сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-84-361

Р.С.Егикян*, Е.П.Жидков

К ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНОГО АНАЛОГА МЕТОДА НЬЮТОНА

* Ереванский физический институт

1984

Рассмотрим уравнение в банаховом пространстве

$$P(X) = 0 \quad , \tag{I}$$

где $P(X)$ – нелинейный оператор в банаховом пространстве H, действительном или комплексном. Одним из основных методов приближенного решения (I) является метод Ньютона и его непрерывный аналог. Будем предполагать, что оператор $P(X)$ удовлетворяет некоторым условиям гладкости, определяемым ниже.

Обозначим $P'(X)$ производную Фреше оператора $P(X)$ и оператор, обратный производной $\Gamma(X) = [P'(X)]^{-1}$. Дискретный метод Ньютона состоит в последовательном вычислении итераций

$$X_{n+1} = X_n - \Gamma(X_n)P(X_n), \tag{2}$$

начиная с некоторого начального приближения X_0.

Итерации (2) можно рассматривать как реализацию метода ломаных Эйлера с постоянным шагом, равным единице для дифференциального уравнения в банаховом пространстве

$$\frac{dX}{dt} = -\Gamma(X)P(X) \tag{3}$$

с начальным условием $X(0) = X_0$. Множество начальных условий, для которых решение (3) $X(t)$ имеет предел X^* при $t \to \infty$ и $P(X^*) = 0$, является областью сходимости процесса (3) к решению X^*. Эта область шире, чем соответствующая область сходимости дискретного процесса (2).

Сходимость процесса (3) изучалась Гавуриным /I/. В этой работе было показано, что если имеют место неравенства $\|P(X_0)\| \leq \eta$ и $\|\Gamma(X)\| \leq B$ в сфере с центром X_0 и радиусом $B\eta$, то в этой сфере существует корень (I), к которому сходится решение (3). Там же указан первый интеграл уравнения (3):

$$P(X(t)) = P(X_0)e^{-t}. \tag{4}$$

Непрерывный аналог (3) нашел широкое применение при решении конкретных задач в тех случаях, когда аналитическое решение получить не удается и алгоритм численного решения в некотором смысле эквивалентен нахождению точного решения. Процессы ньютоновского типа, приводящие к итерационным последовательностям, хорошо зарекомендовали себя при решении ряда задач теоретической физики /2/.

Если удается оценить $\|\Gamma(X_o)\|$ более точно, то оценку для радиуса сферы, в которой локализуется решение (I), можно уточнить. Для дискретного случая это было сделано в работе /3/, где накладывались ограничения, вызванные дискретностью метода. В непрерывном случае ситуация упрощается.

Целью настоящего сообщения является получение соответствующего результата. Имеет место следующая

Теорема. Пусть в сфере с центром X_o и радиусом r выполнены условия:

$$\|\Gamma(X_o)\| \leq B_o$$

$$\|\Gamma(X)\| \leq B$$

$$\|P(X_o)\| \leq \eta$$

$$\|P''(X)\| \leq K \cdot$$

Тогда, если

$$r \geqslant \frac{e^{-\frac{1}{B_oK}}\eta}{K} \int\limits_{\frac{1}{BK}}^{\frac{1}{B_oK}} \frac{e^t}{t}\, dt + B\eta e^{-\frac{B-B_o}{B_oBK}}, \tag{5}$$

в сфере существует корень X^* уравнения (I), к которому сходится решение (3).

Доказательство. Введем функцию

$$\gamma(t) = \sup_{\|X_o-X\|\leq t} \|\Gamma(X)\|$$

и оценим ее.

Производная $\Gamma(X)$ равна

$$\Gamma'(X) = -\Gamma(X)P''(X)\,\Gamma(X).$$

По теореме о среднем для любой пары точек X_1, X_2 имеем

$$\|\Gamma(X_2)\| \leq \|\Gamma(X_1)\| + \sup_{0\leq\xi\leq 1} \|\Gamma'(X_1+\xi(X_2-X_1))\| \cdot \|X_2-X_1\|.$$

Отсюда для функции γ получаем

$$\gamma(t_2) \leq \gamma(t_1) + K\gamma^2(t_2)(t_2-t_1). \tag{6}$$

Рассмотрим функцию $Z(t)$, являющуюся решением дифференциального уравнения

$$Z'(t) = KZ^2(t) \tag{7}$$

с начальным условием $Z(0)=B_o$.

Уравнение (7) легко интегрируется

$$Z(t) = \frac{B_o}{1-B_oKt}.$$

Сравнивая (6) и (7), получим неравенство

$$\gamma(t) \leq Z(t).$$

Определив t_1 из условия

$$Z(t) = B,$$

получим

$$t_1 = \frac{B-B_o}{B_oBK}.$$

Значит, имеет место оценка

$$\gamma(t) \leq \begin{cases} \dfrac{B_o}{1-B_oKt} & \text{при} \quad t \leq t_1 \\ B & \text{при} \quad t > t_1. \end{cases} \tag{8}$$

Из определения функции γ, первого интеграла (4) и условий теоремы следует

$$\|X'(t)\| \leq \gamma(t)\eta e^{-t}. \tag{9}$$

Подставляя (8) в (9) и используя неравенство

$$\|X(t) - X_o\| \leq \int\limits_0^\infty \|X'(t)\|\, dt, \tag{I0}$$

после упрощения интеграла в правой части, получаем

$$\|X(t)-X_o\| \leq B_o\eta \int\limits_0^{\frac{B-B_o}{B_oBK}} \frac{dt}{e^t(1-B_oKt)} + B\eta e^{-\frac{B-B_o}{B_oBK}}.$$

Сделав замену переменной в интеграле, получим справа искомое выражение (5), из чего следует, что решение $x(t)$ не выйдет за пределы сферы. Существование решения (I) и сходимость к нему $x(t)$ следуют из неравенства

$$\| x(t_1)-x(t_2)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \| x'(t)\| \, dt \quad ,$$

сходимости интеграла в (I0) и полноты пространства H. Теорема доказана.

Заметим, что при $B_0=B$ теорема превращается в упомянутый результат Гавурина/I/.

Сравнение полученного выражения для радиуса сферы с оценкой Гавурина для отдельных значений B_0 и B при $K=\eta=1$ приведено в таблице, где I означает оценку (5), а II оценку Гавурина $B\eta$.

Таблица

B_0	B	I	II
0.2	I	0.28	I
0.4	I	0.65	I
0.6	I	0.87	I
0.8	I	0.97	I
I	2	I.74	2
I.3	2	I.90	2
I.5	2	I.96	2

ЛИТЕРАТУРА

1. Гавурин М.К. Изв. вузов, математика, № 5, I958.
2. Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В. "ЭЧАЯ", I973, т.4, вып.I, с.I27.
3. Мысовских И.П. ДАН СССР 70, 4,(I950).

Рукопись поступила в издательский отдел
24 мая I984 года.

Егикян Р.С., Жидков Е.П. P11-84-361

К теории непрерывного аналога метода Ньютона

Работа посвящена изучению непрерывного аналога метода Ньютона. Доказывается теорема о существовании решения абстрактного нелинейного уравнения в банаховом пространстве и сходимость к нему траектории метода. Дается оценка уклонения решения от начального приближения в зависимости от начальных условий. Приводится сравнение с известными результатами.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Yegikian R.S., Zhidkov E.P. P11-84-361

To the Theory of Continuos Analog of Newton's Method

The continuos analog of Newton's method is studied. The theorem about the existence of a solution of abstract nonlinear equation in the Banach space and the convergence to the solution of the method trajectory is proved. The estimate for derivation of the solution from zero estimate as a function of initial data is given. Comparison with the available results is made.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984