сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-83-596

Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА МЕТОДОМ НЕПОЛНОГО ОБРАЩЕНИЯ

1983

Для широкого класса интегральных и интегродифференциальных уравнений ядра интегральных операторов зависят лишь от разности аргументов либо во всей области их изменения, либо в некоторой ее части. Поэтому в соответствующей подобласти интегральные операторы могут быть легко обратимы, т.к. матрицы, возникающие после дискретизации уравнений, имеют блочно-теплицевую структуру. В связи с этим представляют интерес итерационные методы, связанные с частичным обращением интегральных операторов на подобластях, соответствующих теплицевым блокам.

В настоящей работе такие методы применяются для решения граничных интегральных уравнений /ГИУ/, связанных с оператором Лапласа в случае двух и трех пространственных переменных, а также для решения интегродифференциального уравнения.

Рассмотрим итерационный процесс

$$B\frac{x_{n+1}-x_n}{\tau} = -(Ax_n - f) \qquad /0.1/$$

решения операторного уравнения

$$Ax = f, \quad A: X \to Y, \qquad /0.2/$$

где A - линейный, ограниченный оператор; X, Y - нормированные пространства. При построении процесса /0.1/ следует минимизировать спектральный радиус $\rho(T)$ оператора перехода $T = E - \tau B^{-1}A$ в классе легко обратимых операторов B. Возможность такой минимизации следует из того, что $\rho(T) = 0$ при $B = A$, $\tau = 1$. Многочисленные приемы выбора оператора B рассмотрены, например, в[1,9], причем наиболее эффективные методы имеются для самосопряженных операторов A.

Остановимся далее на специальном выборе оператора B, ориентированном в основном на решение интегральных /либо интегродифференциальных/ уравнений и связанном с обращением оператора A лишь в некоторой подобласти своей области определения. Для дифференциальных операторов такой подход используется в методе разделения областей.

Хорошо известным является прием, получивший название метода усреднения функциональных поправок /см.[2] и цитируемую там литературу/. Пусть $X = X_1 + X_2$ - прямая сумма подпространств, а $PX = X_1$ - проектирует X на X_1, тогда для решения уравнения

$$x = Ax + f \qquad /0.3/$$

можно использовать итерационный процесс

$$x_{n+1} = (A - V)\,x_n + f + Vx_{n+1}, \qquad V = AP,$$

или

$$x_{n+1} = (E - AP)^{-1} f + (E - AP)^{-1} A(E - P)\,x_n. \qquad /0.4/$$

Для уравнения /0.1/ соответственно имеем

$$B = Q - AP, \quad Q = E - P. \qquad /0.5/$$

Для решения интегральных уравнений в [2] используется проектор на какую-либо ортогональную систему функций, после чего обращение оператора $E - AP$ или $Q - AP$ сводится к решению линейной алгебраической системы общего вида, которое может быть весьма трудоемко.

В настоящей работе используется специальный вид проектора P, учитывающий структуру оператора A. Например, при выборе проектора для ГИУ, связанных с оператором Лапласа, используется тот факт, что после дискретизации граничных интегральных операторов блоки матрицы, соответствующие параллельным сторонам или граням, а также дугам окружностей или частям сферы, имеют теплицеву структуру [3,4]. Поэтому в качестве подмножества, определяющего проектор P, выбираются соответствующие части границы, после чего оператор $E-AP$ легко обратим. В итоге для таких областей, как прямоугольник, трапеция, круг, правильный многоугольник, параллелепипед, шар, и некоторых их комбинаций получаются экономичные "N^2-алгоритмы" решения ГИУ. Аналогично оптимизируются итерационные методы решения интегродифференциальных уравнений с ядрами, зависящими от разности аргументов.

§1. О СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССА /0.4/

В соответствии с выбором подпространств X_1 и X_2 представим оператор A в блочном виде: если $x = Px + Qx$, то

$$Ax = \begin{pmatrix} A_{PP} & A_{PQ} \\ A_{QP} & A_{QQ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Px \\ Qx \end{pmatrix} = \begin{matrix} A_{PP}Px + A_{PQ}Qx, \\ A_{QP}Px + A_{QQ}Qx \end{matrix} . \qquad /1.1/$$

Обозначая $Px = x_1$, $Qx = x_2$, итерации /0.4/ запишем в виде

$$x_1^{n+1} - A_{PP}x_1^{n+1} = Pf + A_{PQ}x^n,$$
$$x_2^{n+1} - A_{QP}x_1^{n+1} = Qf + A_{QQ}x_2^n.$$

Перейдем к уравнению для погрешности итераций /$f = 0$/ и рассмотрим оператор перехода

$$x_2^{n+1} = Gx_2^n, \quad G = A_{QQ} + A_{QP}(E - A_{PP})^{-1} A_{PQ}. \qquad /1.2/$$

который согласно /1.1/ определяется неявным выражением

$$\begin{pmatrix} u^n \\ x_2^{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u^n \\ x_2^n \end{pmatrix}, \quad u^n \in PX, \quad u^n = x_1^{n+1}, \qquad /1.3/$$

где u^n - вспомогательный вектор. Рассмотрим два типа норм: первая удовлетворяет свойству $\|x\|_1 = \|Px\|_1 + \|Qx\|_1$, а для второй $\|x\|_2 = \max(\|Px\|_2, \|Qx\|_2)$.

<u>Лемма 1</u>. Пусть $\|A\| = q < 1$, тогда $\|G\| \le q$.
Если X -гильбертово пространство, а $\{v_i\}$ - собственный ортонормированный базис оператора $A = A^*$, $Av_i = \lambda_i v_i$, $|\lambda_i| < 1$, то

$$\|Gv\|^2 = \|v\|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \frac{\lambda_i + 1}{\lambda_i - 1},$$

где

$$(0, v)^T = \sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i, \quad (0, v)^T \in QX. \qquad /1.4/$$

<u>Доказательство</u>. Для первой нормы имеем согласно /1.3/

$$\|u^n\| + \|x_2^{n+1}\| \le q(\|u^n\| + \|x_2^n\|),$$

$$\|x_2^{n+1}\| \le q\,\|x_2^n\| - (1 - q)\,\|u^n\| \le q\,\|x_2^n\|.$$

Для второй нормы рассмотрим два случая. 1/ $\|x_2^n\| \le \|u^n\|$, тогда

$$\max(\|x_2^{n+1}\|, \|u^n\|) \le q\,\|u^n\|,$$

откуда следует $\|u^n\| = 0$, $\|x_2^n\| = 0$. 2/ Если положить $\|u^n\| < \|x_2^n\|$, то $\max(\|x_2^{n+1}\|, \|u^n\|) \le q\,\|x_2^n\|$, а значит, $\|x_2^{n+1}\| \le q\,\|x_2^n\|$. Вторая часть леммы доказывается непосредственной подстановкой разложения /1.4/ в /1.3/. Лемма доказана.

Лемма 1 показывает, что итерации /0.4/ при достаточно общих предположениях сходятся не медленнее простых итераций.

Рассмотрим интегральное уравнение второго рода:

$$x(t) = \int_D K(s, t)\, x(s)\, ds + f(t); \qquad s,t \in D, \; D \in R^n. \qquad /1.5/$$

Пусть существует подобласть $D' \subset D$, такая, что оператор

$$E - \int_{D'} K(s,t)\,(\cdot)\,ds\,; \quad s,t \in D'$$

легко обратим. Тогда в итерациях /1.1/ можно положить

$$Px = \begin{cases} x(t), & t \in D', \\ 0, & t \notin D' \end{cases}.$$

Если в левой части /1.5/ имеется дифференциальное выражение Lx, то итерации /1.1/ связаны с обращением оператора

$$L - \int_{D'} K(s,t)\,(\cdot)\,ds\,; \quad s,t \in D'. \qquad /1.6/$$

Рассмотрим ГИУ, связанные с решением краевых задач для оператора Лапласа.

§2. ПОСТРОЕНИЕ ИТЕРАЦИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ НЕЙМАНА И ДИРИХЛЕ. СХОДИМОСТЬ

Напомним, что для гармонической функции $u(x)$ в области $\Omega \in R^n$, $n = 2,3$, с границей Γ, являющейся кривой Ляпунова, имеет место ГИУ

$$(E + \alpha K)u(s) - \alpha L v(s) = 0, \quad s \in \Gamma, \qquad /2.1/$$

где $v(s)$ - значение нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ по внутренней нормали на границе Γ. Внутренней задаче соответствует $\alpha = -1$, а внешней - $\alpha = 1$. Интегральные операторы K и L определены на контуре /поверхности/ Γ известными формулами [5]. Рассмотрим внутреннюю и внешнюю задачи Неймана, которые согласно /2.1/ сводятся к ГИУ второго рода:

$$(E + \alpha K)\,u = \alpha L v_0 \equiv f(s), \quad s \in \Gamma. \qquad /2.2/$$

Решение задачи Дирихле можно искать в виде потенциала двойного слоя, что приводит к ГИУ вида /2.2/, но только с оператором K^*, а все дальнейшие построения аналогичны. Непосредственное определение $v(s) = \frac{\partial u}{\partial n}$ приводит к ГИУ первого рода:

$$Lv = (\alpha E + K)\,u_0(s) \equiv f(s), \quad s \in \Gamma, \qquad /2.3/$$

которое рассмотрим позднее.

Аналогично случаю $n = 2$, изученному в [6], приведем условия существования и единственности решения уравнения /2.2/ при $n = 3$.

Лемма 2. Для всякой $v_0(s) \in L_2(\Gamma)$, такой, что $(v_0, 1) = 0$, уравнение /2.1/ при $\alpha = -1$ имеет единственное решение $u(s) \in C(\Gamma)$, удовлетворяющее условию $(u, 1) = 0$ /либо $(u, g_0) = 0$/, где $K^* g_0 = g_0$. При $\alpha = 1$ уравнение /2.1/ безусловно и однозначно разрешимо, причем если $(v_0, 1) = 0$, то $(u, g_0) = 0$, что эквивалентно $u(\infty) = 0$.

Замечание 1. Обозначим: $\sigma(K)$ -спектр оператора K. Согласно лемме 4 из [5] справедливо соотношение

$$\sigma(K) \in (-1, 1], \qquad /2.4/$$

причем $\lambda = 1$ - однократное собственное значение $K \cdot 1 = 1$ для односвязного контура /поверхности/ и N - кратное для области, имеющей N компонент связности. Оператор $L = L^* > 0$ при $n = 3$, а при $n = 2$ $L > 0$ на множестве $(v, 1) = 0$.

Согласно лемме 2 будем рассматривать решение /2.2/ лишь на инвариантном подпространстве $E_1 = \{u : (u, g_0) = 0\}$.
Т.к. X разлагается в прямую сумму инвариантных подпространств $X = E_1 + R$ в силу $(g_0, 1) \neq 0$, то ввиду справедливости леммы 2 для оператора K^-, являющегося сужением K на E_1, имеем $\rho(K^-) = q < 1$. В эквивалентной норме $\|\cdot\|_*$ [7] получим $\|K^-\|_* \le < q + \epsilon$, $\epsilon > 0$ - сколь угодно мало, откуда следует сходимость простых итераций для /2.2/ со скоростью геометрической прогрессии.

Если Γ - выпуклое множество, то $\|\ \|_*$ совпадает с C-нормой. Т.к. последняя является нормой второго типа, то справедлива лемма 1 о сходимости /1.1/ в C-норме.

Как отмечено в [2], при $P \to E$ имеем

$$\|(E - KP)^{-1}\, K(E - P)\| \to 0, \quad u \in E_1. \qquad /2.5/$$

т.е. всегда можно добиться сходимости /0.4/ в $C/\Gamma/$ при $P \to E$.

Предыдущие рассуждения подытоживает следующая лемма.

Лемма 3. Пусть Ω - выпуклая область, тогда наряду с простыми итерациями сходится процесс /0.4/ со скоростью

$$\|x_n - x^*\| \le q^n \|x_0 - x^*\|, \quad q < 1, \quad x_n \in E_1, \qquad /2.6/$$

в норме $C/\Gamma/$. Если выполнено

$$\|(E - K^- P)^{-1}\|_* < \nu^{-1}, \quad \|KQ\|_* \le \nu, \quad x \in E_1 \qquad /2.7/$$

для невыпуклого контура Γ, то

$$\|x_n - x^*\|_* \le q_1^n \|x_0 - x^*\|_*, \quad q_1 < 1, \quad x_n \in E_1. \qquad /2.8/$$

Замечание 2. При $\alpha = 1$ для решений из класса $|u(\infty)| < \text{const}$ /т.е. $(u, g_0) \neq 0$/ аналогичные результаты справедливы для итерационного процесса

$$u_{n+1} = \beta K u_n + (1-\beta) u_n + f, \quad 0 < \beta < 1 . \qquad /2.9/$$

Замечание 3. Для выпуклого контура

$$\|KQ\| \le \max_{x \in D} \frac{\kappa(D', x)}{(n-1)\pi}, \quad n = 2,3,$$

где $\kappa(D', x)$ – угол /телесный угол/, под которым видна область D' из точки x.

Рассмотрим далее несколько конкретных примеров сходимости итераций /0.4/.

Пример 1. Пусть решается внешняя задача для окружности Γ радиуса R, которая разбита на две части: $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, причем $\operatorname{mes}\Gamma_1 = \kappa R$, $0 < \kappa < 2\pi$. Пусть $f = 0$ и

$$Pu = \begin{cases} u, & x \in \Gamma_1, \\ 0, & x \in \Gamma_2, \end{cases}$$

тогда, учитывая, что $K(x, s) = 1/2\pi R$, и задавая произвольную $u_0(s) \in C(\Gamma)$, для Qu_1 получим:

$$u_1 + \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma_1} u_1 ds = -\frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma_2} u_0 ds, \quad c = \int_{\Gamma_2} u_0 ds,$$

$$Pu_1 = c_1, \quad c_1 + \frac{\alpha}{2\pi} c_1 = -\frac{2\pi - \alpha}{2\pi} c,$$

$$c_1 = -\frac{2\pi - \alpha}{2\pi + \alpha},$$

откуда

$$Qu_1 = -\frac{2\pi - \alpha}{2\pi} + \frac{\alpha}{2\pi}\,\frac{2\pi - \alpha}{2\pi + \alpha} = \frac{2\pi - \alpha}{2\pi}\left(\frac{\alpha}{2\pi + \alpha} - 1\right) c,$$

$$q = -\frac{2\pi - \alpha}{2\pi + \alpha} = -\frac{1-\sigma}{1+\sigma}, \quad \sigma = \frac{\alpha}{2\pi}.$$

При $\alpha = \pi$ имеем $q = -\frac{1}{3}$, при $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ $q = -\frac{1}{7}$.

Пример 2. Решается внешняя задача в области $R^2 \setminus (C_1 \cup C_2)$, где C_1, C_2 – круги радиуса 1, центры которых расположены на расстоянии $r > 2$. Границы кругов обозначим Γ_1 и Γ_2, а для решений используем обозначения u – на Γ_1, v – на Γ_2. Пусть задана $v_0 \in C(\Gamma_2)$, тогда

$$u_1 + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} u_1 ds = -\int_{\Gamma_2} K(x, s)\, v_0(s)\, ds, \quad x \in \Gamma_1, \qquad /2.10/$$

$$2 \int_{\Gamma_1} u_1 ds = -\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} K(x, s)\, v_0(s)\, ds\, dx,$$

$$u_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} K(x, s)\, v_0(s)\, ds\, dx - \int_{\Gamma_2} K(x, s)\, v\,(s)\, ds,$$

откуда

$$|u_1| \le \left(\frac{1}{2}\,\frac{2\theta}{\pi} + \frac{2\theta}{\pi}\right)|v_0| = \frac{3\theta}{\pi}|v_0|, \quad \theta = 2 \arcsin\frac{1}{r-1}.$$

Далее находим

$$v_1 = \int_{\Gamma_1} K(x, s)\, u_1(s)\, ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} v_0(s)\, ds, \quad x \in \Gamma_2.$$

Поскольку $\int_{\Gamma_2} v_0(s) ds = \text{const}$, а значит, при подстановке в /2.10/ не дает вклада в правую часть, то можно положить $c = 0$, откуда $|v_1| \le \frac{3\theta}{\pi}\,\frac{2\theta}{\pi}|v_0|$, т.е. $q \le 6\left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2$.

Пример 3. Область Ω есть полукруг радиуса R. Обозначим дугу через Γ_1, а диаметр – через Γ_2. Положим

$$Pu = \begin{cases} u, & x \in \Gamma_1, \\ 0, & x \in \Gamma_2, \end{cases} \quad u = \binom{u}{v}, \quad \begin{matrix} u \in C(\Gamma_1), \\ v \in C(\Gamma_2). \end{matrix}$$

Для u_1 имеем

$$u_1 + \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma_1} u_1 ds = -\int_{\Gamma_2} K(x, s)\, v_0(s) ds \equiv \Psi(x), \quad x \in \Gamma_1.$$

Так как $\int_{\Gamma_2} K(x, s)\, dx = \frac{1}{2}$ для всех $x \in \Gamma_1$, то для правой части получим $|\Psi| \le \frac{1}{2}|v_0|$. В итоге

$$\int_{\Gamma_1} u_1 ds = \frac{2}{3} \int_{\Gamma_1} \Psi(s) ds, \quad u_1 = \Psi - \frac{1}{2\pi}\,\frac{2}{3} \int_{\Gamma_1} \Psi ds,$$

$$|u_1| \le \frac{1}{2}|v_0| + \frac{1}{6}|v_0| = \frac{2}{3}|v_0|,$$

$$|v_1| = |0 \cdot v_0 + \int_{\Gamma_1} K(x,s)\, u_1(s)\, ds| \le |u_1| \le \frac{2}{3}|v_0|$$

в силу $K(x,s) = 0,\ x, s \in \Gamma_2$. Поэтому $q = 2/3$.

Рассмотрим вопросы численной реализации простых итераций и метода неполного обращения /0.4/.

Пусть уравнение /2.2/ заменяется системой алгебраических уравнений

$$(E + \alpha B)\, u_h = \Phi_h\ ,\quad B: R^N \to R^N, \qquad /2.11/$$

где h - параметр дискретизации, а матрица B порядка $N \times N$ строится по методу коллокации для кусочно-постоянных /либо кусочно-линейных/ базисных функций и некоторого разбиения границы Γ /4,6/. В работе /6/ при использовании свойства полной непрерывности оператора K для $n = 2$ установлено, что $\lambda = 1$ есть однократное собственное значение оператора B, $B \cdot 1 = 1$ /для односвязного контура/, оператор $E + B$ имеет равномерно ограниченный по h обратный оператор $(E + B)^{-1}$, а $(E - B)^{-1}$ равномерно ограничен на подпространстве $E_{1,h} = \{v: (v, v_0) = 0\}$, где $B^* v_0 = v_0$. Аналогичные утверждения справедливы и для $n = 3$. Кроме того, аналогично лемме 5 /6/ и учитывая /2.4/, можно доказать, что справедлива

Лемма 4. Существует такое $h_0 > 0$, что при всех $h \le h_0$ выполнено $\rho(B) \le 1$ и равенство достигается при $\lambda = 1$, $B \cdot 1 = 1$. При этом $\rho(B^-) \le q < 1$, где B^- - сужение B на инвариантное подпространство $E_{1,h}$, а q не зависит от h.

Из леммы 4 непосредственно вытекает, что итерационный процесс

$$u_h^{k+1} = -\alpha B u_h^k + f\ ,\quad u_h^k \in E_{1,h}\ , \qquad /2.12/$$

сходится со скоростью $\|u_h - u_h^*\|_* \le q^k \|u_k^o - u_h^*\|_*$ в эквивалентной норме $\|\cdot\|_*$, а для выпуклой области - в норме $C/\Gamma/$.

При этом для достижения невязки N^{-p} требуется $O(N^2 \ln N)$ арифметических действий и $N^2 + O(N)$ ячеек памяти ЭВМ. Относительно процесса /0.4/ справедливо утверждение, аналогичное лемме 3.

В качестве области D' для проектирования можно выбирать компоненту связности в случае многосвязной области /пример2/, а также либо параллельные участки границы, либо отличающиеся поворотом. В работе /4/ рассмотрена структура матрицы B для таких областей, как прямоугольник, трапеция, правильный многоугольник, параллелепипед. При этом необходимая для хранения матрицы память близка к соответствующей для сеточных методов, а матрица $E + \alpha BP$ является блочно-теплицевой, если P - проектор, определяемый параллельными сторонами или гранями. Например, матрица $E + BP$ для

противоположных сторон прямоугольника имеет вид

$$E + BP = \begin{pmatrix} E & A \\ A & E \end{pmatrix},\qquad A = \{a_{|i-j+1|}\}_{i,j=1}^{p}\ ,$$

и легко обратима как прямым, так и итерационным методами при $p = 2^k + 1$ за $O(p \ln p)$ арифметических действий. При этом $\|A\| \le q < 1$ в C-норме, где q равно $\frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\frac{a}{2b}$ и не зависит от шага дискретизации. Здесь a, b - длины сторон прямоугольника, $a \ge b$.

§3. ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим интегродифференциальное уравнение

$$-y'' + a(x)\, y + \int_0^1 K(x,s)\, y(s)\, ds = f(x)\ ,\quad 0 < x < 1\ ; \qquad /3.1/$$

$$y(0) = y(1) = 0\ ,\quad a(x) > 0\ ,\quad K(x,s) = K(|x-s|),$$

с ядром, зависящим лишь от расстояния между точками и достаточно гладкими функциями $a(x)$ и $K(t)$.

На сеточной области $\bar\omega_h = \{x_i = ih;\ i = 0,1,\dots,n\}$, $h = n^{-1}$, запишем разностное уравнение для /3.1/ /8/:

$$A_n y \equiv -(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})h^{-2} + a_i y_i + [S_n y]_i = f(x_i) \equiv \Psi,$$

$$x_i = ih,\quad i = 1,\dots, n-1;\quad y = \{y_i\},\quad i = 0,\dots, n\ , \qquad /3.2/$$

$$y_n = y_n = 0\ ,\quad [S_n y]_j = \sum_{i=1}^{n-1} K(x_j, x_i)\, y_i\, h\ .$$

Полагая $A_n = D_n + S_n$, очевидно, имеем $S_n = S_n^*$, $D_n = D_n^*$. Если $\lambda_2 E \ge D_n^{-1} S_n \ge \lambda_1 E$, то для решения /3.2/ эффективным является итерационный процесс

$$y_{k+1} = -\alpha D_n^{-1} S_n y_k + (1 - \alpha)\, y_k + D_n^{-1} \alpha f \qquad /3.3/$$

при $\alpha = (1 + \mu)^{-1}$, $\mu = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$, $q = 1 - \frac{1 + \lambda_1}{1 + \mu} < 1$, одна итерация которого сводится к прогонке и умножению T - матрицы S_n на вектор и требует $O(n)$ ячеек памяти ЭВМ.

Использование процесса /0.4/ целесообразно, если ядро $K(x,s) = K(|x - s|)$ в некоторой области $x, s \in D' \subset [0, 1]$. Пусть сетка

$\bar{\omega}'_h \in D'$, причем $\bar{\omega}'_h = \{x_i = ih;\ i = \ell, \ell+1, \dots, m\};\ \ell, m < n$. Полагая $S_n = \{s_{ij}\}$, определим матрицу

$$S_n P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \{a_{|i-j+1|}\}_{i,j=1}^{m-\ell}, \qquad a_{ij} = s_{\ell+i-1,\, \ell+j-1}.$$

Тогда итерации /0.4/ строятся по формуле

$$(D_n + S_n P)\, y^{k+1/2} = -(S_n - S_n P)\, y^k + f,$$
$$y^{k+1} = \alpha y^{k+1/2} + (1-\alpha) y^k, \quad 1 \geq \alpha > 0, \qquad /3.4/$$

причем обращение оператора $D_n + S_n P$ выполняется при помощи итераций /3.3/. Аналогично /3.4/ строится итерационный процесс для ядра $K(x,s) = K_1(|x-s|) + G(x,s)$, где $G(x,s)$ - общего вида. Вместо оператора $S_n P$ в /3.4/ следует положить разностный аналог интегрального оператора с ядром $K_1(|x-s|)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. "Наука", М., 1978,
2. Соколов Ю.Д. Метод осреднения функциональных поправок. "Наукова Думка", Киев, 1967.
3. Воеводина С.Н. Клеточно-теплицевы матрицы и интегральные уравнения Фредгольма. В кн.: Вычислительные методы и программирование. Изд-во МГУ, М., 1975, вып.24, с. 91-94.
4. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р11-83-329, Дубна, 1983.
5. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р11-83-261, Дубна, 1983.
6. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Юлдашев О.И. ОИЯИ, Р11-82-659, Дубна, 1982.
7. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. "Наука", М., 1969.
8. Нгуен М., Хоромский Б.Н., Ямалеев Р.М. "Дифференциальные уравнения", 1980, т.16, № 7, с.1293-1302.
9. Марчук Г.И., Кузнецов Ю.А. Итерационные методы и квадратичные функционалы. В кн.: Методы вычислительной математики. Новосибирск, "Наука", 1975, с.4-143.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 августа 1983 года

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Р11-83-596
Решение граничных интегральных уравнений для оператора Лапласа методом неполного обращения

Предложен итерационный метод решения интегральных уравнений, основанный на обращении интегрального оператора лишь в некоторой подобласти своей области определения. Рассмотрены приложения для граничных интегральных уравнений, связанных с оператором Лапласа, а также для интегродифференциального уравнения. Наибольшая эффективность процесса достигается, если ядра интегральных операторов зависят в некоторой области лишь от разности аргументов. В этом случае реализация одной итерации связана с обращением теплицевой матрицы.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Zhidkov E.P., Khoromskij B.N. P11-83-596
Solution of Boundary Integral Equations for Laplace Operator Using the Incomplete Revolution Method

Iterational method for integral equation solution based on the reversion of integral operator only in a subregion of its region of definition is suggested. Applications for boundary integral equations for Laplace operators as well as for integro-differential equations are considered. The most effectiveness of the process can be achieved if the nuclei of integral operators depend in some region only on the argument difference. In this case the implementation of one iteration is connected with the Tepliz matrix reversion.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой.