сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна



P11-83-867

Е.П.Жидков, Ю.Ю.Лобанов, О.В.Сидорова

# СОСТАВНАЯ ПРИБЛИЖЕННАЯ ФОРМУЛА ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ КОНТИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПО ГАУССОВОЙ МЕРЕ

1983

## Введение

Метод континуального интегрирования широко используется в настоящее время во многих областях физики и математики [I,2]. Впервые интегрирование в функциональных пространствах было применено в квантовой физике Р.Фейнманом [3] в 1948 г. Развитие идей Фейнмана содержится в работах Каца [4]. Построение квантовой механики на основе аппарата континуального интегрирования изложено в работе [5].

Последовательное изучение континуальных интегралов с математической точки зрения было начато в работах Н.Винера [6]. Им была введена в пространстве непрерывных функций специальная мера, называемая сейчас мерой Винера (см. [I]). Эта мера является частным случаем гауссовых мер в функциональных пространствах.

Первые работы по приближенному вычислению интегралов по гауссовой мере связаны с именем Р.Х.Камерона. Им была построена [7] приближенная формула для вычисления континуального интеграла по мере Винера, точная для функциональных многочленов 3-й степени. В [8,9] для вычисления континуальных интегралов был использован метод Монте-Карло. Потребности современной науки, в частности квантовой теории поля, делают проблему нахождения континуальных интегралов особенно актуальной. Вопросы теории и существующие методы приближенного вычисления континуальных интегралов изложены в книгах Л.А.Яновича [I0], Ю.Л.Далецкого и С.В.Фомина [II]. Там же содержатся ссылки на другие работы в этой области.

Л.А.Яновичем [I0] была построена и исследована составная приближенная формула (необходимые определения см. ниже) третьего порядка точности. В настоящей работе получена составная приближенная формула для континуальных интегралов произвольного заданного порядка точности, доказана сходимость получаемых по ней значений, получена оценка остатка и скорости сходимости для некоторых функционалов. Использование формулы продемонстрировано на численных примерах.

## § I. Основные определения

Следуя /I0/, дадим ряд определений. Пусть задано некоторое пространство $X$ с выделенной на нем $\sigma$-алгеброй $G$ подмножеств этого пространства вместе с мерой $\mu$, заданной на $G$.

I. Функционал $F[x]$, определенный на $X$ и принимающий действительные значения, называется измеримым на $X$, если для всякого борелевского множества $B$ в действительной прямой соответствующее множество $\{x \in X:\ F[x] \in B\}$ принадлежит $\sigma$-алгебре $G$.

2. Простым функционалом называется измеримый функционал, принимающий не более чем счетное число различных значений. Такой функционал представим в виде

$$F[x] = \sum_j a_j \varkappa_{A_j}[x] \quad ,$$

где $a_j$ – различные числа; $A_j$ – непересекающиеся множества из $G$, а $\varkappa_{A_j}[x]$ – характеристическая функция множества $A_j$:

$$\varkappa_{A_j} = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in A_j, \\ 0 & \text{при } x \notin A_j. \end{cases}$$

3. Интеграл от простого функционала $F[x]$ по пространству $X$, обозначаемый $\int\limits_X F[x]d\mu$, определяется равенством

$$\int\limits_X F[x]d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \mu(A_k) \quad ,$$

где $A_k = \{x \in X:\ F[x]=a_k\} \in G$, если ряд справа сходится абсолютно. Простой функционал $F[x]$ в этом случае называют интегрируемым по мере $\mu$ на $X$.

Пусть $F[x]$ – произвольный измеримый на $X$ функционал. Обозначим $F^+[x] = \max\{F[x]\ ,\ 0\}$; $F^-[x] = -\min\{F[x]\ ,\ 0\}$. Очевидно, что $F[x] = F^+[x] - F^-[x]$, при этом $F^+[x]$ и $F^-[x]$ – неотрицательные и измеримые на $X$ функционалы.

4. Интегралом от измеримого неотрицательного функционала $F[x]$ по пространству $X$ называется величина

$$\int\limits_X F[x]d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X F_n[x]d\mu \quad ,$$

где $\{F_n[x]\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная монотонно неубывающая последовательность неотрицательных простых функционалов, сходящаяся к $F[x]$.

5. Пусть $F[x]$ – произвольный измеримый функционал. Если один из интегралов

$$\int\limits_X F^+[x]d\mu \quad , \quad \int\limits_X F^-[x]d\mu \tag{I}$$

конечен, то интеграл от функционала $F[x]$ определяется равенством

$$\int\limits_X F[x]d\mu = \int\limits_X F^+[x]d\mu - \int\limits_X F^-[x]d\mu \ . \tag{2}$$

Если оба интеграла (I) конечны, то интеграл (2) также конечен и функционал $F[x]$ называется интегрируемым на пространстве $X$.



Мы будем рассматривать пространства $X$, являющиеся сепарабельными пространствами Фреше. Гауссова мера $\mu$ на $X$ задается корреляционным функционалом $K(\varphi,\psi)$ и "средним значением" $m(\varphi)$, $\varphi, \psi \in X'$ (см. /I0/). Как показано в /I0/, произвольная гауссова мера $\mu$ на $X$ задает гильбертово пространство $\tilde{H}$, плотное почти всюду в $X$. В дальнейшем это пространство будет часто использоваться нами при построении приближенных формул.

Пространство $C[a,b]$ с $\|x\|_C = \max\limits_{a\le t\le b}|x(t)|$ является сепарабельным пространством Фреше. В этом случае гауссова мера $\mu(x)$ задается функцией $m(t)$ и симметричной неотрицательно определенной непрерывной по обоим аргументам функцией $B(t,s)$, которая называется корреляционной функцией меры $\mu$ ($t,s \in [a,b]$). Функции $m(t)$ и $B(t,s)$ в данном случае определяют функционалы $m(\varphi)$ и $K(\varphi,\psi)$.

Ортонормальные собственные функции ядра $B(t,s)$ обозначим через $\varphi_k(t)$, $k=1,2\ldots$, соответствующие им собственные значения – через $\lambda_k$, $k=1,2\ldots$ В /I2/ доказано, что в данном случае пространство $\tilde{H}$ представляет собой линейную оболочку функций $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, замкнутую относительно нормы, соответствующей скалярному произведению

$$(x,y)_{\tilde{H}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \left(\int_a^b x(t)\,\varphi_k(t)dt\right)\left(\int_a^b y(t)\,\varphi_k(t)dt\right) . \tag{3}$$

Функции $e_k(t) = \sqrt{\lambda_k}\,\varphi_k(t)$, $k=1,2,\ldots$, образуют ортонормированный базис в $\tilde{H}$. Для почти всех $x \in C[a,b]$ справедливо разложение, сходящееся в равномерной норме:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (x,e_k)_{\tilde{H}}\, e_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^b x(t)\,\varphi_k(t)dt\right)\varphi_k(t) . \tag{4}$$

Пространство непрерывных на $[0,1]$ функций, удовлетворяющих условию $x(0)=0$, с мерой, среднее значение которой $m(t)=0$, а $B(t,s)=\min(t,s)$, называется пространством функций с мерой Винера. Интеграл по мере Винера будем обозначать следующим образом: $\int\limits_C F(x)d_w x$.

В этом случае

$$\varphi_k(t) = \sqrt{2}\,\sin(k-\tfrac{1}{2})\pi t, \quad k=1,2,\ldots, \tag{5}$$
$$\lambda_k = \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2} .$$

## § 2. Формулы для вычисления континуальных интегралов

Из литературы известны различные выражения, позволяющие записать континуальный интеграл как предел $n$-кратных интегралов при стремлении $n$ к бесконечности /I,I0/. В /I0/ доказана следующая теорема:

**Теорема I**

Пусть $X$ – сепарабельное пространство Фреше с гауссовой мерой $\mu$, $F[x]$ – непрерывный почти всюду на $X$ функционал, удовлетворяющий условию $|F[x]|\le \Phi[x]$, где $\Phi[x]$ – суммируемый функционал такой, что $\Phi\left[\sum_{k=1}^{n}(e_k,x)_{\widetilde H}e_k\right]$ не убывает при $n\to\infty$.

Тогда

$$\int_X F(x)d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left\{-\frac{1}{2}(u,u)\right\}F\left[\sum_{k=1}^{n}u_ke_k\right]du\,, \qquad (6)$$

где $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольный ортонормированный базис в $\widetilde H$, $u\in\mathbb{R}^n$.

Теорема I дает возможность приближенного вычисления континуальных интегралов для широкого круга функционалов. Однако такой способ вычисления не гарантирует высокой скорости сходимости к точному значению. Продемонстрируем это на примере. Рассмотрим интеграл по мере Винера от функционала

$$F_o[x]=\int_0^1 x^2(t)dt\,.$$

Точный ответ в этом случае известен. Он равен

$$I=\int_C F_o[x]d_wx=\frac{1}{2}\,.$$

Результат, получаемый по формуле (6), будем обозначать через $I_n$. Нетрудно подсчитать, что

$$I_n=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=\frac{4}{\pi^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}\longrightarrow\frac{1}{2}\,,\quad n\to\infty\,,$$

причем

$$|I_n-I|\approx O\left(\frac{1}{n}\right)\,.$$

Как мы видим, соотношение (6) не обеспечивает достаточно быстрой сходимости к точному значению даже для такого "простого" функционала, как $F[x]=\int_0^1 x^2(t)dt$.

Для континуальных интегралов получены формулы, которые являются точными на некотором классе функционалов. Например, в /I0/ построена приближенная формула, точная для функциональных многочленов заданной ($2m+1$)-степени. Напомним, что функциональным многочленом степени $m$ называется функционал вида

$$P_m[x]=\sum_{k=0}^{m}P_k[x]\,,$$

где $P_k[x]$ – непрерывная на $X$ однородная форма $k$-го порядка.

<u>Теорема 2/I0/</u>

Пусть $\nu$ -симметричная вероятностная мера на $\mathbb{R}$, а функция $\rho(v):\mathbb{R}\to X$, такова, что

$$\rho(v)=-\rho(-v)\,,$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\langle\xi,\rho(v)\rangle\langle\eta,\rho(v)\rangle\,d\nu(v)=K(\xi,\eta)\,,\\ \qquad\text{и}\\ \displaystyle\prod_{i=1}^{\ell}\langle\xi_i,\rho(v)\rangle\in L(\mathbb{R},\nu)\ \text{для}\ 1\le\ell\le 2n+1\end{array}\right. \qquad (7)$$

и любых $\xi,\eta,\xi_j\in X'$.



Тогда формула

$$\int_X F(x)d\mu(x)\approx\int_{\mathbb{R}^m}F[\theta_m(v)]\,d\nu_m(v) \qquad (8)$$

точна для произвольных многочленов степени $\le 2m+1$.

Здесь $\theta_m(v)=\sum_{k=1}^{m}c_k^{(m)}\rho(v_k)$, $[c_k^{(m)}]^2=c_k^2$ – корни многочлена $Q_m(t)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k t^{m-k}/k!$, а $\nu_m$ – мера в $\mathbb{R}^m$, являющаяся декартовым произведением мер $\nu$.

В случае интегрирования по мере Винера в качестве $\rho(v)$ в формуле (8) можно взять/I3/

$$\rho(v,t)=\begin{cases}\operatorname{sign}(v)\,, & 0\le|v|<t\le 1\,,\\ 0\,, & 0\le t\le|v|\le 1\,,\end{cases} \qquad (9)$$

а в качестве $\nu$ – нормированную лебегову меру $v$ на $[-1,1]$:

$$d\nu=\frac{dv}{2}\,.$$

В этом случае выражение (8) приобретает вид/I3/:

$$\int_C F[x]d_wx\approx\frac{1}{2^m}\underbrace{\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}}_{m}F\left[\sum_{i=1}^{m}c_i^{(m)}\rho(v_i,\cdot)\right]dv_1\ldots dv_m\,. \qquad (I0)$$

Так как $F_o[x]=\int_0^1 x^2(t)dt$ является функциональным многочленом второй степени, то формула (I0) в этом случае дает точное значение интеграла от $F_o[x]$ при любом $m$. В частности, при $m=1$ согласно (I0)

$$\int_C F_o[x]d_wx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{\int_{|v|}^{1}(\operatorname{sign}(v))^2dt\right\}dv=\frac{1}{2}\,.$$

Выражение (8) гарантирует хорошее приближение, когда интегрируемый функционал "близок" к функциональному многочлену степени $\le 2m+1$/I0/. Оказывается, что при помощи (8) можно построить приближенные формулы, пригодные для более широкого круга функционалов. Их построению и исследованию посвящен следующий раздел.

## § 3. <u>Составные приближенные формулы</u>

Построение составных приближенных формул основано на использовании соотношения, которое называется "формулой смешанного интегрирования" /I0/ и задается следующей теоремой:

<u>Теорема 3</u>

Для любого интегрируемого по мере $\mu$ на сепарабельном пространстве Фреше $X$ функционала $F[x]$ справедливо равенство

$$\int_X F[x]d\mu(x)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left\{-\frac{1}{2}(u,u)\right\}\int_X F\left[x-S_n(x)+\Psi_n(u)\right]d\mu(x)\,du\,, \qquad (II)$$

где $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(e_k,x)_{\tilde H}e_k$ , $\Psi_n(u)=\sum_{k=1}^{n}u_k e_k$ .

$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в $\tilde H$, $u\in\mathbb{R}^n$, $(u,u)=\sum_{k=1}^{n}u_k^2$ .

Если теперь континуальный интеграл, стоящий в правой части точного равенства (II), заменить некоторой приближенной формулой, то полученное выражение называется /I0/ составной приближенной формулой. Если

$$\int_X F\left[x-S_n(x)+\Psi_n(u)\right]\,d\mu(x)$$

заменить его приближенным значением согласно (8), то в результате мы получим следующую составную приближенную формулу:

$$\int_X F[x]\,d\mu(x)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left\{-\frac{1}{2}(u,u)\right\}\int_{\mathbb{R}^m}F\left[\rho^{(m)}(v)-\rho_n^{(m)}(v)+\Psi_n(u)\right]d\nu(v)\,du+R_n^{(m)}(F) \quad (I2)$$

где

$$\rho^{(m)}(v)=\sum_{k=1}^{m}c_k^{(m)}\rho(vk),\quad \rho_n^{(m)}(v)=S_n(\rho^{(m)}(v)),\quad v\in\mathbb{R}^m,\quad u\in\mathbb{R}^n .$$

В случае $m=1$ формула (I2) совпадает с результатом, полученным в /I0/.

Докажем сходимость приближений, полученных согласно (I2), к точному значению при $n\to\infty$ . Предположим, что почти для всех $v\in\mathbb{R}^m$ относительно меры $\nu$ имеет место сходимость

$$\rho_n^{(m)}(v)\xrightarrow[n\to\infty]{}\rho^{(m)}(v). \quad (I3)$$

В случае пространства $C[a,b]$ выполнение (I3) очевидно.

Теорема 4

Пусть $F(x)$ – непрерывный на $X$ функционал, удовлетворяющий условию

$$|F(x)|\le g[A(x,x)] ,$$

где $A(x,x)$ – неотрицательный квадратичный функционал вида

$$A(x,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(x,e_k)_{\tilde H}^2 \quad (I4)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k<\infty ,\ \gamma_k\ge 0\right),$$

$g(u)$ – неубывающая положительная функция, а

$$\int_{\mathbb{R}^m}\int_X g\left[A(\rho^{(m)}(v),\rho^{(m)}(v))+A(x,x)\right]d\mu(x)\,d\nu(v)<\infty . \quad (I5)$$

Тогда $R_n^{(m)}\to 0$ при $n\to\infty$ .

Доказательство

Преобразуем интеграл

$$\int_X\int_{\mathbb{R}^m}F(\rho^{(m)}(v)-\rho_n^{(m)}(v)+S_n(x))\,d\nu(v)\,d\mu(x)=\int_X T(x)\,d\mu(x) , \quad (I6)$$



где $T(x)=\int_{\mathbb{R}^m}F(\rho^{(m)}(v)-\rho_n^{(m)}(v)+S_n(x))\,d\nu(v)$ .

Согласно формуле смешанного интегрирования

$$\int_X T(x)\,d\mu(x)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left\{-\frac{1}{2}(u,u)\right\}\int_X T(x-S_n(x)+\Psi_n(u))\,d\mu(x)\,du .$$

Но

$$T(x-S_n(x)+\Psi_n(u))=\int_{\mathbb{R}^m}F(\rho^{(m)}-S_n(\rho^{(m)})+S_n(x-S_n(x)+\Psi_n(u)))\,d\nu(v)=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^m}F(\rho^{(m)}-S_n(\rho^{m})+\Psi_n(u))\,d\nu(v).$$

Таким образом,

$$\int_X T(x)\,d\mu(x)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left\{-\frac{1}{2}(u,u)\right\}\int_X\int_{\mathbb{R}^m}F(\rho^{(m)}-\rho_n^{(m)}+\Psi_n(u))\,d\nu(v)\,d\mu(x)\,du=$$

$$=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left\{-\frac{1}{2}(u,u)\right\}\int_{\mathbb{R}^m}F(\rho^{(m)}-\rho_n^{(m)}+\Psi_n(u))\,d\nu(v)\,du .$$

Следовательно, приближенное значение $\int_X F(x)\,d\mu(x)$ можно представить в виде (I6). Для почти всех $v$ и $x$ соответственно относительно мер $\nu$ и $\mu$ последовательность $\rho^{(m)}(v)-\rho_n^{(m)}(v)+S_n(x)$ при $n\to\infty$ сходится к $x$ .

Следовательно, в этих точках

$$\lim_{n\to\infty}F(\rho^{(m)}-\rho_n^{(m)}+S_n(x)) = F(x).$$

С другой стороны, для почти всех $v$ и $x$

$$\left|F\left[\rho^{(m)}(v)-\rho_n^{(m)}(v)+S_n(x)\right]\right|\le g\left[A(\rho^{(m)},\rho^{(m)})+A(x,x)\right] .$$

Действительно,

$$\left|F\left[\sum_{i=n+1}^{\infty}(\rho^{(m)}(v),e_i)_{\tilde H}e_i+\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)_{\tilde H}e_i\right]\right|\le$$

$$\le g\left[\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(x,e_i)_{\tilde H}^2+\sum_{i=n+1}^{\infty}\gamma_i(\rho^{(m)}(v),e_i)_{\tilde H}^2\right]\le g\left[A(\rho^{(m)}(v),\rho^{(m)}(v))+A(x,x)\right].$$

Теперь можно применить теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла в правой части. Теорема доказана.

Следующая теорема устанавливает оценку остатка формулы (I2) $R_n^{(m)}(F)$ в зависимости от $m$ и $n$ .

Теорема 5

Пусть интегрируемый по мере $\mu$ функционал $F[x]$ допускает представление

$$F[x+x_0] = P_{2m+1}[x]+r_{2m+1}(x,x_0) , \quad (I7)$$

где $P_{2m+1}$ – функциональный многочлен степени $\leq 2m+1$, а остаток $r_{2m+1}$ оценивается выражением

$$|r(x,x_0)| \leq [A(x,x)]^{m+1} \{ L_1 \exp[L_2 A(x+x_0, x+x_0)] + \tag{18}$$

$$+ L_3 \exp[L_2 A(x_0,x_0)] \}.$$

Здесь $A(x,x)$ определяется согласно (14), $x_0$ – фиксированная точка из $X$, $L_i > 0$ для $i=1,2,3$,

$$1-2L_2\gamma_k > \alpha > 0, \quad k=1,2,\ldots,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k a_k < \infty, \tag{19}$$

где $a_k$ определяются соотношениями

$$(e_k, \rho^{(m)}(v))^2_{\tilde H} \leq a_k \quad \text{для всех } v \in \mathbb{R}^m. \tag{20}$$

Тогда для остатка приближенной формулы (12) имеет место оценка

$$|R_n^{(m)}(F)| \leq G_m\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k\Big)^{m+1} + H_m\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k a_k\Big)^{m+1}, \tag{21}$$

где $G_m$ и $H_m$ – положительные константы, зависящие от $m$.

Доказательство

Для случая $m=1$ теорема доказана Л.А.Яновичем /10/.

Аналогично /10/, стр. 135, остаток можно записать в виде

$$|R_n^{(m)}(F)| = |\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1| + |\ell_2| = \Big|\prod_{k=1}^{n}(1-2L_2\gamma_k)^{-\frac12} I_1(n,m) + \prod_{k=1}^{n}(1-2L_2\gamma_k)^{-\frac12} I_2(n,m),$$

где

$$I_1(n,m) = \int_X \Big[\sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k (x,e_k)^2\Big]^{m+1} \Big\{L_1 \exp\Big[L_2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k (x,e_k)^2 + L_3\Big\} d\mu(x),$$

$$I_2(n,m) = \int_{\mathbb{R}^m} \Big[\sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k (\rho^{(m)}(v),e_k)^2\Big]^{m+1} \Big\{L_1 \exp\Big[L_2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k (\rho^{(m)}(v),e_k)^2 + L_3\Big\} \cdot d\vartheta(v)$$

Вычислим $I_1(n,m)$. Для этого продифференцируем по $\lambda$ $(m+1)$ раз выражение

$$I(\lambda) = \int_X \exp\Big[\lambda L_2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k (x,e_k)^2\Big] d\mu(x) = \prod_{k=n+1}^{\infty} (1-2\lambda L_2 \gamma_n)^{-\frac12}$$

и заметим, что

$$I_1(n,m) = L_1 \cdot I^{(m+1)}(1) + L_3 L_1 I^{(m+1)}(0).$$

После дифференцирования в левой части равенства получим выражение

$$L_2^{m+1} \int_X \Big[\sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k (x,e_k)^2\Big]^{m+1} \exp\Big[L_2 \lambda \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k (x,e_k)^2\Big] d\mu(x).$$



Найдем $(m+1)$-ю производную правой части. Обозначим

$$f_j(\lambda) = (1-2\lambda L_2 \gamma_j)^{-\frac12},$$

$$s = s(\lambda) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \gamma_j f_j^2,$$

$$I = I(\lambda) = \prod_{k=n+1}^{\infty} f_k(\lambda).$$

Так как

$$I' = L_2 I S,$$

то

$$I^{(m+1)} = (I')^{(m)} = L_2 \sum_{k_1=0}^{m} C_m^{k_1} I^{(k_1)} S^{(m-k_1)} =$$

$$= L_2^{m+1} \sum_{k_1=0}^{m} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{k_{m+1}=0}^{k_m-1} C_m^{k_1} C_{k_1-1}^{k_2} \cdots C_{k_m-1}^{k_{m+1}} S^{(m-k_1)} S^{(k_1-1-k_2)} \cdots S^{(k_m-1-k_{m+1})} I^{(k_{m+1})},$$

где $k_{m+1}=0$, $I^{(k_{m+1})} = I$.

Нетрудно подсчитать, что

$$s^{(t)}(x) = (2L_2)^t t! \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k^{t+1} f_k^{2(t+1)}(\lambda) = K(t) \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k^{t+1} f_k^{2(t+1)}(\lambda).$$

При $\lambda=0$ получаем $f_k=1$ для любого $k$, $I=1$. Так как $\gamma_k > 0$ для любого $k$, то

$$|s^{(t)}(0)| \leq K(t)\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k\Big)^{t+1} = [s(0)]^{t+1} \cdot K(t).$$

Получаем следующую оценку:

$$I^{(m+1)}(0) \leq L_2^{m+1} K(m-k_1) \ldots K(k_m-1-k_{m+1}) \sum_{k_1=0}^{m} \cdots \sum_{k_{m+1}=0}^{k_m-1} C_m^{k} \cdots C_{k_m-1}^{k_{m+1}} S^{m+1} =$$

$$= L_2^{m+1} W_m S^{m+1}.$$

Вычислим $I^{(m+1)}$ при $\lambda=1$. Воспользовавшись (19), получаем

$$f_k(1) < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Тогда

$$|s^{(t)}(1)| \leq K(t) \frac{1}{\alpha^t} \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k^{t+1} \leq K(t) \frac{1}{\alpha^t} \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k\Big)^{t+1}.$$

Следовательно,

$$\Big|S^{(m-k_1)} \ldots S^{(k_m-1-k_{m+1})}\Big| \leq K(m-k_1) \ldots K(k_m-1-k_{m+1}) \cdot \frac{1}{\alpha^{m+1}} \cdot I(1) \times$$

$$\times \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k\Big)^{m+1} = q_m \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k\Big)^{m+1}.$$

Итак, для $\ell_1$ получаем оценку $|\ell_1| \le G_m(\sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k)^{m+1}$.

Величина $\ell_2$ оценивается аналогично [10], стр.137:

$$|\ell_2| \le H_m(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cdot \gamma_k)^{m+1}.$$

Таким образом, получена оценка (21) и указан путь вычисления констант $G_m$ и $H_m$. Теорема доказана.

В качестве примера оценим скорость сходимости формулы (12) в случае интеграла по мере Винера при $n \to \infty$. Формула (12) примет в данном случае вид

$$\int_C F(x)\,d_w x = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{-\frac{1}{2}(u,u)\right\} \frac{1}{2^m} \underbrace{\int_{-1}^{+1}\!\!\dots\int_{-1}^{+1}}_{m} F\left[\rho^{(m)}(v,t) - \rho_n^{(m)}(v,t) + \Psi_n(u,t)\right] dv\,du + R_n^{(m)}(F), \tag{22}$$

$$\rho^{(m)}(v,t) = \sum_{i=1}^{m} C_i^{(m)} \rho(v_i,t),$$

$$\rho_n^{(m)}(v,t) = 4 \sum_{k=1}^{n} \sin(k-\tfrac{1}{2})\pi t \cdot \frac{1}{(2k-1)\pi} \cdot \sum_{i=1}^{m} C_i^{(m)} \operatorname{sign}(v_i) \cos(k-\tfrac{1}{2})\pi v_i,$$

$$\Psi_n(u,t) = 2\sqrt{2} \sum_{k=1}^{n} \sin(k-\tfrac{1}{2})\pi t \frac{u_k}{(2k-1)\pi}.$$

В качестве $A(x,x)$ можно взять $\int_0^1 x^2(t)\,dt$. В этом случае требования (14) будут выполнены. Действительно, для почти всех $x \in X$

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (x,e_k)_{\tilde H} e_k(t) \quad \text{и} \quad \int_0^1 e_k^2(t)\,dt = \lambda_k \qquad (k=1,2,3\dots),$$

где $\lambda_k$ определяются согласно (5). Следовательно,

$$A(x,x) = \int_0^1 x^2(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x,e_k)^2_{\tilde H}.$$

Вычислим $(e_k, \rho^{(m)}(v,t))_{\tilde H}$ :

$$(e_k(t), \rho(v,t))_{\tilde H} = \int_0^1 \frac{1}{\lambda_k} \cdot \rho(v,t) \cdot e_k(t)\,dt = \frac{1}{\lambda_k} \int_{|v|}^{1} \operatorname{sign}(v) e_k(t)\,dt = \sqrt{2} \cdot \operatorname{sign}(v) \cos(\sqrt{\lambda_k}|v|).$$

Так как

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2} \le O(n^{-1}), \qquad \text{то } (\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k)^{m+1} \le O(n^{-(m+1)}).$$

Так как

$$(e_k, \rho(v,t))_{\tilde H} = \sqrt{2}\operatorname{sign}(v) \cdot \cos(\sqrt{\lambda_k}|v|),$$

то

$$(e_k, \rho^{(m)})_{\tilde H} = \sum_{i=1}^{m} C_i^{(m)} (e_k, \rho(v_i,t))_{\tilde H}.$$

Тогда согласно неравенству Коши-Буняковского



$$(\sum_{i=1}^{m} c_i^{(m)} (e_k, \rho(v_i,t))^2_{\tilde H} \le \sum_{i=1}^{m} c_i^{(m)2} \sum_{i=1}^{m} (e_k, \rho(v_i,t))^2_{\tilde H}.$$

Но $c_i^{(m)2}$ – корни многочлена $Q_m(t) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k t^{m-k}/k!$ .
Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^{(m)2} = 1 .$$

Значит,

$$(e_k, \rho^{(m)}(v,t))_{\tilde H} \le \sqrt{2} = a, \qquad \text{для любых } v,k.$$

Таким образом,

$$(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \lambda_k)^{m+1} = (\sum_{k=n+1}^{\infty} a \lambda_k)^{m+1} = O(n^{-(m+1)}).$$

Получаем, что порядок сходимости приближенной формулы (22) в случае, когда функционал удовлетворяет условиям (17)-(18) с $A(x,x) = \int_0^1 x^2(t)\,dt$, равен $O(n^{-(m+1)})$ .

## § 4. Примеры

Рассмотрим интеграл по мере Винера от функционала

$$F_1[x] = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 x^2(t)\,dt\right\}.$$

Точное значение континуального интеграла будем обозначать через $I$, приближенное значение, вычисленное по формуле (6),– через $I_n$; а по формуле (12) – через $I_n^{(m)}$. В данном случае

$$I = \int_C \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 x^2(t)\,dt\right\} d_w x = \frac{1}{\sqrt{\cos 1}} = 1{,}3604468816\dots,$$

$$I_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_k}},$$

$$I_n^{(1)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_k}} \cdot \int_0^1 \exp\left\{\frac{1}{2} w_n(v)\right\} dv,$$

$$I_n^{(2)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_k}} \cdot 2 \int_0^1 \exp\left\{\frac{1}{4} w_n(v_1)\right\} \times$$

$$\times \int_0^{v_1} \exp\left\{\frac{1}{4} w_n(v_2)\right\} \cos\left[\frac{1}{4}(w_n(v_1) - w_n(v_2))\right] \times \operatorname{ch}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 - v_1 - 2\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cos(j-\tfrac{1}{2})\pi v_1 \times\right.\right.$$

$$\left.\left. \times \cos(j-\tfrac{1}{2})\pi v_2\right]\right\} dv_1\,dv_2,$$

где

$$w_n(v) = 1 - v - 2\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cos^2(j-\tfrac{1}{2})\pi v .$$

Приближенные значения $I_n$, $I_n^{(1)}$, $I_n^{(2)}$, полученные на ЭВМ CDC-6500, приведены в таблице I.

Таблица I

| n | $I_n$ | $I_n^{(1)}$ | $I_n^{(2)}$ |
|---|---|---|---|
| I | I,2967 | I,35980945 | I,36043254I |
| 2 | I,3269 | I,3603480I | I,360446I60 |
| 3 | I,3378 | I,36041602 | I,360446774 |
| 4 | I,3434 | I,36043360 | I,360446855 |
| 5 | I,3468 | I,3604400I | I,360446873 |
| I0 | I,3536 | I,3604460I | I,360446880 |

Рассмотрим еще один пример:

$$F_2(x)=\int_0^1 x^2(t)dt\cdot\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 x^2(t)dt\right\}.$$

Заметим, что

$$I=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\cos 1}}\cdot \operatorname{tg}1 = 1{,}0593852412\ldots .$$

Вычисления дают

$$I_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_k}}\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{1-\lambda_j},$$

$$I_n^{(1)}=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_k}}\times\int_0^1\exp\left\{\frac{1}{2}w_n(v)\right\}\times\left[w_n(v)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{1-\lambda_j}\right]dv,$$

$$I_n^{(2)}=2\prod_{l=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_l}}\cdot\int_0^1\exp\left\{\frac{1}{4}w_n(v_1)\right\}dv_1\int_0^{v_1}\exp\left\{\frac{1}{4}w_n(v_2)\right\}\times$$

$$\times\left\{\left[\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{(1-\lambda_k)}+\frac{1}{2}\left[w_n(v_1)+w_n(v_2)\right]\right\}\cos\left\{\frac{1}{4}\left[w_n(v_1)-w_n(v_2)\right]\right\}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left[w_n(v_1)-w_n(v_2)\right]\cdot\sin\left\{\frac{1}{4}\left[w_n(v_1)-w_n(v_2)\right]\right\}\right]\cdot\operatorname{ch}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-v_1-z_n(v_1,v_2)\right\}+$$

$$\left.+\sqrt{2}(1-v_1-z_n(v_1,v_2))\cos\left\{\frac{1}{4}\left[w_n(v_1)-w_n(v_2)\right]\right\}\cdot\operatorname{sh}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-v_1-z_n(v_1v_2))\right\}\right\}dv_2,$$

где

$$w_n(v)=1-v-2\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cos^2(k-\tfrac{1}{2})\pi v,$$

$$z_n(v_1,v_2)=2\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cos(k-\tfrac{1}{2})\pi v_1\cos(k-\tfrac{1}{2})\pi v_2.$$

В таблице 2 приведены приближенные значения $I_n$, $I_n^{(1)}$ и $I_n^{(2)}$, полученные на ЭВМ.



Таблица 2

| n | $I_n$ | $I_n^{(1)}$ | $I_n^{(2)}$ |
|---|---|---|---|
| I | 0,883683 | I,056293I | I,059286596 |
| 2 | 0,966850 | I,0589I05 | I,059380332 |
| 3 | 0,996829 | I,0592374 | I,0593845II |
| 4 | I,0I2I8I | I,05932I7 | I,059385059 |
| 5 | I,02I496 | I,05935242 | I,059385I80 |
| I0 | I,040328 | I,05938I09 | I,059385239 |

Таблицы I и 2 демонстрируют эффективность построенной нами приближенной формулы (I2) для рассмотренных примеров. Из таблиц видно, что приближения, вычисленные согласно (I2), сходятся быстрее, чем полученные с помощью (6), а формула (I2) с $m=2$ имеет преимущества перед $m=1$. Формула (I2) обеспечивает довольно высокую точность результата уже при малых $n$ (не менее трех точных знаков при $n=1$ в рассмотренных случаях). Для каждого фиксированного $n$ значение интеграла, вычисленное с помощью (I2) с $m=2$, точнее, чем с $m=1$, что в свою очередь точнее, чем результат, полученный согласно (6).

Заметим, что для нахождения континуального интеграла по формуле (6) необходимо вычислять $n$-кратный интеграл, а по формуле (I2) – ($n+m$) – кратный. Из таблиц I и 2 следует, что при одном и том же количестве интегрирований выражение (I2) обеспечивает более точный результат, чем (6), а (I2) с $m = 2$ дает лучшее приближение, чем с $m = I$.

## Литература


I. Гельфанд И.М., Яглом А.М. УМН, I956, XI, I, с.77.
2. Далецкий Ю.Л. УМН, I962, т.I7, вып.5, с.3.
3. Feynman R.P. Rev.Mod.Phys.,1948,v.20,No2,p.367.
4. Kac M. Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 65, No1,p.1;
   Kac M. Proc. 2-nd Berkeley Sympos. Math. Stat.and Probab., Berkeley, 1951, p.189.
5. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. "Мир", М., I968.
6. Wiener N. Journ. Math. and Phys.,1923, 2,p.131;
   Proc. London Math. Soc.,1924, v.22,No6,p.454.
7. Cameron R.H. Duke Math. Journ.,1951,v.18, No1, p.111.
8. Гельфанд И.М., Ченцов Н.Н. ЖЭТФ, I956, т.3I, № 6, с.II06.

9. Гельфанд И.М., Фролов А.С., Ченцов Н.Н. Изв.вузов, сер.матем., 1958, № 5(6), с.32.
10. Янович Л.А. Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. "Наука и техника", Минск, 1976.
11. Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. "Наука", М., 1983.
12. Kuelbs J. Journ. Funct.Anal., 1970, vol.5, No.3, p.354.
13. Konheim A.G., Miranker W.Z. Math. Comput., 1967, v.21,No97, p.49.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 декабря 1983 года.

## ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

| Индекс | Тематика |
|---|---|
| 1. | Экспериментальная физика высоких энергий |
| 2. | Теоретическая физика высоких энергий |
| 3. | Экспериментальная нейтронная физика |
| 4. | Теоретическая физика низких энергий |
| 5. | Математика |
| 6. | Ядерная спектроскопия и радиохимия |
| 7. | Физика тяжелых ионов |
| 8. | Криогеника |
| 9. | Ускорители |
| 10. | Автоматизация обработки экспериментальных данных |
| 11. | Вычислительная математика и техника |
| 12. | Химия |
| 13. | Техника физического эксперимента |
| 14. | Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами |
| 15. | Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях |
| 16. | Дозиметрия и физика защиты |
| 17. | Теория конденсированного состояния |
| 18. | Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники |
| 19. | Биофизика |

Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Сидорова О.В. P11-83-867

Составная приближенная формула произвольного порядка точности для континуальных интегралов по гауссовой мере

Рассматриваются континуальные интегралы вида $\int F[x]d\mu(x)$, где $X$ - сепарабельное пространство Фреше, $F[x]$ - действительный*функционал, заданный на $X$, $\mu(x)$ - гауссова мера на $X$. Построена составная приближенная формула для вычисления таких интегралов, точная для функциональных многочленов степени $\le 2m+1$ $(m = 1, 2, 3, ...)$. Континуальный интеграл от функционала $F[x]$ вычисляется по этой формуле путем интегрирования некоторой функции, зависящей от $F[x]$, по конечномерному пространству $R^n \oplus R^m$, где $n$ - произвольное натуральное число. Доказана сходимость полученной формулы при $n \to \infty$ /$m$ фиксировано/ для довольно широкого класса функционалов. Для более узкого класса функционалов получена оценка остатка $R_n^{(m)}$, зависящая от $m$ и $n$. Установлено, что с ростом $m$ скорость сходимости по $n$ возрастает. Особо рассмотрено интегрирование по мере Винера. Показано, что в этом случае скорость сходимости построенной приближенной формулы имеет порядок $\sim (1/n)^{m+1}$. Полученные результаты иллюстрируются численными примерами.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Zhidkov E.P., Lobanov Yu.Yu., Sidorova O.V. P11-83-867

Composite Formula of the Voluntary Degree of Accuracy for the Approximate Calculation of Functional Integrals by the Gaussian Measure

Functional integrals $\int F[x]d\mu(x)$ are investigated, where $X$ is a separable Frechet space, $F[x]$* is a real functional on $X$, and $\mu(x)$ is a Gaussian measure on $X$, respectively. A composite approximate formula for calculation of such integrals is derived, which turns out to be exact for the functional polynomials of degree at most $2m+1$ $(m = 1,2,3, ...)$. The formula allows one to calculate the functional integral of $F[x]$ using integration of certain function depending on $F[x]$ over the finite-dimensional space $R^n \oplus R^m$, where $n$ is an arbitrary natural number. For any fixed $m$, the convergence of the formula when $n \to \infty$ is established, for a large class of functionals. For a certain narrower class of functionals an estimate of the remainder term $R_n^{(m)}$ depending on both $m$ and $n$, is obtained. It is shown that the speed of convergence in $n$ is increasing with the increase of $m$. In particular, integration with respect to the Wiener measure is investigated. In this case the speed of convergence in the derived formula is shown to be of order $\sim(1/n)^{m+1}$. Numerical examples illustrate the obtained results.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой