сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-84-595

А.В.Егоров, Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ПОВЕРХНОСТИ КУБА

Часть 1

1984

В работе рассматриваются численные алгоритмы решения граничных интегральных уравнений /ГИУ/, соответствующих задачам Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в случае трех пространственных переменных.

В областях, ограниченных поверхностью куба, решение ГИУ осуществляется экономичными методами, использующими кусочно-постоянную и кусочно-линейную интерполяции граничных значений гармонической функции и ее нормальной производной. Построение численных алгоритмов основывается на приведенных в работе свойствах возникающих интегральных и матричных операторов.

Выбор вида ограничивающей поверхности связан с возможностью реализации варианта метода разделения областей, в котором на одном из этапов решается ГИУ для стандартной границы /поверхность куба/ методами, оптимизирующими вычислительные ресурсы. Для решения задач в области с границей, отличной от границы куба, возможен следующий вариант вычислений на шаге интерационного процесса: область погружается в куб /либо куб погружается в область/, некоторым способом производится пересчет краевых условий на поверхность куба, где решается граничное интегральное уравнение построенными численными методами.

Численные алгоритмы решения ГИУ на границе куба реализованы в виде комплекса программ на языке фортран. Приведены данные расчетов на БЭСМ-6.

В Приложении /см. ч. 2 данной работы/ на основе постановки метода граничных интегральных уравнений для областей, ограниченных поверхностью шара, выписаны формальные решения /в виде рядов/ задач для уравнения Лапласа с краевыми условиями первого, второго или третьего рода.

§1. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ВИДЕ ГИУ. СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ. РАЗРЕШИМОСТЬ ГИУ

1. Постановка задач

Пусть поверхность Ляпунова Γ разделяет трехмерное пространство $\mathbf{R}^3$ на две области Ω_i и Ω_ℓ, так что $\Omega_i \cup \Gamma \cup \Omega_\ell = \mathbf{R}^3$, $\Omega_i \cap \Omega_\ell = \phi$, Ω_ℓ содержит бесконечно удаленную точку.

Рассмотрим задачу об определении гармонической в области Ω_i или Ω_ℓ функции $u(M)$ по ее значениям на границе Γ /задача Дирихле/ либо по значениям ее нормальной производной /задача Неймана/. Задачу в области Ω_i назовем внутренней, а в области Ω_ℓ -

внешней. Приведем вариант метода ГИУ, делающий постановку указанных задач единообразной. Через $\frac{\partial+}{\partial n}$ обозначим производную по внутренней нормали к границе Γ области Ω_i, а через $\frac{\partial-}{\partial n}$ - по внешней. Пусть далее

$$\Delta u = 0,\ M \in \Omega_i;\ \Delta w = 0,\ M \in \Omega_\ell, \qquad /1.1/$$

тогда имеют место формулы Грина:

$$au(M) - \int_\Gamma (K(M, P)u(P) - L(M, P)\frac{\partial+}{\partial n}u(P))d\sigma_P = 0, \qquad /1.2/$$

$$a = \{0,\ M \in \Omega_\ell;\ 1, M \in \Gamma;\ 2,\ M \in \Omega_i\};$$

$$a_1 w(M) - \int_\Gamma (K_1(M, P)w(P) - L(M, P)\frac{\partial-}{\partial n}w(P))d\sigma_P = 0, \qquad /1.3/$$

$$a_1 = \{0,\ M \in \Omega_i;\ 1,\ M \in \Gamma;\ 2,\ M \in \Omega_\ell\},$$

где

$$K(M, P) = (1/2\pi)\frac{\partial+}{\partial n_P}(r_{MP}^{-1});\ K_1(M, P) = (1/2\pi)\frac{\partial-}{\partial n_P}(r_{MP}^{-1}),$$

$L(M, P) = (1/2\pi)\, 1/r_{MP}$, $P \in \Gamma$; $M \in R^3$, $d\sigma_P$ - элемент площади Γ.

При этом равенство /1.3/ выполнено по требованию регулярности на бесконечности $w(M)$: $w(M) = o(r^{-1})$; $\frac{\partial-}{\partial n}w(M) = o(r^{-2})$, $r(M, \mathcal{O}) = r \to \infty$, $\frac{\partial-}{\partial n}$ определяется в точках M: $r(M, \mathcal{O}) = r$, где $\mathcal{O}$ - начало координат.

Полагая $M \in \Gamma$, из равенства /1.2/ получим ГИУ для внутренней краевой задачи, а из /1.3/ - для внешней. Между этими уравнениями существует связь. Определим интегральные операторы на Γ:

$$Lv \equiv \int_\Gamma L(M, P)v(P)\,d\sigma_P;\ Ku \equiv \int_\Gamma K(M, P)\,u(P)\,d\sigma_P \qquad /1.4/$$

$$K_1 u \equiv \int_\Gamma K_1(M, P)u(P)d\sigma_P;\ M, P \in \Gamma$$

и условимся брать направление нормали в обеих формулах совпадающим с $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial+}{\partial n}$.

Пусть $u(M)$ и $v(M) = \frac{\partial}{\partial n}u(P)|_{P=\bar{M}}$, $M \in \Gamma$, $P \in \Omega_i$ $(P \in \Omega_\ell)$ соответствуют решениям $u(\bar{M})$ (или $w(\bar{M})$), $\bar{M} \in \Omega_i$ $(\bar{M} \in \Omega_\ell)$ для задачи /1.1/.

Учитывая $K_1 = -K$, ГИУ для /1.2/, /1.3/ при $M \in \Gamma$ запишем в виде

$$(E + aK)u - aLv = 0, \qquad /1.5/$$

$a = -1$ - для внутренней задачи, $a = 1$ - для внешней.

При этом задача Дирихле сводится к уравнению

$$Lv = a(E + aK)g \equiv \psi(M);\ g(M) = u(M),\ M \in \Gamma, \qquad /1.6/$$

а задача Неймана - к уравнению

$$(E + aK)u = aLf \equiv \varphi(M);\ f(M) = \frac{\partial}{\partial n}u(P)|_{P=M},\ M \in \Gamma. \qquad /1.7/$$

Для выяснения вопроса разрешимости /1.6/, /1.7/ естественно выяснить свойства входящих в эти уравнения операторов K и L.

2. Свойства интегральных операторов K и L. Разрешимость ГИУ

A. 1. Оператор K является фредгольмовым и осуществляет действие $L_2(\Gamma) \to C(\Gamma)$.
   2. $\lambda = -1$ не является собственным значением оператора $K^{/1/}$.
   3. $\mu = 1$ является собственным значением K, однократным, максимальным по модулю, соответствующая собственная функция равна $\mathrm{const}^{/1/}$.
   4. Если Ω_i - выпуклая область, то $g_0 \geq 0^{/2/}$, где g_0 удовлетворяет уравнению: $K^* g_0 = g_0$.

B. 1. L - симметрический оператор в $L_2(\Gamma)$, ограниченный в $C(\Gamma)$.
   2. L - компактный оператор при действии: $L^\infty \to \mathrm{Lip}\,\beta$, β - показатель Ляпунова $/0 < \beta < 1/^{/3/}$.
   3. $L > 0$ в $L_2(\Gamma)^{/8/}$.
   4. $Lg_0 = \mathrm{const}^{/4/}$.

Исходя из этих свойств, можно предложить метод однозначного разрешения /1.7/ на основе принципа сжимающих отображений /для внутренней задачи Неймана на $X = \{u: (u, 1) = 0\}$), добавляя необходимое и достаточное, согласно теории Фредгольма, условие разрешимости. Для $a = 1 (a = -1)$ данное условие соответственно принимает вид /D.1/ (/D.2/): $(v, 1) = 0$/D.1/, $((u, g_0) = 0)$ /D.2/.

Из свойства 3 п. B сразу следует утверждение о единственности решения внутренней /внешней/ задач Дирихле в интегральной постановке.

Утверждение 1

Для всякой $f = Ku - u(f = Ku + u)$ из $C(\Gamma)$ такой, что $(f, g_0) = 0$, уравнение $Lv = f$ имеет единственное решение v, для которого $(v, 1) = 0$ $((u, g_0) = 0)$. Требования на v и u соответствуют соотношениям (D.1), (D.2) разрешимости соответствующих задач Неймана в интегральной постановке. Отметим, что утверждение 1 говорит о единственности решения уравнения $Lv = f$, но не фиксирует метода нахождения v. Как известно /5/, уравнение Фредгольма первого рода с компактным оператором есть пример некорректно поставленной по Адамару задачи. В нашем случае не существует ограниченного L^{-1}, т.е. не выполняется физическое требование - устойчивости решения. Эффективные методы решения подобного рода задач развиты в /5/: метод подбора, квазирешения, конструирования регуляризующего оператора и т.д. В данной работе был использован так называемый метод саморегуляризации, смысл которого выяснится позднее. Некоторые позитивные стороны этого метода отмечены в /6/.

С. **Замечание 1** В случае, когда Ω_i - шаровая область, приведем без доказательства утверждение.

Утверждение 2 Если Ω_i - шаровая область, то:

1/ $K = (1/2R)L$, 2/ $K^* = K$, 3/ $g_0 = \text{const}$, 4/ L обладает собственными значениями $\lambda_n = R/(n + 0.5)$, $n = 0,1,2...$, $(2n+1)$-кратными с собственными функциями $Y_n(\theta, \phi)$ - сферическим функциям n-го порядка.

Здесь R - радиус шара, $Y_n(\theta, \phi) = \sum\limits_{k=-n}^{n} C_k Y^k_n(\theta, \phi)$; $Y^k_n(\theta, \phi) = P^k_n(\cos\theta)\sin k\phi$; $Y^{-k}_n(\theta, \phi) = P^k_n(\cos\theta)\cos k\phi$; $Y^0_n(\theta, \phi) = P^0_n(\cos\theta) = P_n(\cos\theta)$ - фундаментальные сферические функции n-го порядка,

где $P^k_n(\xi) = (1 - \xi^2)^{k/2} \dfrac{d^k}{d\xi^k} P_n(\xi)$ - присоединенные функции Лежандра.

Полнота и ортогональность фундаментальных сферических функций n-го порядка позволяют выписать формальные решения /в виде рядов/ краевых задач для уравнения Лапласа первого, второго и третьего типов в случае, когда Ω_i - шар. Результаты приведены в Приложении части 2 этой работы.

D. На основании исследования спектра L и K для шара выскажем гипотезу о спектральном поведении интегральных операторов, когда Ω_i - произвольная выпуклая область.

Гипотеза: $\lambda_k(L, K) \sim \mathcal{O}(1/k)$, $d_{\lambda_k(L, K)} \sim k$,

где $d_{\lambda_k(L, K)} \overset{\text{def}}{\equiv}$ кратность $\lambda_k(L, K)$, $k = 1, 2, \ldots$

Замечание 2 В случае, когда Γ - поверхность куба, спектральные свойства дискретизованных операторов L и K аналогичны отмеченным в утверждении гипотезы для интегральных операторов и приводятся в §2.

§2. ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМОВ

В этом параграфе рассматривается ляпуновская поверхность Γ, геометрически близкая к поверхности куба. Производится дискретизация /1.6/, /1.7/ на основе кусочно-постоянной интерполяции, соответствующие линейные уравнения получаются на основе метода коллокации. Построение линейных уравнений с использованием методов, аналогичных вариационным, либо методу интегральных тождеств, приводит к сохранению полезных свойств исходных операторов у дискретных аналогов /положительная определенность и симметричность L в нашем случае/. Но тогда для вычисления матричного элемента кратность соответствующего интеграла возрастает с 2 /коллокация/ до 4 /интегральные тождества, вариационный метод/, что увеличивает время счета. Поэтому используем коллокационный принцип построения алгебраической системы и проводим численное исследование свойств дискретизованных операторов.

Ранее отмечалось, что решение задачи Дирихле в интегральной постановке проводится по методу саморегуляризации, применимость которого связана со спектральными свойствами дискретного аналога L.

Суть метода:

Решение v /1.6/ ищется в классе функций вида $\sum\limits_{i=0}^{n-1} v_i \varphi_i(M)$, $M \in \Gamma$,

где n - количество носителей, покрывающих Γ, φ_i - базисная функция, соответствующая i носителю. Неизвестные величины v_i, которые являются значениями искомого решения v в узлах M_i, отыскиваются из условий коллокации в тех же узлах: $\sum\limits_{i=0}^{n-1} v_i L\varphi_i(M_j) = f(M_j)$, $j = 0, \ldots, n-1$. Разрешимость этой системы линейных алгебраических уравнений относительно v_i эквивалентна возможности проинтерполировать $f(M)$ функциями $\{L\varphi_i(M)\}$ $i = 0, \ldots, n-1$ по значениям в узлах сетки.

Спектральные свойства матрицы $(L\varphi_i(M_j))$ позволяют использовать устойчивый прямой метод для ее обращения. Исследования показали, что для дискретного оператора K спектральные свойства близки к соответствующим для интегрального оператора. Это позволяет применять принцип сжимающих отображений для задач Неймана. Результаты численных исследований свойств дискретных K и L приведены в п.1. Первый подход к численному решению возникающих систем уравнений специального вида /назовем его методом А./ рассмотрен в п.2.

1. Кусочно-постоянная интерполяция

А. Дискретизация уравнений /1.6/, /1.7/

Для экономии записи в дальнейшем ограничимся видом ГИУ /1.6/ при $a = -1$. Поверхность куба разбивается на элементарные носители - квадраты площадью: $h^2 = S/n$, где h - шаг разбиения /разбиение равномерное/, S - площадь поверхности куба, n - количество носителей. Искомое решение v /аналогично u в случае задачи Неймана/ ищем в классе функций вида:

$$Q_n v_h = \sum_{i=0}^{n-1} v_i \varphi_i(M),\ M \in \Gamma,\ v_h = \{v_i\}_{i=0}^{n-1},$$

где Q_n - оператор кусочно-постоянного восполнения, а $\varphi_i(M)$ - базисные функции:

$$\varphi_i(M) = \begin{cases} 1, & M \in \Delta S_i \\ 0, & M \bar{\in} \Delta S_i \end{cases}$$

Уравнение для функции $v_h(M)$ строим по методу коллокации:

$$\int_\Gamma L(M_j, P) Q_n v_h(P)\, d\sigma_P = \int_\Gamma K(M_i, P) Q_n u_h(P)\, d\sigma_P - u(M_i) = f(M_i),$$

где M_i - середины элементарных квадратов ΔS_i площадью h^2. В матричной форме: $P_n L(Q_n v_h) = P_n f$ или $L_h v_h = K_h u_h - E u_h$, где P_n - оператор проектирования на построенную равномерную сетку. $L_h =$

$$= (\ell_{ij});\quad K_h = (k_{ij});\quad E = (\delta_{ij}),\ \ell_{ij} = \int_{\Delta S_j} L(M_i, P)\, d\sigma_P,\ ,\ k_{ij} = $$

$$= \int_{\Delta S_j} K(M_i, P)\, d\sigma_P,\quad i, j = 1, \ldots, n = \frac{S}{h^2}.$$

Введем также обозначения: (Ψ) - совокупность матричных уравнений, получающихся при дискретизации /1.6/ и /1.7/. (Θ) - любое уравнение из (Ψ). (Φ) - любое из двух матричных уравнений, соответствующих /1.6/.

В. Свойства L_h, K_h

При исследовании обусловленности L_h существенной является асимптотика минимального по модулю собственного значения при $h \to 0$. При этом, как показывают численные результаты, имеет место оценка /см. табл.1/

$$\forall i\ \lambda_i^h > 0 \qquad 0 < \min_{1 \le i \le J} \lambda_i^h = \lambda_J^h \sim \mathcal{O}(h),$$

где λ_i^h - собственные значения L_h.

Отметим также численный результат для $\lambda_{max}^h = \max_i \lambda_i^h$, являющегося важным параметром итерационных процессов /см. табл.2/:
$0 < \lambda_{max}^h < c,\ c = \mathcal{O}(1)$.

Таблица 1

Таблица I. (h =0,08)

Шаги разбиения	h	$h/2$	$h/3$	$h/4$
λ_{min}^h	5,656-I	2,529-I	I,806-I	I,333-I

Таблица 2. (h =0,08)

Шаги разбиения	h	$h/2$	$h/3$	$h/4$
λ_{max}^h	I,203	I,200	9,329-I	9,I37-I

Поведение $\lambda_{min}^h \sim \mathcal{O}(h)$ можно проинтерпретировать с учетом гипотезы §1: при разбиении поверхности куба на $n = \frac{S}{h^2}$ частей элементарными квадратами площадью h^2 создается n носителей, на которых реализуются первые n собственных функций оператора L. Какой номер (J) соответствует минимальному по модулю собственному значению? Используя утверждение гипотезы о кратности собственных значений $L - d_{\lambda_k} \sim k$, имеем:

$$\sum_{k=1}^{J} k \sim n, \qquad \frac{J(J+1)}{2} \sim n,\ J \sim n^{1/2}.$$

Учитывая определение n и заключение гипотезы о поведении собственного значения $L - \lambda_k \sim \frac{1}{k}$, имеем: $\lambda_{min} = \lambda_J \sim \frac{1}{J} \sim \frac{1}{n^{1/2}} = \frac{h}{S^{1/2}}$.

Получили результат, который дают численные исследования.

Для оператора K_h получены результаты: $\lambda_{max} = \max_i |\lambda_i| = 1$ и соответствует собственной функции $\phi_{\lambda_{max,h}}$, у которой $\phi_{i,\lambda_{max,h}} = \mathrm{const}$, $i = 0, \ldots, n-1$.

При реализации 6 кусочно-постоянных базисных функций в табл.3 приведен спектр матрицы K_h. Из таблицы видно, что кратность собственных значений $K_h - d_{\lambda_i}(K_h) = i$. Этот результат аналогичен утверждению гипотезы §1 о кратности собственных значений интегрального оператора K: $d_{\lambda_i(K)} \sim i$.

Обозначения в табл.3: $R = \mathrm{Re}\,\lambda_i(K_h)$, $I = I_m \lambda_i(K_h)$, Z - массив собственных функций построчно.

Таблица 3 (K_h)

R	I,000	-I,282-I	-3,008-I	-3,008-I	-I,282-I	-I,282-I
I	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Z=	6,789-I	6,789-I	6,789-I	6,789-I	6,789-I	6,789-I
	7,37I-I	-7,37I-I	2,274-I2	6,82I-I3	2,046-I2	2,274-I2
	6,66I-I	6,66I-I	-3,33I-I	-3,33I-I	-3,33I-I	-3,33I-I
	-3,53I-I	-3,53I-I	-3,234-I	-3,234-I	6,766-I	6,766-I
	I,008-I	-I,008-I	-6,440-2	6,440-2	-5,000-I	5,000-I
	7,4I3-I	-7,4I3-I	-4,678-I	4,678-I	2,500-I	-2,500-I

Естественно развить экономичные численные методы решения дискретных аналогов уравнений /1.6/, /1.7/, используя результаты этого пункта; учесть геометрию границы Γ; на основе спектрального поведения L_h построить экономичный прямой метод для задачи Дирихле. Перечисленным требованиям удовлетворяет метод A.

2. Метод решения матричного уравнения (Θ), основанный на свойствах симметрии поверхности куба

Рассматривается кусочно-постоянная интерполяция п.1. Производится нумерация узлов M_i дискретной схемы так, что: M_{2i-1} и M_{2i} симметричны относительно центра куба, где $i = 1,2...,N/2$. Причем N - четно, т.к. $N = 6 \cdot N_0$, где N_0 - количество узлов на одной грани куба. Аналогично$^{/7/}$, для изучения структуры матриц L и K используем обозначения: $A = \{A_{i_1 j_1}\}_{i_1 j_1 = 1}^{n_1}$ - матрица, состоящая из $n_1 x n_1$ клеток $A_{i_1 j_1}$. Множество клеток $A_{i_1 j_1}$ назовем первым уровнем. Далее пусть $A_{i_1 j_1} = \{A_{i_1 j_1; i_2 j_2}\}_{i_2 j_2 = 1}^{n}$ - клеточная матрица, состоящая из $n_2 x n_2$ клеток $A_{i_1 j_1; i_2 j_2}$. Множество клеток $A_{i_1 j_1; i_2 j_2}$ назовем вторым уровнем. Аналогично можно ввести последующие уровни: k-й уровень есть множество клеток $A_{i_1 j_1; \dots; i_k j_k} = \{A_{i_1 j_1; \dots; i_k j_k; i_{k+1} j_{k+1}}\}_{i_{k+1} j_{k+1} = 1}^{n_{k+1}}$.
Если $n_{p+1} = 1$, то говорят, что A имеет p уровней. Число n_k будем называть порядком k-го уровня. Обозначив n порядок A, имеем $n = n_1 \dots n_p (n_{p+1} = 1)$. Назовем k-й уровень уровнем T, D, C или G-типа, если клетки k-1-го уровня являются соответственно клеточно-теплицевыми, клеточно-диагональными, клеточно-циркулянтными или клеточными матрицами общего вида. Если A имеет p уровней, то ее структура полностью определяется последовательностью $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \dots, \alpha_{n_p}$, в которой вместо каждого символа α стоит один из символов T, D, C или G. Соответственно данной форме записи при упомянутой нумерации доказано /доказательно опускаем/, что структура L и K ± E имеет вид: $G_{N/2} C_2$, где N, как и ранее, - количество узлов. Согласно$^{/7/}$, существует матрица P, которая дает для матрицы $\hat{L}\{\hat{K} \pm E\} = PL\{K \pm E\}P^T$ структуру: $C_2 G_{N/2}$. Здесь { } - означают, что P и P^T применяются к L или K ± E. P при этом можно выписать непосредственно: $P = (p_{ij})_{i,j=1}^{N}$; $p_{\ell, 2\ell-1} = 1$, $p_{\ell+N/2, 2\ell} = 1$, $\ell = 1, N/2$. Остальные $p_{ij} = 0$.

Применяя к $\hat{L}\{\hat{K} \pm E\}$ преобразования с унитарной матрицей F: $\tilde{L}\{\tilde{K} \pm E\} = F\hat{L}\{\hat{K} \pm E\}F^*$ получаем$^{/7/}$ для $\tilde{L}\{\tilde{K} \pm E\}$ структуру $D_2 G_{N/2}$, где $F = F^*$ и $F = (f_{ij})$, $i = 1, N$; $j = 1, N$ имеет вид:

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
 & & & & & N/2 & N/2+1 & & & & & N \\
1 & & & & & & 1 & & & & & \\
 & 1 & & & & & & \cdot & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \cdot & & & \\
 & & & 1 & & & & & & \cdot & & \\
 & & & & \ddots & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & 1 & & & & & & 1 \\
\hline
1 & & & & & & -1 & & & & & \\
 & 1 & & & & & & -1 & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & 1 & & & & & & -1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ N/2 \\ N/2+1 \\ \\ \\ N \end{array}$$

После отмеченных преобразований исходные матрицы приобретают вид:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A}_1 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{A}_2 \end{array}\right); \quad \tilde{A}_1 = (\tilde{a}1_{ij}), \quad \tilde{A}_2 = (\tilde{a}2_{ij}),$$

$$i, j = 1, N/2$$

$$\tilde{a}1_{i,j} = a_{2i-1, 2j-1} + a_{2i-1, 2j}$$

$$\tilde{a}2_{i,j} = a_{2i-1, 2j-1} - a_{2i-1, 2j} .$$

$\tilde{A}$ - преобразованная A /L или K ± E/.

Понятно, что решение ГИУ в дискретной постановке с операторами вида $\tilde{A}$ дает экономию памяти в 2 раза / F и P хранить не надо/.

Выполненные преобразования - перенумерация /циркулянтный вид/, преобразование подобия /диагональный/ - сохраняют спектральные свойства матричных операторов. Выскажем утверждение, которое суммирует свойства преобразованных операторов вида $\tilde{A}$. Данное утверждение сразу позволяет осуществлять решение задачи Дирихле путем обращения $\tilde{L}_1$, $\tilde{L}_2$, а задачи Неймана - методом последовательных приближений для каждого из расщепленных уравнений с $\tilde{K}_1$ и $\tilde{K}_2$/с $\tilde{K}_1$ на пространстве, ортогональном

$$u = \{u_i\}_{i=1}^{N/2}, \quad u_i = 1 \quad \forall i/.$$

При этом происходит экономия в количестве выполняемых операций:

1/ задача Дирихле - в 4 раза по сравнению с исходным прямым методом обращения L;

2/ задача Неймана - в 2 раза /в расчете на одну итерацию/ по сравнению с исходным методом.

Утверждение 4

1/ $\tilde{L}_1 > 0$ на $R^{N/2}$, 2/ $\tilde{L}_2 > 0$ на $R^{N/2}$,

3/ $\|\tilde{L}_1\|_{R^{N/2}} = \|L\|_{R^N}$, 4/ $\|\tilde{L}_2\|_{R^{N/2}} < \|L\|_{R^N}$.

5/ $\|\tilde{K}_1\|_{R^{N/2}} = \|K\|_{R^N} = 1$, 6/ $\|\tilde{K}_2\|_{R^{N/2}} < \|K\|_{R^N} = 1$,

7/ $\lambda_{\tilde{K}} = 1$ - максимальное по модулю однократное собственное значение $\tilde{K}$ с собственной функцией

$$w = \{w_i\}_{i=1}^{N}: \; w_i = 1, \; w_{i+N/2} = 0, \; i = 1, N/2,$$

8/ $\lambda_{\tilde{K}_1} = 1$ - максимальное по модулю однократное собственное значение $\tilde{K}_1$ с собственной функцией $\gamma = \{\gamma_i\}: \gamma_i = 1, \; i = 1, N/2$.

Здесь R^k - векторное пространство с нормой:

$$\|x\| = \max_{1 \le i \le k} |x_i|, \quad x = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k.$$

$$\|A\|_{R^k} = \max_i \sum_{j=1}^{k} |a_{ij}|.$$

Данные свойства - следствия результатов, отмеченных в В. п. 1 §2. Докажем, например, 3/ /аналогично доказываются 4/, 5/, 6//.

Для матрицы $L = (\ell_{ij})_{i,j=1,N}$: $\ell_{ij} = \int\limits_{\Delta S_j} \frac{1}{r_{M_i P}} d\sigma_P > 0$

/для $K = (k_{ij})_{i,j=1,N}$, т.к. Ω_i - выпуклая:

$$k_{ij} = \int\limits_{\Delta S_j} \frac{\cos(\vec{r}_{PM_i}, \vec{n}_P)}{r^2_{M_i P}} d\sigma_P > 0,$$

где M_i и M_j не принадлежат одной грани, $k_{ij} = 0$, M_i и M_j принадлежат одной грани/.

$$\|\tilde{L}_1\|_{R^{N/2}} = \max_{1 \le i \le N/2} \sum_{j=1}^{N/2} |\tilde{\ell}1_{i,j}| =$$

$$= \max_{1 \le i \le N/2} \sum_{j=1}^{N/2} (\ell_{2i-1,2j-1} + \ell_{2i-1,2j}) =$$

$$= \max_{1 \le i \le N/2} \sum_{m=1}^{N} \ell_{2i-1,m} = \max_{1 \le i \le N/2} \sum_{m=1}^{N} |\ell_{2i-1,m}| = I1.$$

Так как M_{2i-1} и M_{2i} симметричны относительно центра куба, то:

$\sum\limits_{m=1}^{N} \ell_{2i-1,m} = \sum\limits_{m=1}^{N} \ell_{2i,m}$, $\forall\, i: 1 \leqslant i \leqslant N/2$. Следовательно:

$$I1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant N/2} \sum_{m=1}^{N} |\ell_{2i-1,m}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant N/2} \sum_{m=1}^{N} \ell_{2i-1,m} =$$

$$= \max_{1 \leqslant i \leqslant N/2} \sum_{m=1}^{N} |\ell_{2i,m}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant N/2} \sum_{m=1}^{N} \ell_{2i,m}.$$

Тогда:

$$\|L\|_{R^N} = \max_{1 \le p \le N} \sum_{m=1}^{N} |\ell_{pm}| = \max_{1 \le p \le N} \sum_{m=1}^{N} \ell_{pm} =$$

$$= \max\{\max_{1 \le i \le N/2} \sum_{m=1}^{N} \ell_{2i-1,m}, \max_{1 \le i \le N/2} \sum_{m=1}^{N} \ell_{2i,m}\} =$$

$$= \max\{I1, I1\} = I1.$$

Пункт 3/ доказан.

В табл.4 приведены результаты по решению задач Дирихле и Неймана методом А для куба, расстояние от центра которого до грани обозначено R. Метод А целесообразно применять для сеток с небольшим числом узлов в случае многократного решения матричного уравнения вида (Ф). Для сеток с большим числом узлов необходимы численные алгоритмы, основанные на значительной экономии массивов. Построение такого типа алгоритма приведено во 2-й части работы.

Таблица 4

Задача Дирихле (h =0,8) R = 0,4

Тестовая гармоническая функция	Абсолютная ошибка δv_h			
u = x	h	h/2	h/3	h/4
	0,363	0,I68	0,III	0,089

Задача Неймана (h =0,08) R = 0,04

Тестовая гармоническая функция	Абсолютная ошибка δu_h			
u = x+y+z	h	h/2	h/3	h/4
	$\text{I,075}\cdot\text{IO}^{-2}$	$\text{0,483}\cdot\text{IO}^{-2}$	$\text{0,28I}\cdot\text{IO}^{-2}$	$\text{0,22I}\cdot\text{IO}^{-2}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. "Мир", М., 1979.
2. Забрейко П.П., Кошелев А.И. и др. Интегральные уравнения. "Наука", М., 1968.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. "Наука", М., 1977.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. "Наука", М., 1981.
5. Арсенин В.Я., Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач. "Наука", М., 1980.
6. Воронин В.В., Цецохо В.А. Численное решение интегрального уравнения 1 рода с логарифмической особенностью методом интерполяции и коллокации. ЖВМ и МФ, 1981, 21, №1.
7. Тартышников Е.Е. Некоторые алгоритмы, связанные с матрицами типа теплицевых. В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып.35. Изд-во МГУ, М., 1981, с. 158-180.
8. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р11-83-261, Дубна, 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 августа 1984 года.

Егоров А.В., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Р11-84-595
Численное решение граничных интегральных уравнений для оператора Лапласа на поверхности куба. Часть 1.

Рассматриваются численные алгоритмы решения граничных интегральных уравнений, соответствующих задачам Дирихле и Неймана для оператора Лапласа в случае трех пространственных переменных. Дискретизация интегральных уравнений проведена на поверхности куба на основе кусочно-постоянной интерполяции и коллокации. Исследованы спектральные свойства возникающих матричных операторов. С использованием симметрии куба построен экономичный метод решения задач Дирихле и Неймана. Приведены результаты численных исследований.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Н.С.Панковой

Egorov A.V., Zhidkov E.P., Khoromskij B.N. P4-84-595
Numerical Solution of Boundary Integral Equations for Laplace Operator on the Cube's Surface. Part 1.

Numerical algorithms of solution of boundary integral equation for Dirichlet and Newmann problems with Laplace operator for the case of free space variables are considered. The discretization of integral equations is made on the cube's surface on the basis of sectionally constant interpolation and collocation. Spectrum features of occuring matric operators are researched. Economic method for solution of Dirichlet and Newmann problems is built using cube's symmetry. The results of numerical researchers are given.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984