

сообщения
Объединенного
института
ядерных
исследований
Дубна

275/84

P11-83-724

М.С.Касчиев, В.В.Парамонов,* И.В.Пузынин

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ
В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

* ИЯИ АН СССР, г.Троицк

1983

ВВЕДЕНИЕ

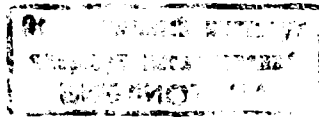
При решении ряда физических задач, например при исследовании взаимодействия пучка заряженных частиц с периодической ускоряющей структурой, необходимо знать дисперсионную характеристику /ДХ/ структуры и распределения полей при всех видах колебаний. Напомним, что под ДХ периодической структуры понимается зависимость частоты колебаний f от сдвига фазы поля ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi$) на периоде структуры /или вида колебаний/.

Расчет ДХ осесимметричной структуры с небольшим числом периодов N в случае колебаний без вариации по азимуту может быть выполнен с помощью пакета MULTIMODE^{1,2/} или других существующих программ, например описанных в работах^{3,4/}. Но для вычисления ДХ в точках $\phi_k = k \frac{\pi}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N$, необходимо рассматривать одновременно $\frac{N}{2}$ или $[\frac{N}{2}] + \frac{1}{2}$ периодов, в зависимости от четности N , так как периодичность структуры не учитывается. При этом резко возрастает объем требуемой памяти ЭВМ и время счета, ухудшается точность вычисления частот и электромагнитных полей. Ускоряющие структуры существующих и разрабатываемых ускорителей содержат большое число периодов, что делает неэффективным применение указанных программ. Кроме того, при исследовании дисперсионных структур важно подробно /с малым шагом/ исследовать поведение ДХ в окрестности характерных точек /точки разрыва, рабочая точка и т.д./.

Ввиду этого большой интерес вызывает изучение задачи вычисления ДХ для любого ϕ , в которой учитывается периодичность структуры и электромагнитных полей, и рассматривается только один период структуры. Постановка этой задачи и ее численное решение являются целью данной работы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим колебания без вариаций по азимуту в осесимметричной периодической структуре. Хорошо известно, см.^{5/}, что все колебания в этом случае разделяются на два класса: E - волны с компонентами H_ϕ , E_r , E_z и H -волны с компонентами E_ϕ , H_r , H_z . Для решения задачи достаточно рассматривать только азимутальные компоненты поля H_ϕ или E_ϕ . Полное поле однозначно восстанавливается по этим компонентам с использованием уравнений Максвелла.



Азимутальные компоненты удовлетворяют уравнению

$$\Delta \Phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \Phi = \lambda \Phi, \quad /1/$$

где $\lambda = (\omega/c)^2$, c - скорость света,

$$\Phi = \begin{cases} H_\phi & \text{для E-волн,} \\ E_\phi & \text{для H-волн.} \end{cases}$$

Граничные условия на оси $r = 0$ и на металлической поверхности Γ имеют вид

$$\Phi(0, z) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \text{ для } H_\phi, \quad \Phi \Big|_{\Gamma} = 0 \text{ для } E_\phi. \quad /2/$$

Для постановки граничных условий на торцовых плоскостях $\Gamma_1 = \{(r, z), z = 0\}$ и $\Gamma_2 = \{(r, z), z = D\}$, где D - длина периода, рассмотрим поле в структуре с симметричным относительно середины периодом. Начало координат помещено в начале периода.

Решение уравнения /1/ будем искать /8/ в виде бегущей волны

$$\Phi(r, z, t) = \dot{\Phi}(r, z) \exp[i(\omega t + k_{z_0} z)] \quad /3/$$

с учетом теоремы Флоке, согласно которой в бесконечной структуре

$$\dot{\Phi}(r, z + D) = \dot{\Phi}(r, z) \exp(i\phi), \quad /4/$$

где $\phi = k_{z_0} D$ - сдвиг фазы поля на период.

Временную зависимость $\exp(i\omega t)$ в дальнейшем будем опускать.

Разлагая $\dot{\Phi}(r, z)$ в ряд Фурье по периоду D и рассматривая только бегущие влево ($n \geq 0$) волны, получим /5/

$$\dot{\Phi}(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r) \exp(i2\pi n z/D), \quad /5/$$

c_n - коэффициенты разложения в ряд Фурье. Комплексная амплитуда $\dot{\Phi} = \dot{\Phi}(r, z) \exp(ik_0 z)$ удовлетворяет теореме Флоке. Такое представление поля хорошо известно в теории периодических структур.

Из условий симметрии относительно начала координат следует, что $\dot{\Phi}$ должно удовлетворять следующим условиям:

$$\text{либо } \dot{\Phi}(r, z) = \dot{\Phi}^*(r, -z), \quad /6/$$

$$\text{либо } \dot{\Phi}(r, z) = -\dot{\Phi}^*(r, -z).$$

Представляя $\dot{\Phi}(r, z)$ в виде

$$\dot{\Phi}(r, z) = u(r, z) + iv(r, z), \quad /7/$$

получим из /6/ следующие условия для $u(r, z)$ и $v(r, z)$ на Γ_1 :

$$\text{либо } \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad v \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad /7/$$

$$\text{либо } u \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial u} \Big|_{\Gamma_1} = 0.$$

В дальнейшем будем рассматривать первый случай. Граничные условия на Γ_2 поставим, используя теорему Флоке: $\dot{\Phi}(r, D) = \dot{\Phi}(r, 0) \exp(i\phi)$, или учитывая /7/ и /9/: $u(r, D) = u(r, 0) \cos \phi$, $v(r, D) = u(r, 0) \sin \phi$. Таким образом, необходимо найти собственные числа и соответствующие собственные функции системы дифференциальных уравнений

$$\Delta u = \lambda u, \quad \Delta v = \lambda v \quad /8/$$

с граничными условиями

$$u(0, z) = 0, \quad v(0, z) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad \text{- для E-волн,} \quad /9/$$

$$u \Big|_{\Gamma} = 0, \quad v \Big|_{\Gamma} = 0 \quad \text{- для H-волн,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad v \Big|_{\Gamma_1} = 0,$$

$$u \Big|_{\Gamma_2} = u \Big|_{\Gamma_1} \cos \phi, \quad v \Big|_{\Gamma_2} = v \Big|_{\Gamma_1} \sin \phi.$$

Отметим, что интерес представляют такие решения задачи /8/-/9/, для которых $\phi \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi$. Если $\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$, в системе /8/ уравнения не связаны. В этом случае гораздо удобнее использовать программу MULTIMODE для вычисления спектра задач

$$\Delta u = \lambda u, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 0 \quad \text{либо}$$

$$\Delta v = \lambda v, \quad v \Big|_{\Gamma_1} = v \Big|_{\Gamma_2} = 0.$$

2. МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Для согласования дальнейших выкладок с работой /1/ в уравнениях /8/ сделаем замену $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$. Функционал Релея-Ритца задачи /8/-/9/ имеет вид

$$R(\bar{u}, \bar{v}) = \iint_{\Omega} r^{-1} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] dr dz / \iint_{\Omega} r^{-1} (u^2 + v^2) dr dz.$$

Стационарные точки этого функционала необходимо искать при условиях /9/. Разностная схема выводится методом конечных элементов. В работе использованы восьмиточечные биквадратичные изопараметрические элементы на четырехугольниках. Преимущества такой дискретизации по сравнению с другими разностными методами были рассмотрены в работах /1,2/, поэтому здесь этот вопрос не обсуждается. После дискретизации приходим к решению обобщенной алгебраической задачи на собственные значения:

$$Kw = \lambda Mw, \quad /11/$$

где K и M - симметричные положительные ленточные матрицы порядка $2n$, n - число узлов в области Ω ,

$$u^T = (u, v) = (u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n) -$$

приближенные значения собственных функций u, v в узлах сетки. Отметим, что условия Дирихле учитываются путем выбрасывания соответствующих столбцов и строк из матриц K и M . Последнее из условий /9/ учитывается путем введения штрафного члена. Решение задачи /11/ находится методом итераций подпространств.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве примера рассмотрена периодическая ускоряющая структура с проводящими шайбами и диафрагмами. Эта структура исследована подробно в работе /2/. В табл.1 приведены ДХ структуры, вычисленные в /2/. Расчеты выполнены с использованием 3 периодов структуры. В табл.2 представлены результаты, полученные в настоящей работе путем решения задачи /8/-/9/. Из сравнения наших результатов с результатами /2/ видно, что значения частот в пределах расчетной точности полностью совпадают. Следует отметить, что среди вычисленных частот, представленных в табл.2, присутствуют не зависящие от ϕ . Численное значение этих частот совпадает со значением частоты одной из граничных точек $\phi = \pi$ полосы пропускания структуры. Природа этих решений исследуется. В таблицах также приведены времена счета при использовании ЭВМ ЕС-1060 ОИЯИ. Скорость света $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с. Разностная сетка показана на рисунке.

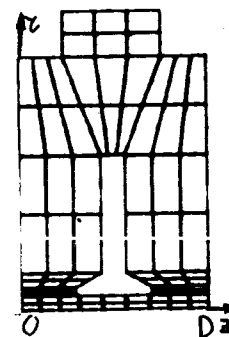
Таблица 1

$f_0^{(1)}$	$f_{\pi/3}^{(1)}$	$f_{2\pi/3}^{(1)}$	$f_{\pi}^{(3)}$	$f_{2\pi/3}^{(3)}$	$f_0^{(3)}$	$f_{\pi/3}^{(3)}$	t
1166,87	1361,32	1802,82	2361,37	2612,06	2672,71	2676,72	9'

Таблица 2

ϕ	$f_{\phi}^{(1)}$	$f_{\phi}^{(2)}$	$f_{\phi}^{(3)}$	$f_{\phi}^{(4)}$	t
0	1166,867	2222,494	2672,714	3483,733	6'25''
$\frac{\pi}{3}$	1361,32	2222,494	2676,723	3483,733	7'11''
$\frac{2\pi}{3}$	1802,818	2222,494	2612,065	3483,733	7'20''
π	2222,494	2222,494	2361,37	3455,876	6'

ЗАКЛЮЧЕНИЕ



В работе сформулирована постановка задачи о вычислении собственных частот и электромагнитных полей периодической структуры. В нашем подходе учитываются как периодичность полей, так и периодичность структуры. Предложен метод численного решения полученной спектральной задачи. Все вычисления проводятся только на одном периоде структуры. Это позволяет вычислять ДХ структуры, содержащей произвольное число периодов, что принципиально невозможно в рамках известных ранее методов решения этой задачи.

ПРИМЕЧАНИЕ 1

Предложенный метод реализован в виде программ на языке ФОРТРАН-IV и включен в систему MULTIMODE в виде отдельного модуля. Коротко опишем работу новой версии системы. В дальнейшем будем использовать обозначения из работы /2/. Метод задания области, приемы генерации сетки и правила оптимизации узлов не меняются. Отметим только, что стороны суперэлементов, лежащих на границах Γ_1 и Γ_2 , должны иметь граничный код 0. В файл IMname добавлены еще две переменные: IPER и FI. Смысл этих переменных следующий: если IPER = 0, то система работает в обычном варианте, при IPER = 1 рассматривается периодический вариант. В этом последнем случае FI = ϕ , где через ϕ задается значение сдвига фазы в градусах. При многократном вычислении, т.е. для разных значений ϕ , в целях экономии машинного времени необходимо после первого запуска системы обращаться к ней следующим образом:

//JOBNAME JOB....

// EXEC MMODE, NAME=name, M2=, M3=, RM=n.

//

ПРИМЕЧАНИЕ 2

В ходе подготовки к печати данной работы авторам стало известно о существовании работы^{7/}, в которой рассматривалась аналогичная задача. Отметим, что отличие нашего подхода от подхода^{7/} заключается в постановке граничных условий на торцовых плоскостях Γ_1 и Γ_2 . Кроме этого, в указанной работе не приведены численные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Касчиева В.А. и др. Препринт ИФВЭ, 82-92, Серпухов, 1982.
2. Касчиев М.С. и др. ОИЯИ, P11-83-146, Дубна, 1983.
3. Halbach K., Holsinger R.F. Part. Accel., 1976, 7, p.213-222.
4. Абрамов А.Г. и др. Препринт ИФВЭ, 83-3, Серпухов, 1983.
5. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн, "Наука", М., 1973.
6. Вальднер О.А. и др. Справочник по диафрагмированным волноводам, Атомиздат, М., 1977.
7. Bell M., Döhle G. CERN 73-1, Geneva, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 октября 1983 года

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

D3-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
D13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
D1,2-12036	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
D1,2-12450	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
D1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
D11-80-13	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
D4-80-271	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
D4-80-385	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
D2-81-543	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
D10,11-81-622	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
D1,2-81-728	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
D17-81-758	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
D1,2-82-27	Труды I Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
P18-82-117	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
D2-82-568	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
D9-82-664	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
D3,4-82-704	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
D3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

**ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ**

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Касчиев М.С., Парамонов В.В., Пузынин И.В.
Вычисление электромагнитных полей в периодических структурах

P11-83-724

Сформулирована задача о вычислении собственных частот и электромагнитных полей в осесимметричной периодической структуре. В нашей постановке учитываются как периодичность структуры, так и периодичность полей. Предложен метод численного решения полученной спектральной задачи. Все расчеты проводятся только на одном периоде структуры. Это позволяет вычислять дисперсионные характеристики структуры, содержащей произвольное число периодов, что принципиально невозможно в рамках известных постановок и методов решения этой задачи.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Kaschiev M.S., Paramonov V.V., Puzynin I.V.
Calculation of Electromagnetic Fields in Periodical Structures

P11-83-724

The problem for calculating the eigenfrequencies and electromagnetic fields in axisymmetric periodical structures is formulated. Both the periodicity of structure and that of field are taken into account. A method for numerical solution of the obtained spectral problem is suggested. All calculations are made only on one section of structure. It permits to calculate all quantity characteristics of the structure containing an arbitrary number of periods, that was impossible in principle in earlier known formulations and methods for solution of this problem.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой