объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р11-84-346

А.Ю.Жарков, С.И.Свинолупов, А.Б.Швачка

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ЭВМ

Направлено на семинар в Университет
им. К.Маркса, Лейпциг, июнь 1984 г.

1984

1. В [1] был рассмотрен класс формально интегрируемых уравнений вида

$$u_t = F(u, u_1, \dots, u_n), \quad u = u(t, x), \quad u_i \stackrel{def}{=} \frac{d^i u}{dx^i}, \quad n \geq 2 \qquad /1/$$

/функция F здесь и в дальнейшем предполагается локально аналитической/. По-видимому, все уравнения вида /1/, к которым можно применять технику обратной задачи рассеяния или интегрировать при помощи преобразования Фурье, принадлежат этому классу. Напомним основные понятия из теории формально интегрируемых уравнений, систематическое изложение которой можно найти в [2].

Уравнение вида /1/ будем называть <u>формально интегрируемым,</u> если для него разрешимо операторное соотношение

$$L_t - [F_*, L] = 0; \; F_* \stackrel{def}{=} \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_i} D^i; \; D \stackrel{def}{=} \frac{d}{dx}, \; L_t \stackrel{def}{=} \left[\frac{d}{dt}, L\right]. \qquad /2/$$

Под разрешимостью операторного соотношения /2/ мы понимаем существование формального ряда

$$L^r \stackrel{def}{=} \sum_{i=-\infty}^{r} a_i D^i; \quad a_i = a_i(u, u_1, \dots, u_{k_i}), \qquad /3/$$

удовлетворяющего на решениях /1/ соотношению /2/. Так, для уравнения Кортевега-де Вриза

$$u_t = u_3 + 3uu_1, \qquad /4/$$

на примере которого будем иллюстрировать вводимые понятия, соотношению /2/ удовлетворяет ряд $L^2 = D^2 + 2u + u_1 D^{-1}$. Действительно, левая часть /2/ в этом случае имеет вид

$$2(u_t - u_3 - 3uu_1) + \frac{d}{dx}(u_t - u_3 - 3uu_1)$$

и поэтому обращается в нуль на решениях уравнения /4/.

Легко видеть, что при последовательном определении коэффициентов L из соотношения /2/ приходится интегрировать /т.е. обращать оператор D/. Поэтому далеко не всякое уравнение вида /1/ формально интегрируемо. Так, если мы попытаемся искать ряд L^1 для уравнения

$$u_t = \frac{u_2^3}{2}, \qquad /5/$$

то из соотношения /2/ получим, что $L^1 = u_2 D + a_0 + \sum_{i=-\infty}^{-1} a_i D^i$,

где коэффициент a_0 должен удовлетворять уравнению $D(a_0) = u_3^2 / u_2$.

Отсюда видно, что a_0 не может локально зависеть от конечного числа переменных u_i /т.е. его нельзя записать в виде $a_0 = a_0(u, u_1, \dots, u_{k_0})$/. Обречена на неудачу и попытка найти для уравнения /5/ ряд L^r вида /3/ любого другого порядка r, так как если такой ряд удовлетворяет соотношению /2/, то ряд $(L^r)^{n/r}$, где $n = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots$, также удовлетворяет этому соотношению, причем его коэффициентами являются дифференциальные полиномы от коэффициентов ряда L^r.

При определении коэффициентов ряда L из соотношения /2/ возникают константы интегрирования. При этом мы можем их считать произвольными постоянными или полагать равными нулю, что не влияет на разрешимость соотношения /2/.

Требование разрешимости соотношения /2/ накладывает жесткие условия на правую часть уравнения /1/. Первые $(n-1)$ коэффициентов ряда L определяются для любой правой части $F(u, u_1, \dots u_n)$. Но для локальной зависимости от конечного числа переменных u_i n-го коэффициента необходимо, чтобы

$$\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{\partial F}{\partial u_n}\right)^{-1/n}\right) \in \operatorname{Im} D. \qquad /6/$$

При определении каждого последующего коэффициента на правую часть уравнения /1/ накладывается новое условие. Условие /6/ и последующие условия формальной интегрируемости можно записать в терминах ряда L:

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{res} L^{-1}) \in \operatorname{Im} D; \quad \operatorname{res}\left(L^{-1} \frac{d}{dt}(L)\right) \in \operatorname{Im} D; \quad \frac{d}{dt}(\operatorname{res} L^i) \in \operatorname{Im} D; \quad i = 1, 2, \dots, \qquad /7/$$

где $\operatorname{res}(\Sigma b_i D^i) \stackrel{\text{def}}{=} b_{-1}$.

Условия /7/ означают, что для формально-интегрируемого уравнения /1/ $\operatorname{res} L^i$ являются плотностями законов сохранения.

Под законом сохранения уравнения /1/ мы понимаем соотношение

$$\frac{d}{dt}(p(u, u_1, \dots, u_k)) = D(q(u, u_1, \dots, u_{k+n-1})), \qquad /8/$$

которое выполняется на решениях уравнения /1/. Закон сохранения /8/ называется тривиальным, если его плотность $p \in \operatorname{Im} D$ или, что то же самое,

$$\frac{\delta p}{\delta u} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i D^i \left(\frac{\partial p}{\partial u_i}\right) = 0. \qquad /9/$$

Законы сохранения, плотностями которых являются $\operatorname{res} L^i$, могут, вообще говоря, оказаться и тривиальными. В [3] доказано, что уравнение /1/, обладающее бесконечной серией законов сохранения /здесь и далее подразумевается, что они нетривиальны/, формально интегрируемо, а необходимым условием наличия такой серии является существование ряда L^1, у которого $\operatorname{res} L^{2i} \in \operatorname{Im} D$, $i = 1, 2, \dots$. С другой стороны, $\operatorname{res} L^{2i+1}$, $i = 0, 1, 2, \dots$ для всех известных формально интегрируемых уравнений, обладающих бесконечной серией законов сохранения и представляющих интерес с точки зрения применения техники обратной задачи рассеяния [4], содержат полный набор плотностей законов сохранения из этой серии.

Формальная интегрируемость тесно связана с тем, что уравнение обладает не только бесконечной серией законов сохранения, но и нетривиальной алгеброй Ли-Беклунда. Напомним, что алгеброй Ли-Беклунда $A(F)$ для уравнения /1/ называется множество функций $H(u, \dots, u_m)$ таких, что

$$H_*(F) - F_*(H) = 0. \qquad /10/$$

Функции u_1 и F всегда принадлежат $A(F)$; если же $A(F)$ ими не исчерпывается, то говорят, что уравнение обладает нетривиальной алгеброй Ли-Беклунда. Примером таких уравнений может служить уравнение /4/, обладающее бесконечной алгеброй, элементами которой являются правые части высших аналогов уравнения Кортевега-де Вриза:

$$u_t = (D^2 + 2u + u_1 D^{-1})^m (u_3 + 3uu_1), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

В [1] доказано, что всякое уравнение вида /1/, обладающее бесконечной алгеброй Ли-Беклунда, является формально интегрируемым. Заметим, что оно может иметь бесконечную алгебру Ли-Беклунда, но не иметь бесконечной серии законов сохранения. Таким уравнением является, например, уравнение Бюргерса $u_t = u_2 + uu_1$ и его высшие аналоги.

2. После того как мы ввели необходимые нам определения и кратко сформулировали некоторые результаты теории формально интегрируемых уравнений, перейдем к вопросам, непосредственно связанным с использованием систем аналитических вычислений на ЭВМ для исследования формальной интегрируемости эволюционных уравнений.

Как уже отмечалось, требование разрешимости соотношения /2/ накладывает жесткие условия на вид правой части уравнения /1/. Выражая из /2/ первые коэффициенты ряда L в терминах функции F и исследуя переопределенную систему уравнений в частных производных, эквивалентную нескольким первым условиям /7/, можно найти вид правой части уравнения /1/. Таким способом в [5] получен полный список формально интегрируемых уравнений вида $u_t = u_3 + f(u, u_1, u_2)$.

Полных списков формально интегрируемых уравнений более высокого порядка еще не получено. Однако и до получения таких списков для каждого конкретного уравнения /например, имеющего физические приложения/ хотелось бы иметь возможность быстро получить ответ на вопрос - выполнено ли для этого уравнения хотя бы несколько первых условий формальной интегрируемости, обладает ли оно нетривиальной алгеброй Ли-Беклунда и законами сохранения достаточно высокого порядка. Ответ на все эти вопросы можно получить при помощи ЭВМ.

Действительно, все действия, которые нужно проделать для проверки условий формальной интегрируемости, выписывания элемента алгебры Ли-Беклунда или плотности закона сохранения могут быть полностью алгоритмизированы.

Так, например, коэффициенты ряда $L^m = \sum_{i=-\infty}^{m} a_i D^i$ /в том числе и $\operatorname{res}(L^m) = a_{-1}$ / находятся из соотношения /2/ при помощи следующих рекуррентных формул:

$$a_m = \left(\frac{\partial F}{\partial u_n}\right)^{m/n},$$

$$a_i = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial F}{\partial u_n}\right)^{i/n} D^{-1}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial u_n}\right)^{(-i-n)/n} \cdot \left((a_{n+i-1})_t - b_{n+i-1}\Big|_{a_i=0}\right)\right\}, \qquad /11/$$

где b_{n+i-1} - коэффициент при D^{n+i-1} в коммутаторе

$$[F_*, L^m] = \sum_{j=-\infty}^{n+m-1} b_j D^j. \qquad /12/$$

Нетрудно проверить, что b_{n+i-1} не содержит членов, зависящих от a_j с номерами $j < i$, поэтому формулы /11/ позволяют последовательно определять коэффициенты ряда L^m /заметим, что в правой части второй из формул /11/ предполагается, что $a_{n+i-1} = 0$ при $i > m - n + 1$/.

Коммутатор /12/ тоже легко вычисляется, если воспользоваться формулой

$$D^k \cdot A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, k(k-1)\ldots(k-i+1) \frac{d^i}{dx^i}(A) \cdot D^i,$$

верной для любой функции A, локально зависящей от конечного числа переменных u_i.

Проверка условий формальной интегрируемости $\frac{d}{dt}(\operatorname{res} L^m) \in \operatorname{Im} D$ сводится таким образом к проверке того, равняется ли нулю выражение $\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{d}{dt}(a_{-1})\right)$.

Алгоритм нахождения элемента алгебры Ли-Беклунда основывается на следующем факте. Если уравнение /1/ имеет элемент $H(u, u_1, \ldots, u_m)$ алгебры $A(F)$, то для него справедливо соотношение:

$$H_* = (L^m)_+ + \left(\frac{\partial H}{\partial u_1} - a_1\right) D + \left(\frac{\partial H}{\partial u} - a_0\right), \qquad /13/$$

где $(L^m)_+$ - главная часть ряда L^m, т.е. $(L^m)_+ = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i$. Соотношение /13/ представляет собой систему обыкновенных уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = A_i, \quad i = 2, 3, \ldots, m, \qquad /14/$$

где A_i - коэффициенты при D^i в правой части /13/.

Условия совместимости системы /14/ записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial u_j} A_i - \frac{\partial}{\partial u_i} A_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 2, 3, \ldots, m. \qquad /15/$$

Если условия /15/ выполнены, то, интегрируя уравнения /14/, можно определить $H(u, u_1, \ldots, u_m)$ с точностью до произвольной функции $h(u, u_1)$. Подставляя найденное значение H в соотношение /10/, получаем уравнения для нахождения функции $h(u, u_1)$ и решаем их.

Все предложенные алгоритмы для вычисления коэффициентов ряда L^m, проверки условий формальной интегрируемости, получения плотностей законов сохранения, стоящих в $\operatorname{res} L^i$, и элементов алгебры Ли-Беклунда реализованы нами в виде пакета программ на языке системы REDUCE-2 [16].

Используя этот пакет программ, удалось получить некоторые новые результаты. Так, например, при классификации уравнений вида $u_t = u_5 + f(u, u_1, u_2, u_3)$ одним из авторов данной работы /С.С./ совместно с В.В.Соколовым [5] было получено уравнение

$$\begin{aligned} u_t = u_5 &+ 5(u_2 - u_1^2 + \alpha e^{2u} + \beta e^{-4u}) u_3 - 5u_1 u_2^2 + \\ &+ 15(\alpha e^{2u} - 4\beta e^{-4u}) u_1 u_2 + u_1^5 + 90\beta e^{-4u} u_1^3 + \\ &+ 5(\alpha e^{2u} + \beta e^{-4u})^2 u_1, \qquad \alpha, \beta \in C. \end{aligned} \qquad /16/$$

Есть основание предполагать, что это уравнение обладает бесконечной серией законов сохранения и нетривиальной алгеброй Ли-Беклунда. При помощи созданного пакета программ нам удалось выписать несколько новых законов сохранения и найти элемент алгебры Ли-Беклунда, который имеет вид:

$$
\begin{aligned}
H = {} & u_7 + 7(u_2 - u_1^2)u_5 + 14(u_3 - 2u_1 u_2)u_4 - 21 u_1 u_3^2 - \\
& - 14(2u_2^2 + u_1^2 u_2 - u_1^4)u_3 - \frac{28}{3} u_1 u_2^3 + 28 u_1^3 u_2^{1} - \frac{4}{3} u_1^7 + \\
& + 7(\alpha e^{2u} + \beta e^{-4u})u_5 + 7(5\alpha e^{2u} - 16\beta e^{-4u})u_1 u_4 + \\
& + 14(5\alpha e^{2u} - 13\beta e^{-4u})u_2 u_3 + 28(2\alpha e^{2u} + 29\beta e^{-4u})u_1^2 u_3 + \\
& + \frac{14}{25}(5\alpha e^{2u} + 5\beta e^{-4u})^2 u_3 + 112(\alpha e^{2u} + 10\beta e^{-4u})u_1 u_2^2 + \\
& + 42(\alpha e^{2u} - 76\beta e^{-4u})u_1^3 u_2 + 14(7\alpha^2 e^{4u} - 13\alpha\beta e^{-2u} - 20\beta^2 e^{-8u})u_1 u_2 + \\
& + 1260\beta e^{-4u} \cdot u_1^5 + 70(\alpha^2 e^{4u} + 2\alpha\beta e^{-2u} + 10\beta^2 e^{-8u})u_1^3 + \\
& + \frac{28}{3}(\alpha e^{2u} + \beta e^{-4u})^3 u_1 .
\end{aligned}
\qquad /17/
$$

Авторы выражают признательность профессору А.Б.Шабату за стимулирующие дискуссии и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. Функциональный анализ и его приложения. 1980, т. 14, вып. 4, с. 79-80.
2. Соколов В.В., Шабат А.Б. Препринт Башкирского филиала АН СССР, Уфа, 1982.
3. Свинолупов С.И., Соколов В.В. Функциональный анализ и его приложения. 1982, т. 16, вып. 4, с. 86-87.
4. Теория солитонов. Под ред. С.П.Новикова. "Наука", М., 1980.
5. Свинолупов С.И., Соколов В.В. В сб. "Интегрируемые системы". Изд. Башкирского филиала АН СССР, Уфа, 1982, с. 53-67.
6. Жарков А.Ю., Швачка А.Б. ОИЯИ, Р11-83-914, Дубна, 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 мая 1984 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Жарков А.Ю., Свинолупов С.И., Швачка А.Б. Р11-84-346
Исследование интегрируемости нелинейных эволюционных уравнений с использованием систем аналитических вычислений на ЭВМ

Обсуждаются вопросы использования систем аналитических вычислений при исследовании интегрируемости нелинейных эволюционных уравнений. Развиты удобные для реализации на ЭВМ алгоритмы проверки необходимых условий формальной интегрируемости, вычисления элементов алгебры Ли-Беклунда и плотностей законов сохранения. С помощью программы, написанной на языке REDUCE-2, удалось установить, что новое уравнение /16/ обладает нетривиальной алгеброй Ли-Беклунда.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Zharkov A.Yu., Svinolupov S.I., Shvachka A.B. P4-84-346
The Investigation of the Integrability of Nonlinear Evolution Equations Using Computer Algebra Systems

The usage of computer algebra systems for investigation of the integrability of nonlinear evolution equations is discussed. The algorithm for studying the formal integrability of nonlinear equations, to calculate the Lie-Bäcklund algebra elements and the conservation law density is developed. Using the computer algebra system REDUCE-2 code it is found that equation (16) has the nontrivial Lie-Bäcklund algebra.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Technique and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984