сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-83-763

Е.П.Жидков, Х.И.Семерджиев

ПЯТИШАГОВЫЕ МЕТОДЫ ТИПА МЕТОДА АДАМСА, ОСНОВАННЫЕ НА ИНТЕРПОЛЯЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ, ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ ПОЛИНОМАМИ

1983

Хорошо известно, что разностные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \qquad /1/$$

очевидным образом распространяются и на системы обыкновенных дифференциальных уравнений, записанные в нормальной форме. Поэтому для решения задачи /1/ создано множество различных приближенных методов. В большинстве из них повышение точности приближенного решения задачи /1/ получается за счет уменьшения шага интегрирования [/1-5/]. Однако точность можно увеличить, не слишком уменьшая шаг интегрирования, а подходящим образом учитывая поведение функции $f(x,y(x))$ в окрестности точки x, в которой ведется поиск решения задачи /1/.

Классический метод Адамса [/2-5/] дает хорошие приближения, если правая часть /1/ хорошо аппроксимируется алгебраическими интерполяционными полиномами. Для краткости назовем этот метод А - методом Адамса. В случаях, когда правая часть дифференциального уравнения /1/ хорошо аппроксимируется тригонометрическими или экспоненциальными интерполяционными полиномами, лучше всего воспользоваться методами типа метода Адамса /Т -методом или Э-методом/, которые дают более точные приближенные решения в этих случаях. Но поведение функции $f(x,y(x))$ часто заранее неизвестно, так как оно зависит не только от $f(x,y)$, но и от неизвестного решения $y(x)$. Поэтому более эффективными будут такие методы, которые автоматически учитывают поведение правой части $f(x,y(x))$. Оказывается, что можно построить такие методы, являющиеся комбинациями А-, Т- и Э-методов Адамса, при которых каждый шаг интегрирования производится по одному из трех указанных методов /алгоритм АТЭ-1/ или по "выпуклой" комбинации этих методов /алгоритм АТЭ-2/ в зависимости от точности аппроксимации правой части /1/ интерполяционными полиномами алгебраического, тригонометрического и экспоненциального типа. В [/6/] на основе указанных выше интерполяционных полиномов, записанных в ньютоновской форме [/7/], получены трехшаговые методы типа метода Адамса и описан алгоритм АТЭ. Для дальнейшего развития нашей идеи [/6/] о комбинированном использовании А-, Т- и Э-методов в этой работе будут даны пятишаговые А-, Т- и Э-методы экстраполяционного и интерполяционного вида для интегрирования уравнения /1/ с погрешностью на каждом шаге $O(h^6)$.

Итак, пусть решение $y(x)$ задачи /1/ ищется в равноотстоящих точках x_i, $i = 1,2,\ldots$, и пусть расстояние между каждыми двумя соседними точками равно $2h$. Обозначим $y(x_i)$ и $y'(x_i)$ соответственно через y_i и y'_i, $i = 0,1,2\ldots$. При условии, что известны значения $y_{i-4},\ldots, y_i$, которые могут быть найдены с помощью некоторого одношагового метода, например метода Рунге-Кутта, следующее значение y_{i+1} может быть получено [5] на основе экстраполяционного А-метода Адамса:

$$y_{i+1} = y_i + h(A_1 y'_i - A_2 y'_{i-1} + A_3 y'_{i-2} - A_4 y'_{i-3} + A_5 y'_{i-4}) + O(h^6), \qquad /2/$$

либо интерполяционного А-метода Адамса:

$$y_{i+1} = y_i + h(\bar{A}_1 y'_{i+1} + \bar{A}_2 y'_i - \bar{A}_3 y'_{i-1} + \bar{A}_4 y'_{i-2} - \bar{A}_5 y'_{i-3}) + O(h^6), \qquad /3/$$

где $A_i = A^*_i/360$, $\bar{A}_i = \bar{A}^*_i/360$, $i = 1,2,\ldots,5$, а коэффициенты A^*_i и $\bar{A}^*_i$ заданы в табл.1.

Таблица 1

i	A^*_i	$\bar{A}^*_i$
I	I90I	25I
2	2774	646
3	26I6	264
4	I274	I06
5	25I	I9

Формулы /2/ и /3/ получены путем аппроксимации правой части /1/ $f(x,y(x))$ алгебраическими интерполяционными полиномами четвертого порядка по узлам $(x_{i-4},\ldots,x_i)$ и $(x_{i-3},\ldots,x_{i+1})$ соответственно, а интегрирование обеих частей /1/ производится в промежутке $[x_i, x_{i+1}]$. Если правую часть /1/ аппроксимировать по этим узлам тригонометрическим или экспоненциальным интерполяционным полиномом второго порядка, получим соответственно Т- и Э-методы Адамса. Примечательно, что пятишаговые методы, в отличие от трехшаговых, обладают следующим свойством: Т- и Э-формулы совершенно аналогичны - для получения Э-формул надо в Т-формулах заменить тригонометрические функции на соответствующие гиперболические. Этот факт облегчает и процесс про-

граммирования для ЭВМ. Поэтому ниже более подробно выведем и выпишем только коэффициенты для Т-формул.

Для однообразия выкладов воспользуемся интерполяционными Т- и Э-полиномами, записанными в лагранжевой форме. Для равноотстоящих точек $x_{i-4},\ldots,x_i$ с шагом $2h$ формула для Т-полинома, интерполирующего функцию $y'(x)$, принимает вид

$$T_2(x_i + 2h; y') = \sum_{k=i-4}^{i} y'_k \prod_{\substack{j=i-4\\ j\neq k}}^{i} \frac{\sin(i-j+q)h}{\sin(k-j)h}, \qquad /4/$$

где положено $q = (x - x_i)/2h$. Тогда, заменяя правую часть /1/ $f(x,y(x))$ на $T_2(x;y')$, интегрируя потом обе части /1/ в промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ и учитывая выражения /4/, получим

$$y_{i+1} = y_i + 2h[I(3,2,1,0)/P\,y'_{i-4} - I(4,2,1,0)/Q\,y'_{i-3} + I(4,3,1,0)/R\,y'_{i-2} - I(4,3,2,0)/Q\,y'_{i-1} + I(4,3,2,1)/P\,y'_i], \qquad /5/$$

где

$$I(n,m,\ell,k) = \int_0^1 \phi(q)\,dq, \qquad /6/$$

$$\phi(q) = \sin(n+q)h \sin(m+q)h \sin(\ell+q)h \sin(k+q)h.$$
$$P = \sin h \sin 2h \sin 3h \sin 4h, \quad Q = \sin^2 h \sin 2h \sin 3h, \quad R = \sin^2 h \sin^2 2h. \qquad /7/$$

После вычисления /6/ находим

$$8I(n,m,\ell,k) = \cos(n-m+\ell-k)h + \cos(n-m-\ell+k)h + \cos(n+m-\ell-k)h - \frac{1}{2h}[\sin(n+m+\ell-k+2)h - \sin(n+m+\ell-k)h + \sin(n+m-\ell+k+2)h - \sin(n+m-\ell+k)h + \sin(n-m+\ell+k+2)h - \sin(n-m+\ell+k)h - \sin(n-m-\ell-k-2)h + \sin(n-m-\ell-k)h] + \frac{1}{4h}[\sin(n+m+\ell+k+4)h - \sin(n+m+\ell+k)h]. \qquad /8/$$

Таким образом, используя /8/ и вычисляя в /5/ нужные интегралы, получим экстраполяционную Т-формулу Адамса:

$$y_{i+1} = y_i + h(T_1 y'_i - T_2 y'_{i-1} + T_3 y'_{i-2} - T_4 y'_{i-3} + T_5 y'_{i-4}) + O(h^6), \qquad /9/$$

где

$$T_1 = (S - 3\sin 10h + 2\sin 2h + \sin 14h)/16hP,$$

$$T_2 = (V - 2(\sin 11h + \sin 7h - \sin h) + \sin 13h + \sin 9h)/16hQ,$$

$$T_3 = (W - 2(\sin 10h - \sin 6h + \sin 4h) + \sin 12h - \sin 8h)/16hR,$$

$$T_4 = (V - 2(\sin 9h - \sin 3h + 2\sin h) + \sin 11h - \sin 7h)/16hQ,$$

$$T_5 = (S - 2\sin 8h + \sin 10h - \sin 6h)/16hP,$$

$$S = 4h(\cos 4h + \cos 2h + 1),\quad V = 4h(\cos 5h + \cos 3h + \cosh),\quad W = 4h(\cos 6h + \cos 2h + 1).$$

Аналогично для экстраполяционной Э-формулы Адамса имеем

$$y_{i+1} = y_i + h(E_1 y'_i - E_2 y'_{i-1} + E_3 y'_{i-2} - E_4 y'_{i-3} + E_5 y'_{i-4}) + O(h^6). \qquad /10/$$

Оценки погрешностей в /9/ и /10/ получаются на основе выражений [7] для оценок погрешностей интерполяционных Т- и Э- полиномов в предположении ограниченности $y^{VI}(x)$.

Теперь перейдем к построению пятишаговых методов Адамса интерполяционного типа. Для этой цели выразим интерполяционный Т-полином для функции $y'(x)$ по узлам $x_{i-3},\dots,x_i,x_{i+1}$ через $q=(x-x_{i+1})/2h$. Полученная формула для $T_2(x_{i+1}+2hq;y')$ имеет вид /4/, с той разницей, что везде в /4/ i надо заменить на $i+1$. После интегрирования обеих частей уравнений $y'(x) = T_2(x_{i+1}+2hq;y')$ в промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ получим

$$y_{i+1} = y_i + 2h[\bar I(3,2,1,0)/Py'_{i-3} - \bar I(4,2,1,0)/Qy'_{i-2} + \bar I(4,3,1,0)/Ry'_{i-1} - \bar I(4,3,2,0)/Qy'_i + \bar I(4,3,2,1)/Py'_{i+1}], \qquad /11/$$

где

$$\bar I(n,m,\ell,k) = \int_{-1}^{0} \phi(q)\,dq, \qquad /12/$$

$\phi(q)$, P, Q и R задаются выражениями /7/.

Интегрирование /12/ дает

$$8\bar I(n,m,\ell,k) = \cos(n-m+\ell-k)h + \cos(n-m-\ell+k)h + \cos(n+m-\ell-k)h - \frac{1}{2h}[\sin(n+m+\ell-k)h - \sin(n+m+\ell-k-2)h + \sin(n+m-\ell+k)h - \sin(n+m-\ell+k-2)h + \sin(n-m+\ell+k)h - \sin(n-m+\ell+k-2)h - \sin(n-m-\ell-k)h + \sin(n-m-\ell-k+2)h] + \frac{1}{4h}[\sin(n+m+\ell+k)h - \sin(n+m+\ell+k-4)h]. \qquad /13/$$

С учетом /13/ формула /11/ принимает вид

$$y_{i+1} = y_i + h(\bar T_1 y'_{i+1} + \bar T_2 y'_i - \bar T_3 y'_{i-1} + \bar T_4 y'_{i-2} - \bar T_5 y'_{i-3}) + O(h^6), \qquad /14/$$

где

$$\bar T_1 = (S - 2\sin 8h + \sin 10h - \sin 6h)/16hP,$$

$$\bar T_2 = -(V - \sin 9h + 2\sin 7h - 3\sin 5h - 2\sinh)/16hQ,$$

$$\bar T_3 = -(W - \sin 8h + \sin 4h - 4\sin 2h)/16hR,$$

$$\bar T_4 = -(V - \sin 7h - 3\sin 3h + 4\sinh)/16hQ,$$

$$\bar T_5 = -(S - \sin 6h - 3\sin 2h)/16hP.$$

Аналогично интерполяционная Э-формула Адамса имеет вид

$$y_{i+1} = y_i + h(\bar E_1 y'_{i+1} + \bar E_2 y'_i - \bar E_3 y'_{i-1} + \bar E_4 y'_{i-2} - \bar E_5 y'_{i-3}) + O(h^6). \qquad /15/$$

Формулы /2/, /9/ и /10/ используются для прогноза приближенного решения задачи /1/, а формулы /3/, /14/ и /15/ соответственно - для его коррекции.

<u>Алгоритм АТЭ-1.</u> Пусть известны значения $y_{i-5},\dots,y_i$ и надо найти y_{i+1}. Для этой цели предлагается использовать следующий алгоритм для комбинированного применения А-, Т- и Э-формул /2/, /9/ и /10/:

1. По точкам $x_{i-5},\dots,x_{i-1}$ для функций $y'(x)=f(x,y(x))$ строятся интерполяционные А-полином $(A_4(x;y'))$, Т-полином $(T_2(x;y'))$ и Э-полином $(E_2(x;y'))$.
2. Вычисляются величины

$$A_4(x_i;y') = 5[y'_{i-1} - y'_{i-4} + 2(y'_{i-3} - y'_{i-2})] + y'_{i-5},$$

$$T_2(x_i;y') = \frac{\sin 5h}{\sinh}[y'_{i-1} - y'_{i-4} + \frac{\sin 4h}{\sin 2h}(y'_{i-3} - y'_{i-2})] + y'_{i-5},$$

$$E_2(x_i;y') = \frac{\mathrm{sh}\,5h}{\mathrm{sh}\,h}[y'_{i-1} - y'_{i-4} + \frac{\mathrm{sh}\,4h}{\mathrm{sh}\,h}(y'_{i-3} - y'_{i-2})] + y'_{i-5},$$

$$\alpha = A_4(x_i;y') - y'_i;\quad \tau = T_2(x_i;y') - y'_i;\quad \epsilon = E_2(x_i;y') - y'_i.$$

3. Находится $\mu = \min(|\alpha|,|\tau|,|\epsilon|)$.
4. Если $\mu = |\alpha|$, то y_{i+1} вычисляется А-методом /2/.
5. Если $\mu = |\tau|$, то y_{i+1} вычисляется Т-методом /9/.
6. Если $\mu = |\epsilon|$, то y_{i+1} вычисляется Э-методом /10/.

Алгоритм АТЭ-2. Можно предложить и алгоритм АТЭ-2, который является усовершенствованием алгоритма АТЭ-1. Если умножить обе части формул /2/, /9/ и /10/ соответственно на $z_\alpha \geq 0$, $z_\tau \geq 0$ и $z_\epsilon \geq 0$, где $z_\alpha + z_\tau + z_\epsilon = 1$, и сложить полученные равенства, найдем "выпуклый" класс формул:

$$y_{i+1} = y_i + h[(z_\alpha A_1 + z_\tau T_1 + z_\epsilon E_1) y'_i - (z_\alpha A_2 + z_\tau T_2 + z_\epsilon E_2) y'_{i-1} + (z_\alpha A_3 + z_\tau T_3 + z_\epsilon E_3) y'_{i-2} - (z_\alpha A_4 + z_\tau T_4 + z_\epsilon E_4) y'_{i-3} + (z_\alpha A_5 + z_\tau T_5 + z_\epsilon E_5) y'_{i-4} + O(h^6). \qquad /16/$$

На каждом шаге интегрирования расчетные значения z^*_α, z^*_τ и z^*_ϵ определяются из условия минимума "погрешности" аппроксимации правой части /1/:

$$L(z^*_\alpha, z^*_\tau, z^*_\epsilon) = \inf_{\substack{z_\alpha \geq 0,\ z_\tau \geq 0,\ z_\epsilon \geq 0 \\ z_\alpha + z_\tau + z_\epsilon = 1}} L(z_\alpha, z_\tau, z_\epsilon), \qquad /17/$$

где $L(z_\alpha, z_\tau, z_\epsilon) = |\alpha z_\alpha + \tau z_\tau + \epsilon z_\epsilon|$.

Задача /17/ является задачей линейного программирования и сводится к следующей двумерной задаче: минимизировать целевую функцию $L(x_1, x_2) = |(\alpha - \epsilon) x_1 + (\tau - \epsilon) x_2 + \epsilon|$ при ограничениях $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ и $x_1 + x_2 = 1$. Последняя задача решается точно, и величины $x_1 = z^*_\alpha$, $x_2 = z^*_\tau$ и $x_3 = z^*_\epsilon$ определяются согласно следующей схеме:

Условие	$x_1 = z^*_\alpha$	$x_2 = z^*_\tau$	$x_3 = z^*_\epsilon$
$\tau\epsilon < 0$ — да	0	$\epsilon/(\epsilon - \tau)$	$-\tau/(\epsilon - \tau)$
нет; $\alpha\epsilon < 0$ — да	$\epsilon/(\epsilon - \alpha)$	0	$-\alpha/(\epsilon - \alpha)$
нет; $\alpha\tau < 0$ — да	$\tau/(\tau - \alpha)$	$-\alpha/(\tau - \alpha)$	0
нет	Выполнить алгоритм АТЭ-1 начиная с пункта 3		

Приведем несколько численных примеров, иллюстрирующих А-, Т- и Э-методы, а также эффективность алгоритмов АТЭ-1 и АТЭ-2.

Все примеры рассчитаны на ЭВМ CDC-6500 или ЕС-1020 с точностью 15 десятичных знаков. В качестве первых шести значений решения брались соответствующие точные значения. Во всех таблицах данной работы даны абсолютные погрешности приближенных решений при различных значениях аргумента x. При этом введена экономная запись: .71-14 означает $0{,}71 \cdot 10^{-14}$.

Пример 1. Решается дифференциальная задача

$$y' = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1, \quad y(0) = 1, \quad 2h = 0{,}05,$$

которая имеет очевидное точное решение:

$$y_T(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Численный расчет иллюстрируется в табл.2. В этом примере результаты применения А-метода и алгоритма АТЭ-1 полностью совпадают. Надо отметить, что точное решение быстро возрастает и уже $y_T/50/ \approx 0{,}32 \cdot 10^9$.

Таблица 2

x	А	Т	Э
0.3	.7I-I4	.I2-5	.II-5
0.4	.7I-I4	.42-5	.36-5
I	0	.37-4	.29-4
2	.9I-I2	.I7-3	.88-4
3	.9I-II	.49-3	.95-4
4	.73-II	.II-2	.79-4
5	.64-09	.22-2	.6I-3
I0	.68-07	.25-I	.I8-I
20	.24-05	.37+0	.32+0
30	.I6-04	.I8+I	.I6+I
40	.60-04	.60+I	.5I+I
50	.I5-03	.I5+2	.I2+2

Пример 2. $y' = \cos x - \sin x + 2\cos 2x - 2\sin 2x$, $y(0) = 3$, $2h = 0{,}05$. Численное решение этой задачи отражено в табл.3. Здесь полностью совпадают результаты применения Т-метода и алгоритма АТЭ-1.

Таблица 3

x	А	Т	Э
0.3	.46-6	.62-9	.II-5
0.4	.I3-5	.I5-8	.35-5
I	.62-5	.I4-8	.I6-4
2	.30-5	.I9-7	.9I-5
3	.20-5	.I6-7	.35-5
4	.53-5	.I7-7	.I4-4
5	.40-5	.27-7	.98-5
I0	.30-5	.I4-7	.86-5
20	.68-5	.4I-8	.I8-4
30	.5I-5	.27-7	.I2-4
40	.3I-6	.2I-7	.25-5
50	.25-5	.II-7	.66-5

Пример 3. $y' = e^{x} - e^{-x} + 2e^{2x} - 2e^{-2x}$, $y(0) = 5$, $2h = 0{,}05$. Численный расчет приведен в табл.4. В этом примере полностью совпадают результаты применения Э-метода и алгоритма АТЭ-1. Необходимо также отметить, что точное решение $y_T(x)$ в этом случае очень быстро возрастает и, например, $y_T/50/ \approx 0{,}26 \cdot 10^{44}$.

Таблица 4

x	А	Т	Э
0.3	.7I-06	.I8-05	.96-II
0.4	.22-05	.58-05	.75-I0
I	.I7-04	.45-04	.40-08
2	.I5-03	.37-03	.45-07
3	.II-02	.27-02	.33-06
4	.80-02	.20-0I	.23-05
5	.59-0I	.I5+00	.I7-04
I0	.I3+04	.33+04	.37+00
20	.63+I2	.I6+I3	.I8+09
30	.3I+2I	.77+2I	.88+I7
40	.I5+30	.27+30	.43+26
50	.72+38	.I8+39	.2I+35

Пример 4. $y' = \cos((x-y)/2) - \cos((x+y)/2)$, $y(0) = \pi$, $2h = 0{,}1$. Точным решением этой задачи является функция

$$y_T(x) = 4 \operatorname{arctg}(\exp(2 - 2\cos(x/2))).$$

Здесь алгоритм АТЭ-1 выбирал для расчетов формулы /2/, /9/ и /10/ соответственно 229, 470 и 301 раз. Некоторые результаты приведены в табл.5.

Таблица 5

x	А	Т	Э	АТЭ-I
0.6	.89-6	.36-6	.I2-5	.36-6
0.8	.I8-5	.96-6	.49-5	.96-6
I	.85-6	.85-6	.II-4	.85-6
2	.II-4	.76-5	.33-4	.67-5
3	.53-5	.25-5	.I4-4	.I4-5
4	.I5-5	.I5-5	.63-5	.I0-5
5	.I2-5	.24-5	.I9-5	.74-6
I0	.I4-4	.I0-3	.73-5	.34-6
20	.II-5	.I9-4	.32-5	.24-6
30	.3I-5	.28-4	.65-5	.52-7
40	.68-4	.89-3	.I5-3	.50-5
50	.8I-5	.96-4	.I8-4	.I8-7

Пример 5. Для сравнения алгоритмов АТЭ-1 и АТЭ-2 было проинтегрировано уравнение на примере 4 с шагом $2h = 0{,}05$. Абсолютные погрешности приближенных решений приведены в табл.6.

Таблица 6

x	0.3	0.4	0.5	0.6	I0	20	30	40	50
АТЭ-I	.52-8	.I6-7	.28-7	.39-7	.40-6	.77-7	.I4-6	.I6-5	.37-5
АТЭ-2	.28-9	.II-8	.24-8	.43-8	.30-6	.75-7	.I3-6	.I3-5	.33-5

В заключение отметим, что все условия сходимости и устойчивости разработанных в данном исследовании методов остаются такими же, как для А-методов [5], так как имеют место следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{h\to 0} T_i &= \lim_{h\to 0} E_i = A_i \\ \lim_{h\to 0} \bar{T}_i &= \lim_{h\to 0} \bar{E}_i = \bar{A}_i \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, \ldots, 5.$$

Авторы выражают благодарность Б.Н.Хоромскому за обсуждение алгоритма АТЭ-2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. "Наука", М., 1971.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Физматгиз, М., 1959, т.2.
3. Сендов Бл., Попов В. Числени методи. "Наука и изкуство", София, 1978, ч.2.
4. Бахвалов Н.С. Численные методы. "Наука", М., 1973, т.1.
5. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы высшей математики. "Вышэйшая школа", Минск, 1975, т.2.
6. Жидков Е.П., Семерджиев Х.И. ОИЯИ, Р11-82-857, Дубна, 1982.
7. Семерджиев Х.И. ОИЯИ, Р11-82-856, Дубна, 1982.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 ноября 1983 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Жидков Е.П., Семерджиев Х.И. Р11-83-763

Пятишаговые методы типа метода Адамса, основанные на интерполяции алгебраическими, тригонометрическими и экспоненциальными полиномами

На основе тригонометрических и экспоненциальных интерполяционных полиномов разработаны пятишаговые методы экстраполяционного типа, аналогичные методу Адамса. Предложены два алгоритма для комбинированного применения методов Адамса, основанных на интерполяции алгебраическими, тригонометрическими и экспоненциальными полиномами. Эффективность применения этих алгоритмов показана на численных примерах.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Zhidkov E.P., Semerdzhiev Kh.I. P11-83-763

Five-Step Methods of Adams Type Based on an Interpolation with Algebraic, Trigonometrical and Exponential Polynomials

Basing on the trigonometrical and exponential interpolating polynomials the methods of Adams type are developed. Two new algorithms for the combining application of the Adams methods due to the interpolation with algebraic, trigonometrical and exponential polynomials are proposed. The efficiency of these algorithms are shown on numerical examples.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой