сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-83-764

Е.П.Жидков, И.В.Макрелов, Х.И.Семерджиев

ДВА МЕТОДА ДЛЯ ОДНОВРЕМЕННОГО НАХОЖДЕНИЯ ВСЕХ КОРНЕЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1983

1. В ряде прикладных задач применяются экспоненциальные полиномы вида

$$E_n(x) \equiv a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k e^{-kx} + b_k e^{kx}) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k' \operatorname{sh} kx + b_k' \operatorname{ch} kx). \qquad /1/$$

Например, в работе /1/ на основе полиномов типа /1/ получены новые многошаговые методы для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому изучение полиномов /1/ важно. В /2/ нами был получен следующий итерационный метод для одновременного нахождения всех нулей $x_1, x_2, ..., x_{2n}$ полинома /1/ в предположении, что они простые:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - 2C_k E_n(x_i^{(k)}) / \prod_{j=1, j\neq i}^{2n} \operatorname{sh} \frac{x_i^{(k)} - x_j^{(k)}}{2}, \qquad /2/$$

$i = 1,2,..., 2n;\ k = 0,1,2,...,$

$$C_k = \prod_{j=1}^{2n} \operatorname{sh} \frac{y - x_j^{(k)}}{2} / E_n(y), \qquad /3/$$

а y - произвольное число, $y \neq x_i$, $i = 1,2,..., 2n$.

Для метода /2/ ожидалась квадратическая скорость сходимости, но этот факт не был обоснован в /2/. В настоящей работе докажем теорему о квадратической сходимости метода /2/, а также получим метод, имеющий кубическую скорость сходимости, для одновременного нахождения всех нулей полинома /1/.

2. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть нули $x_1, x_2, ..., x_{2n}$ полинома /1/ простые. Пусть числа q и c заданы такими, что $0 < q < 1$, $0 < c < 1$, $d - 2c > 0$ и $Lc2^{4n+1} \leq 1$, где

$$d = \min_{i\neq j} |x_i - x_j|, \quad L = \max\{\frac{R}{r}, 1\},$$

$$R = \max\{2|\operatorname{ch}(2p_1 + c)/4|,\ 2|\operatorname{ch}(2p + 3c)/4|\},$$

$$p = \max_{i \neq j} |x_i - x_j|, \quad r = \min\{|\mathrm{sh}(\frac{d}{2} - c)|, \ |\mathrm{sh}\frac{d_1}{2}|\},$$

$$d_1 = \min_{i = 1,2,\dots,2n} |y - x_i|, \quad p_1 = \max_{i = 1,2,\dots,2n} |y - x_i|.$$

Если начальные приближения $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{2n}^{(0)}$ к нулям $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ выбраны таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$|x_i^{(0)} - x_i| \leq cq, \quad i = 1,2,\dots,2n, \qquad /4/$$

то для каждого целого $k \geq 0$ выполняются и неравенства

$$|x_i^{(k)} - x_i| \leq cq^{2^k}, \quad i = 1,2,\dots,2n. \qquad /5/$$

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции по номеру итерации k. Неравенства /4/ показывают, что теорема верна при $k = 0$. Пусть неравенства /5/ удовлетворяются при некотором целом неотрицательном числе k. Докажем, что /5/ выполняются и при числе $k+1$. Для полинома /1/ можем записать $E_n(y)$ и $E_n(x_i^{(k)})$ в виде

$$E_n(y) = A \prod_{j=1}^{2n} \mathrm{sh}\frac{y - x_j}{2}, \quad E_n(x_i^{(k)}) = A \prod_{j=1}^{2n} \mathrm{sh}\frac{x_i^{(k)} - x_j}{2}, \qquad /6/$$

где A - некоторая постоянная. Если из обеих частей формулы /2/ вычтем x_i и потом в правой части выделим множитель $x_i^{(k)} - x_i$, то после некоторых преобразований получим

$$x_i^{(k+1)} - x_i = (x_i^{(k)} - x_i)\left(1 - \frac{\mathrm{sh}\frac{x_i^{(k)} - x_i}{2}}{\frac{x_i^{(k)} - x_i}{2}} \prod_{j=1, j \neq i}^{2n} \frac{\mathrm{sh}\frac{x_i^{(k)} - x_j}{2}}{\mathrm{sh}\frac{x_i^{(k)} - x_j^{(k)}}{2}} \prod_{j=1}^{2n} \frac{\mathrm{sh}\frac{y - x_j^{(k)}}{2}}{\mathrm{sh}\frac{y - x_j}{2}}\right). \qquad /7/$$

Далее будем использовать тождество

$$\mathrm{sh}\frac{y - \alpha}{2} / \mathrm{sh}\frac{y - \beta}{2} = 2\,\mathrm{ch}\frac{2y - \alpha - \beta}{2}\,\mathrm{sh}\frac{\beta - \alpha}{4} / \mathrm{sh}\frac{y - \beta}{2} + 1, \qquad /8/$$

неравенства

$$|\mathrm{sh}\,x| < \frac{4}{4 - x^2}|x|, \quad \left|\frac{\mathrm{sh}\,x}{x} - 1\right| < \frac{x^2}{4 - x^2}, \qquad /9/$$

которые имеют место при $|x| < 4$, и неравенство

$$\left|1 - \prod_{i=1}^{m}(1 + a_i)\right| \leq \left|1 - \prod_{i=1}^{m}(1 + |a_i|)\right|, \qquad /10/$$

которое выполняется при любых числах $a_1, a_2, \dots, a_m$.

Из /7/, /8/ и /10/ находим неравенство

$$|x_i^{(k+1)} - x_i| \leq |x_i^{(k)} - x_i|\,\left|1 - (1 + |\delta - 1|) \prod_{j=1, j \neq i}^{2n} (1 + |\gamma_j|) \prod_{j=1}^{2n} (1 + |\beta_j|)\right|, \qquad /11/$$

где

$$\gamma_j = 2\,\mathrm{ch}\frac{2x_i^{(k)} - x_j - x_j^{(k)}}{4}\,\mathrm{sh}\frac{x_j^{(k)} - x_j}{4} / \mathrm{sh}\frac{x_i^{(k)} - x_j^{(k)}}{2}, \qquad /12/$$

$$\beta_j = 2\,\mathrm{ch}\frac{2y - x_j^{(k)} - x_j}{4}\,\mathrm{sh}\frac{x_j - x_j^{(k)}}{4} / \mathrm{sh}\frac{y - x_j}{2}, \qquad /13/$$

$$\delta = \mathrm{sh}\frac{x_i^{(k)} - x_i}{2} / \frac{x_i^{(k)} - x_i}{2}. \qquad /14/$$

Используя предположения теоремы 1, непосредственно находим неравенства

$$|x_i^{(k)} - x_j^{(k)}| \geq |x_i - x_j| - |x_i^{(k)} - x_i| - |x_j^{(k)} - x_j| > d - 2c,$$

$$|2y - x_j^{(k)} - x_j| = 2|y - x_j| + |x_j - x_j^{(k)}| \leq 2p_1 - c, \qquad /15/$$

$$|2x_i^{(k)} - x_j - x_j^{(k)}| \leq 2|x_i - x_j| + 2|x_i^{(k)} - x_i| + |x_j - x_j^{(k)}| < 2p + 3c.$$

Учитывая свойства функций $\mathrm{sh}\,x$ и $\mathrm{ch}\,x$, из неравенств /9/ и /15/ и условий теоремы 1 получим следующие неравенства:

$$\left|\mathrm{sh}\frac{x_i^{(k)} - x_j^{(k)}}{2}\right| > \left|\mathrm{sh}\frac{d - 2c}{2}\right| \geq r, \quad \left|\mathrm{sh}\frac{y - x_j}{2}\right| > \left|\mathrm{sh}\frac{d_1}{2}\right| \geq r,$$

$$2\left|\mathrm{ch}\frac{2y - x_j^{(k)} - x_j}{4}\right| < 2\left|\mathrm{ch}\frac{2p_1 + c}{4}\right| \leq R, \quad 2\left|\mathrm{ch}\frac{2x_i^{(k)} - x_j - x_j^{(k)}}{4}\right| < 2\left|\mathrm{ch}\frac{2p + 3c}{4}\right| \leq R,$$

$$\left|\mathrm{sh}\frac{x_j^{(k)} - x_j}{4}\right| < \frac{16}{64 - c^2}|x_j^{(k)} - x_j| < |x_j^{(k)} - x_j| \leq cq^{2^k},$$

$$|\delta - 1| < (x_i^{(k)} - x_i)^2 / [16 - (x_i^{(k)} - x_i)^2] < (x_i^{(k)} - x_i)^2 / (16 - c^2) \leq (cq^{2^k})^2.$$

Тогда для величин $|\gamma_j|$ и $|\beta_j|$ получим оценки $|\gamma_j| < \frac{R}{r} cq^{2^k}$, $|\beta_j| < \frac{R}{r} cq^{2^k}$.

Теперь на основе /11/ доказательство теоремы 1 закончим следующей цепочкой неравенств и равенств:

$$|x_i^{(k+1)} - x_i| < cq^{2^k} \left|1 - [1 + (cq^{2^k})^2] \prod_{j=1, j\neq i}^{4n} \left(1 + \frac{R}{r} cq^{2^k}\right)\right| <$$

$$< cq^{2^k} \left|1 - (1 + cq^{2^k})^2 \prod_{j=1}^{4n-1} (1 + Lcq^{2^k})\right| <$$

$$< cq^{2^k} \left|1 - (1 + Lcq^{2^k})^{4n+1}\right| = cq^{2^k} \sum_{\ell=1}^{4n+1} \binom{4n+1}{\ell} (Lcq^{2^k})^{\ell} \le$$

$$\le cq^{2^k} \cdot Lcq^{2^k} (2^{4n+1} - 1) < cq^{2^{k+1}} .$$

<u>Пример.</u> Рассмотрим экспоненциальный полином

$$E_2(x) = a_0 + a_1 e^{-x} + b_1 e^{x} + a_2 e^{-2x} + b_2 e^{2x} , \qquad /16/$$

где

$$a_0 = (e^3 + e^{-3} + pq)/16; \quad a_1 = -(e^{7/2} p + e^{1/2} q)/16 .$$

$$b_1 = -(e^{-7/2} p + e^{-1/2} q), \quad a_2 = e^4/16, \; b_2 = e^{-4}/16, \; p = 2\,\mathrm{ch}(3/2), \; q = 2\,\mathrm{ch}(1/2).$$

Нулями полинома /16/ являются числа $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ и $x_4 = 4$. Вычисления по формуле /2/ выполнены на ЭВМ ЕС-1020 с двойной точностью /16 десятичных знаков/ при $y = 0$. Начальное и следующие приближения указаны в табл.1. При этом принята следующая экономная запись: если цифра m встречается в записи данного числа ℓ раз подряд, то этот факт отмечается в таблицах как $(\ell * m)$.

3. Следуя методике, развитой в [3] и [4], получим метод для одновременного нахождения всех нулей полинома /1/:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - 4C_k E_n(x_i^{(k)}) \frac{V_i^{(k)} - C_k E_n'(x_i^{(k)}) + C_k E_n(x_i^{(k)}) W_i^{(k)}}{(V_i^{(k)})^2} , \qquad /17/$$

$i = 1,2,\ldots,2n; \quad k = 0,1,2,\ldots,$

Таблица 1

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	-1,200	1,700	2,800	3,700
1	-0,968	1,998	2,933	3,899
2	-0,9987	2,0001	3,0028	3,9651
3	-0,(5*9)8	1,(6*9)7	2,(4*9)4	3,(3*9)5
4	-0,(10*9)8	2,(10*0)3	3,(7*0)1	3,(6*9)8
5	-0,(16*9)	2,(15*0)	3,(15*0)	3,(15*9)

где

$$V_i^{(k)} = \prod_{j=1, j\neq i}^{2n} \mathrm{sh}\frac{x_i^{(k)} - x_j^{(k)}}{2} , \quad W_i^{(k)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1, j\neq i}^{2n} \mathrm{cth}\frac{x_i^{(k)} - x_j^{(k)}}{2} ,$$

а постоянная C_k определяется формулой /3/.

Докажем, что метод /17/ имеет кубическую скорость сходимости.

<u>Теорема 2.</u> Пусть нулями полинома $E_n(x)$ являются числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ и они простые. Пусть числа q и c выбраны таким образом, чтобы удовлетворялись условия $0 < q < 1$, $0 < c < 1$, $d - 2c > 0$ и $2^{4n} c^2 (2^{4n+2} r^2 L^2 + n)/r^2 < 1$, где d, d_1, L, R, p, p_1 и r имеют тот же смысл, что и в теореме 1. Пусть начальные приближения $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{2n}^{(0)}$ к нулям полинома /1/ выбраны таким образом, чтобы выполнялись неравенства /4/. Тогда для каждого целого $k \ge 0$ имеют место неравенства

$$|x_i^{(k)} - x_i| \le cq^{3^k}, \quad i = 1,2,\ldots,2n . \qquad /18/$$

<u>Доказательство.</u> Доказательство проведем по схеме доказательства теоремы 1. Неравенства /4/ показывают, что утверждение теоремы 2 справедливо при $k = 0$. Допустим, что оно справедливо и при некотором целом $k \ge 0$. Докажем, что неравенства /18/ верны и при следующем числе $k + 1$. Кроме представлений /6/ имеем также, что

$$E_n'(x_i^{(k)}) = \frac{1}{2} A \prod_{j=1}^{2n} \mathrm{sh}\frac{x_i^{(k)} - x_j}{2} \sum_{j=1}^{2n} \mathrm{cth}\frac{x_i^{(k)} - x_j}{2} .$$

Из обеих частей формулы /17/ вычитаем x_i и в полученной правой части выделяем множитель $x_i^{(k)} - x_i$. Тогда после несложных преобразований получаем

$$x_i^{(k+1)} - x_i = (x_i^{(k)} - x_i)\,\{1 - 2\frac{\mathrm{sh}\frac{x_i^{(k)}-x_i}{2}}{\frac{x_i^{(k)}-x_i}{2}} \prod_{j=1,j\neq i} \frac{\mathrm{sh}\frac{x_i^{(k)}-x_j}{2}}{\mathrm{sh}\frac{x_i^{(k)}-x_j^{(k)}}{2}} \prod_{j=1} \frac{\mathrm{sh}\frac{y-x_j^{(k)}}{2}}{\mathrm{sh}\frac{y-x_j}{2}} +$$

$$+ \frac{\mathrm{sh}\frac{x_i^{(k)}-x_i}{2}}{\frac{x_i^{(k)}-x_i}{2}} \prod_{j=1,j\neq i}^{2n} \frac{(\mathrm{sh}\frac{x_i^{(k)}-x_j}{2})^2}{(\mathrm{sh}\frac{x_i^{(k)}-x_j^{(k)}}{2})^2} \prod_{j=1}^{2n} \frac{(\mathrm{sh}\frac{y-x_j^{(k)}}{2})^2}{(\mathrm{sh}\frac{y-x_j}{2})^2} \times \qquad /19/$$

$$\times [\ \mathrm{ch}\frac{x_i^{(k)}-x_i}{2} + \sum_{j=1,j\neq i}^{2n} \frac{\mathrm{sh}\frac{x_i^{(k)}-x_i}{2}\ \mathrm{sh}\frac{x_j-x_j^{(k)}}{2}}{\mathrm{sh}\frac{x_i^{(k)}-x_j}{2}\ \mathrm{sh}\frac{x_i^{(k)}-x_j^{(k)}}{2}}\ ]\}.$$

Для достаточно маленьких значений c можем записать, что $\mathrm{ch}\frac{x_i^{(k)}-x_i}{2} = \delta$, где δ определяется формулой /14/. Следовательно, из /19/ и тождества /8/ следует, что

$$x_i^{(k+1)} - x_i = (x_i^{(k)} - x_i)[(1 - P_i)^2 + P_i Q_i], \qquad /20/$$

где

$$P_i = \delta \prod_{j=1,\, j\neq i}^{2n} (1+\gamma_j) \prod_{j=1}^{2n} (1+\beta_j),$$

$$Q = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{2n} \mathrm{cth}\frac{x_i^{(k)}-x_i}{2}\ \mathrm{sh}\frac{x_j-x_j^{(k)}}{2} \Big/ \mathrm{sh}\frac{x_i^{(k)}-x_j^{(k)}}{2},$$

а γ_j и β_j определяются формулами /12/ и /13/. Далее из /20/ находим

$$|x_i^{(k+1)} - x_i| = |x_i^{(k)} - x_i|\ [\,|1 - P_i|^2 + |P_i||Q_i|\,]. \qquad /21/$$

На основе предположений теоремы можно записать цепочку неравенств:

$$|x_i^{(k)} - x_j| \geq |x_i - x_j| - |x_i^{(k)} - x_i| > d - c > d - 2c. \qquad /22/$$

Из свойств гиперболических функций $\mathrm{sh}\,x$ и $\mathrm{ch}\,x$ и неравенств /9/, /15/ и /22/ следует, что имеют место неравенства

$$|\mathrm{sh}\frac{x_i^{(k)} - x_j^{(k)}}{2}| > |\mathrm{sh}\frac{d-2c}{2}| \geq r,\ |\mathrm{sh}\frac{y-x_j}{2}| > |\mathrm{sh}\frac{d_1}{2}| \geq r,$$

$$|\mathrm{sh}\frac{x_i^{(k)} - x_j}{2}| > |\mathrm{sh}\frac{d-2c}{2}| \geq r,\quad 2|\mathrm{ch}\frac{2y - x_j^{(k)} - x_j}{2}| < 2|\mathrm{ch}\frac{2p_1 + c}{2}| \leq R,$$

$$2|\mathrm{ch}\frac{2x_i^{(k)} - x_j - x_j^{(k)}}{4}| < 2|\mathrm{ch}\frac{2p+3c}{4}| \leq R,\ |\mathrm{sh}\frac{x_j^{(k)}-x_j}{4}| < |x_j^{(k)} - x_j| \leq cq^{3^k},$$

$$|\mathrm{sh}\frac{x_j - x_j^{(k)}}{2}| < |x_j - x_j^{(k)}| \leq cq^{3^k},\ |\delta - 1| < (cq^{3^k})^2,\ |\delta| < 1.$$

Тогда для $|\gamma_j|$ и $|\beta_j|$ получим оценки $|\gamma_j| < \frac{R}{r}cq^{3^k}$, $|\beta_j| < \frac{R}{r}cq^{3^k}$.

Теперь, применяя /10/, из /21/ последовательно находим

$$|x_i^{(k+1)} - x_i| < cq^{3^k}\{[1 - (1 + (cq^{3^k})^2)(1 + \frac{R}{r}cq^{3^k})^{4n-1}]^2 +$$

$$+ (1 + \frac{R}{r}cq^{3^k})^{4n-1}\frac{2n-1}{r^2}(cq^{3^k})^2\} <$$

$$< cq^{3^k}\{[1 - (1 + Lcq^{3^k})^{4n+1}]^2 + 2^{4n-1}\frac{2n-1}{r^2}(cq^{3^k})^2\} <$$

$$< cq^{3^k}\{[\sum_{\ell=1}^{4n+1}\binom{4n+1}{\ell}(Lcq^{3^k})^{\ell}]^2 + 2^{4n-1}\frac{2n}{r^2}(cq^{3^k})^2\} \leq$$

$$\leq cq^{3^k}\{[Lcq^{3^k}(2^{4n+1} - 1)]^2 + \frac{n\cdot 2^{4n}}{r^2}(cq^{3^k})^2\} <$$

$$< cq^{3^k}(q^{3^k})^2\{L^2c^2 2^{8n+2} + \frac{c^2 n\cdot 2^{4n}}{r^2}\} =$$

$$= cq^{3^{k+1}} \cdot 2^{4n} \cdot c^2(L^2 r^2 2^{4n+2} + n)/r^2 \leq cq^{3^{k+1}}.$$

Теорема 2', таким образом, полностью доказана. В табл. 2 приведены численные результаты применения метода /17/ для нахождения всех нулей полинома /16/ при тех же начальных приближениях.

Таблица 2

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	-1,200	1,700	2,800	3,700
1	-1,005	2,014	2,988	3,908
2	-1,(6*0)1	2,(4*0)2	2,(4*9)4	3,(3*9)8
3	-0,(15*9)7	2,(12*0)1	2,(13*9)	3,(11*9)7
4	-0,(16*9)	2,(15*0)	3,(15*0)	3,(15*9)

Таблица 3

Метод /2/

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	-0,2	I,0	2,5	5,0
I	-0,346	I,I72	2,5I3	4,928
2	-0,550	I,425	2,542	4,792
3	-0,776	I,725	2,606	4,567
4	-0,94I	I,954	2,742	4,285
5	-0,995	2,003	2,922	4,074
6	-0,(4*9)7	I,(3*9)8	2,994	4,005
7	-0,(8*9)5	2,(6*0)2	2,(4*9)6	4,(4*0)3
8	-0,(I3*9)6	I,(II*9)6	2,(8*9)8	4,(8*0)I
9	-I,(I4*0)	2,(I4*0)	3,(I4*0)	4,(I4*0)

4. В заключение отметим, что доказанные теоремы говорят о локальной сходимости /соответственно квадратической и кубической/ методов /2/ и /17/, являющихся модификациями методов Ньютона и Чебышева. Однако многочисленные эксперименты на ЭВМ показывают, что когда методы Ньютона и Чебышева сходятся, то методы /2/ и /17/ тоже сходятся, но в очень многих случаях, когда методы /2/ и /17/ сходятся, при тех же начальных приближениях методы Ньютона и Чебышева расходятся. Методы /2/ и /17/ имеют более широкую область сходимости.

Приведем еще некоторые расчеты на уже рассмотренном примере, показывающие преимущество методов /2/ и /17/ перед методами Ньютона и Чебышева соответственно. В этом можно убедиться, сравнивая табл.3 с табл. 4 и табл. 5 с табл. 6.

Таблица 4

Метод Ньютона

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	-0,2	I,0	2,5	5,0
I	2,525	I,6I2	6,405	4,642
2	4,527	I,90I	5,939	4,35I
3	4,265	I,990	5,493	4,I44
4	4,093	I,(3*9)8	5,079	4,034
5	4,0I5	I,(7*9)8	4,709	4,002
6	4,(3*0)5	2,(I4*0)	4,403	4,(4*0)I
7	4,(6*0)6	2,(I4*0)	4,I78	4,(9*0)3
8	4,(I2*0)8	2,(I4*0)	4,048	4,(I4*0)
9	4,(I4*0)	2,(I4*0)	4,004	4,(I4*0)
⋮			⋮	
I2	4,(I4*0)	2,(I4*0)	4,(I4*0)	4,(I4*0)

Метод /17/ Таблица 5

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	-0,5	I,7	2,6	4,3
I	-0,856	I,964	2,779	4,I53
2	-0,996	2,(3*0)2	2,98I	4,0I7
3	-0,(7*9)0	2,(7*0)I	2,(4*9)8	4,(4*0)I
4	-I,(I4*0)	2,(I4*0)	2,(I4*9)	4,(I3*0)I

Метод Чебышева Таблица 6

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	-0,5	I,7	2,6	4,3
I	53,636	2,0I7	-2,3I6	4,002
2	52,636	2,(3*0)4	-I.5I6	3.(4*9)8
3	5I,636	2,(6*0)I	-I,033	3,(9*0)6
4	50,636	2,(I3*0)5	-0,998	4,(I4*0)
⋮			⋮	
6			-I,(I4*0)	

ЛИТЕРАТУРА

1. Жидков Е.П., Семерджиев Х.И. ОИЯИ, Р11-82-857, Дубна, 1982.
2. Ангелова Е.Д., Семерджиев Х.И. ЖВМ и МФ, 1982, т. 22, №1.
3. Семерджиев Х.И. ОИЯИ, Р5-12485, Дубна, 1979.
4. Макрелов И.В. Научн. труды Пловдивского ун-та. Математика, 1979, т. 17, №4.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 ноября 1983 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Жидков Е.П., Макрелов И.В., Семерджиев Х.И. P11-83-764

Два метода для одновременного нахождения всех корней экспоненциальных уравнений

Предложены два новых итерационных метода для одновременного нахождения всех нулей заданного экспоненциального полинома. Доказаны теоремы об их сходимости. У одного метода квадратическая, а у другого - кубическая сходимость. На ряде численных примеров показано преимущество новых методов перед методами Ньютона и Чебышева.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Zhidkov E.P., Makrelov I.V., Semerdzhiev Kh.I. P11-83-764

Two Methods for a Simultaneous Search for All Roots of Exponential Equations

Two new iterational methods for a simultaneous search for all zeros of a given exponential polynomial are presented. The convergence theorems are proved. One method has a quadratic convergence, and the other a cubic one. Several numerical examples show the advantage of the new methods over Newton's and Chebyshev's methods.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой