J	I11I2(I), J	I, I2(J)	I11(I), I2(J)	A	B
6	I1I2(I), I2I22(J)	I22(I), I2I22(J)	I1(I), I22(J)	I1I11(I), I22(J)	B	A

Здесь A, B, C - матрицы порядка $N/6$. Цифры 1-6 /в табл.1/ соответствуют нумерации граней куба на рис.2. Запись

$$D = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{p_p} \dots \mathcal{O}_{p_n}(I) \\ \mathcal{O}_{p_k} \dots \mathcal{O}_{p_m}(J) \end{pmatrix}, 0 \leq k, \ell, m, n \leq 4,$$

означает, что данный блок получен из блока $C = (c_{ij})$, $i, j = 1, N/6$ так, что для $\forall d_{ij}$ справедливо выражение:

$$d_{ij} = c_{\mathcal{O}_{p_\ell}} \dots \mathcal{O}_{p_n}(i), \mathcal{O}_{p_k} \dots \mathcal{O}_{p_m}(j); D = (d_{ij}), \quad i, j = 1, N/6.$$

\mathcal{O}_{p_k} - один из операторов перенумерации: I1, I2, I11, I22.

$$\mathcal{O}_{p_0}(j) = j, \quad \mathcal{O}_{p_0}(i) = i; \quad i, j = 1, N/6.$$

Воздействие операторов на номер происходит справа налево. Отметим также, что $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, N/6$ для матрицы K состоит только из одного элемента: $a_{ij} = 0 \forall i, j = 1, N/6$.

Операторы перенумерации I1, I2, I11, I22 охарактеризованы в табл.2 осью /1/, относительно которой происходит отражение узла, а также направлением главного отсчета /2/ узлов со смещением главного направления /3/. Для этих операторов справедливы соотношения $I1^2 = E$, $I2^2 = E$, $I11^2 = E$, $I22^2 = E$.

Таблица 2

I1	I11	I2	I22

§2. ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС

Численное решение ГИУ основывается на двухуровневых итерационных процессах, использующих блочность вида /2.1/.

$\mathcal{O}_b(N \times N)$

	1	2	3
1	$-X_1$	$-X_2$	$-X_3$
2	$-X_4$	$-X_1$	$-X_5$
3	$-X_6$	$-X_7$	$-X_1$

$\stackrel{\text{def}}{=} X$

Примечание:

а/ цифры 1-3 соответствуют граням, перпендикулярным осям x, y, z на рис.2.

б/ $X_5 = X_7$, $X_3 = X_6$.

/2.1/

Поясним алгоритм на примере внешней задачи Неймана: $Ku + u = f$. Рассматривается итерационный процесс вида:

$$\begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ \vdots \end{pmatrix} + f, \quad n = 0, 1, \dots \quad /2.2/$$

Обозначения:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

$u_i, f_i, i = 1, 2, 3$ - компоненты соответствующих векторов u и f с учетом блочности по осям.

Данный итерационный процесс можно рассматривать как осуществление двух последовательных шагов. Во время первого шага вычисляется компонента u_1^{n+1} посредством обращения блока $-(E + K)_1$, которое реализуется методом простых итераций /внутренний итерационный процесс/. Второй шаг сводится к пересчету компонент u_2^{n+1} и u_3^{n+1} по формуле /2.2/. Расчетные формулы имеют вид:

$$1. (u_1^{n+1})^{J+1} = K_1 (u_1^{n+1})^J + \tilde{f}_1, \quad J = 0, 1, \dots$$

$$\tilde{f}_1 = f_1 + K_2 u_2^n + K_3 u_3^n, \quad (u_1^{n+1})^0 = u_1^n.$$

$$2. u_2^{n+1} = K_4 u_1^{n+1} + \tilde{f}_2, \quad \tilde{f}_2 = f_2 + K_5 u_1^n + K_6 u_3^n.$$

$$3. u_3^{n+1} = K_7 u_1^{n+1} + \tilde{f}_3, \quad \tilde{f}_3 = f_3 + K_8 u_1^{n+1} + K_9 u_2^n.$$

Если в 1 ограничиться $J=0$, то на один шаг внешнего процесса будет приходиться один шаг внутреннего. Тогда коэффициент сжатия q за одну итерацию можно оценить выражением $q \approx q_{\text{внешн}} \cdot q_{\text{внутр}}$, где $q_{\text{внешн}}$ - коэффициент сжатия для внешнего процесса, $q_{\text{внутр}}$ - для внутреннего. Численные исследования показали, что $q_{\text{внешн}} < 0,5$. Аналитические расчеты для $q_{\text{внутр}}$ дали оценку $q_{\text{внутр}} \leq 0,852$. Поэтому $q \approx q_{\text{внешн}} \cdot q_{\text{внутр}} \leq 0,426$. Численные результаты уточнили эту оценку: $q \sim 0,2$.

В табл.3 для сетки шага $h=0,2$, заданной на поверхности куба со стороной, равной 0,8, приведена зависимость величины $\|u^{n+1} - u^n\|_{\ell_2}$ от номера итерации n. Таблица характеризует

$$q = q(n) = \frac{\|u^{2n+1} - u^n\|_{\ell_2}}{\|u^n - u^{n-1}\|_{\ell_2}}. \text{ Отметим, что для аналитической оценки}$$

Таблица 3

n	!	0	!	1	!	2	!	3	!	4	!	5	!	6	!	7	!	8	!	9
$\ u^{n+1} - u^n\ $!	1,969-1	!	5,790-2	!	4,198-3	!	15,133-4	!	1,107-4	!	1,545-5	!	3,200-6	!	6,732-7	!	1,353-7	!	2,825-8

Таблица 4

Шаг разбиения	$h/2$	$h/3$	$h/4$	$h/5$	$h/6$	$h/7$	$h/8$
δu^h	0,3654	0,2733	0,2043	0,1586	0,1307	0,1136	0,1021

Q внутри использовались значения величин, вычисляемых для куба точно $\|K_i\| = 0,128$; $\|L_i\| = 0,436$; $i = 2, \dots, 7$, где норма определяется $\|A\| = \max_{i \leq \frac{N}{3}} \sum_{j=1}^{N/3} |a_{ij}|$. Для параллелепипеда приведем оценки $\|K_1\|$ и $\|L_1\|$:

$$\|K_1\| = \frac{2}{\pi} \arctg \frac{ba}{2c \sqrt{b^2 + a^2 + 4c^2}}, \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + 4c^2}} \geq \|L_1\| \geq \frac{c^2}{\sqrt{4a^2 + c^2}},$$

где $2 \cdot a$, $2 \cdot b$, $2 \cdot c$ - длины сторон параллелепипеда и $a \geq b \geq c$.

С использованием описанного алгоритма решена внешняя задача Неймана с тестовой гармонической функцией $1/r$ для куба, расстояние от центра которого до грани равно 0,4. В табл.4 приведены результаты убывания ошибки решения $\delta u^h = \|u^h - u^*\|_{l_2}$, где $u^* \equiv (u_1^*, \dots, u_N^*)$, $u^h \equiv (u_1^h, \dots, u_N^h)$, u_i^* - значение точного решения в i узле, u_i^h - приближенного.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В части 1 настоящей работы для интегральных операторов L и K , когда Ω_i - шаровая область с радиусом R , отмечено:

- $K = \frac{1}{2R} L$, $L = L^* \text{ в } L_2(\Gamma)$, Γ - граница шара.
 - $g_0 = \text{const}$, где g_0 удовлетворяет уравнению $K^* g_0 = g_0$.
 - L обладает собственными значениями $\lambda_n = R/(n+0,5)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $(2n+1)$ -кратными с собственными функциями Y_n - сферическими функциями n -го порядка.
- Это позволяет сформулировать утверждения, которые дадут решение уравнения Лапласа в интегральной постановке для краевых условий 1-го, 2-го и 3-го родов.

Пусть $\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$ - ортонормированная система базисных сферических функций. Пронумеруем ее так, чтобы порядок следования базисных функций ϕ_i соответствовал невозрастающей последовательности собственных значений λ_i оператора L . С учетом кратности λ_i каждой ϕ_i соответствует λ_i по формуле:

$$\lambda_i = \frac{R}{[i^{1/2}] + 0,5}.$$

Используя полноту $\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$, сформулируем следующие утверждения, где в записях вида $\Theta = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \phi_i$ полагаем $\omega_i = (\Theta, \phi_i)$, $i = 0, \dots, \infty$.

1. Внутренняя задача Неймана

Пусть $v = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i$ ограничен в смысле L_2 /т.е. $(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2)^{1/2} < \infty$).

Тогда $u = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \phi_i < \infty$ в смысле L_2 , где $b_i = -(a_i \cdot R) / [i^{1/2}]$.

2. Внешняя задача Неймана

Пусть $v = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i < \infty (L_2)$. Тогда $u = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \phi_i < \infty (L_2)$, где

$$b_i = \frac{a_i \cdot R}{1 + [i^{1/2}]}$$

3. Внутренняя задача Дирихле

Пусть $u = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \phi_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} b_i [i^{1/2}] < \infty (l_2)$. Тогда $v = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i < \infty (L_2)$, где $a_i = -b_i ([i^{1/2}] / R)$.

4. Внешняя задача Дирихле

Пусть $u = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \phi_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} b_i (1 + [i^{1/2}]) < \infty (l_2)$. Тогда $v = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i < \infty (L_2)$, где $a_i = b_i \frac{1 + [i^{1/2}]}{R}$.

Отметим, что в 1 и 3 суммирование ряда для v и соответственно для u начинается с $i=1$. Это связано с условием разрешимости задачи Неймана для уравнения:

$$\frac{1}{2R} Lu - u = Lv = f, \quad (f, g_0) = (Lv, g_0) = (v, Lg_0) = (v, 1) = 0,$$

причем условие разрешимости $(v, 1) = 0$ убирает в разложении для u слагаемое b_0 , которое обращается в ∞ .

Суммирование рядов во 2 и 4 с $i=1$ объясняется условием разрешимости задачи Неймана - $(u, g_0) = 0$ для уравнения:

$$u + \frac{1}{2R} Lu = Lv = f.$$

Так как $g_0 = \text{const}$ для шара, то: $(u, g_0) = 0 \Leftrightarrow (u, 1) = 0$.

Доказательство утверждений получается при непосредственной подстановке рядов для u и v в соответствующие граничные уравнения и с использованием ортонормируемости системы базисных сферических функций $\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$.

На основе ГИУ легко получить решения уравнения Лапласа в том случае, когда Ω_i - шар, для краевых условий 3-го рода вида:

(с) $u + \gamma v = f$, где $\gamma - \text{const} \neq 0$, $f = f(M)$, $M \in \Gamma$. Такого типа

задача решается сведением ее к задаче Неймана. Сформулируем соответствующие утверждения.

5. Внутренняя задача с краевым условием (с)

Пусть $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \phi_i < \infty (L_2)$ и γ таковы, что $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\gamma - \frac{R}{[i^{1/2}]}]} < \infty (l_2)$.

Тогда задача для уравнения Лапласа с краевым условием вида (с)

сводится к задаче Неймана 1, где $a_i = \frac{f_i}{\gamma - \frac{R}{[i^{1/2}]}}$, $i = 1, \dots, \infty$.

6. Внешняя задача с краевым условием (с)

Пусть $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \phi_i < \infty (L_2)$ и γ таковы, что $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\gamma + \frac{R}{1 + [i^{1/2}]}} < \infty (l_2)$.

Тогда задача для уравнения Лапласа с краевым условием вида (с)

сводится к задаче Неймана 2, где $a_i = \frac{f_i}{\gamma + \frac{R}{1 + [i^{1/2}]}}$, $i = 1, \dots, \infty$.

Отметим, что суммирование ряда для f начинается с $i=1$. Это связано, как и ранее, с условиями разрешимости: $(v, 1) = 0$ и $(u, g_0) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов Ю.Д. Метод осреднения функциональных поправок. "Наукова думка", Киев, 1967.
2. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р11-83-596, Дубна, 1983.
3. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р11-83-329, Дубна, 1983.

Егоров А.В., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. P11-84-596
Численное решение граничных интегральных уравнений
для оператора Лапласа на поверхности куба. Часть 2

Построен экономичный итерационный метод решения граничных интегральных уравнений для оператора Лапласа на поверхности куба, использующий блочную структуру возникающих матриц. Приведены численные результаты по решению внешней задачи Неймана.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Н.С.Панковой

Egorov A.V., Zhidkov E.P., Khoromskij B.N. P11-84-596
Numerical Solution of Boundary Integral Equations
for Laplace Operator on the Cube's Surface. Part 2

Economic iterational method for solution of boundary integral equations for Laplace operator was built on the surface of cube using block structure of occurring matrices. Numerical results were given for solution of external Neumann problem.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984