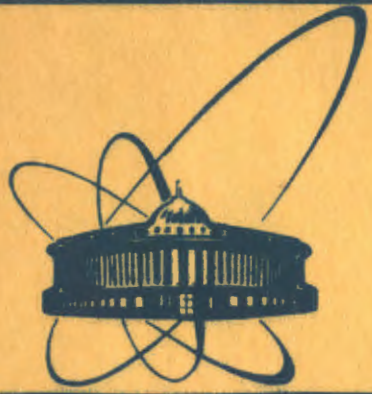


31/x-83



СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

5731/83

9/11-83

P11-83-557

В.П.Акопян, Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский,  
О.И.Юлдашев

РЕШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА  
В СЛУЧАЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ  
МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ  
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1983

Задача об определении собственных колебаний волноводов и резонаторов сложной формы, возникающая при проектировании и оптимизации сложных электродинамических систем, может быть решена численно лишь при помощи ЭВМ. Высокие требования к точности расчетов при достаточно жестких требованиях на память ЭВМ требуют дальнейшего развития соответствующих численных методов. Обзор и сравнительная характеристика большинства таких методов даны, например, в <sup>1/</sup>, где отмечено, что наиболее распространенной является дифференциальная постановка задачи, а большинство алгоритмов предназначено для расчета регулярных волноводов / $x$ ,  $y$  - геометрия/ произвольного сечения и только незначительная часть - для расчета резонаторов с аксиальной симметрией.

К наиболее эффективным можно отнести алгоритмы, в которых используется метод итераций в подпространстве для решения алгебраической задачи на собственные значения <sup>2/</sup>. Соответствующий численный алгоритм с дискретизацией по методу конечных элементов представлен, например, в работе <sup>3/</sup>. В работе <sup>4/</sup> построен алгоритм на основе метода конечных разностей.

При всех достоинствах методов, использующих дифференциальную постановку задачи, следует отметить трудности, возникающие при аппроксимации границы сложной формы, а также значительное увеличение памяти ЭВМ при расчете большого числа гармоник, т.к. на хранение каждой собственной функции требуется двумерный массив.

В настоящей работе предложен метод расчета задачи о свободных колебаниях в аксиально-симметричных резонаторах на основе метода граничных интегральных уравнений /ГИУ/, в котором исходная спектральная задача для дифференциального оператора сводится к нелинейной на собственные числа для интегрального оператора на контуре, ограничивающем сечение волновода. Неизвестными являются собственное число, а также значение собственной функции /задача Неймана/ либо ее нормальной производной /задача Дирихле/ на границе области. Таким образом, в данном подходе, в отличие от дифференциальной постановки, неизвестная функция определена на одномерном множестве, а для того, чтобы задать интегральный оператор, требуется двумерный массив, который используется при расчете лишь одной гармоники.

Нелинейная спектральная задача решается методом Ньютона. Численный алгоритм построен на последовательности сеток, что, с одной стороны, дает хорошие начальные приближения для ньютоновских итераций на мелкой сетке, а с другой - позволяет применить

экстраполяцию Ричардсона. Алгоритм реализован для областей с кусочно-линейной границей. Возможен расчет нескольких собственных значений и собственных функций. Практическая эффективность метода для модельной задачи проиллюстрирована в § 3.

Отметим, что для случая  $x, y$ -геометрии переход к граничному интегральному уравнению делается в <sup>1/5/</sup>. Для приведенного там алгоритма получены значения первого собственного числа с точностью 0,5-2%, время решения отмечается, как "значительное".

## §1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Известно, что решение задачи о свободных волнах и колебаниях электродинамической системы с однородным анизотропным заполнением сводится к решению уравнений Максвелла, которое в случае гармонической зависимости полей от времени  $/e^{i\omega t}/$  имеет вид:

$$\text{rot} E(x) = i\omega\mu H(x), \quad \text{rot} H(x) = -i\omega\epsilon E(x),$$

$$\text{div} E(x) = 0, \quad \text{div} H(x) = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad /1.1/$$

$$E = (E_r, E_z, E_\phi)^T, \quad H = (H_r, H_z, H_\phi)^T,$$

где  $E$  и  $H$  - комплексные амплитуды напряженности электрического и магнитного полей,  $\epsilon$  и  $\mu$  - диэлектрическая и магнитная проницаемость среды. В случае проводящих стенок граничные условия определяются равенством  $E_r = 0$  на поверхности  $S$ , ограничивающей область  $\Omega'$ , где  $E_r$  - касательная составляющая поля  $E$ .

Спектральную задачу для уравнения /1.1/ можно свести к нелинейной задаче на собственные значения для ГИУ на поверхности  $S$  /принцип Гюйгенса/<sup>1/5/</sup>:

$$\begin{aligned} \alpha E(x) &= -\text{rot} \iint_S [n, E] \frac{e^{-ikr(x,y)}}{r(x,y)} dS_y + \\ &+ \frac{1}{i\omega\epsilon} \text{rot rot} \iint_S [n, H] \frac{e^{-ikr(x,y)}}{r(x,y)} dS_y; \\ \alpha H(x) &= -\text{rot} \iint_S [n, H] \frac{e^{-ikr(x,y)}}{r(x,y)} dS_y + \\ &+ \frac{1}{i\omega\mu} \text{rot rot} \iint_S [n, E] \frac{e^{-ikr(x,y)}}{r(x,y)} dS_y; \\ \alpha &= \{4\pi, x \in \Omega'; 2\pi, x \in S; 0, x \notin \Omega'\}; \quad r(x,y) = |x-y|, \end{aligned} \quad /1.2/$$

где  $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ ,  $n$  - внешняя нормаль,  $[\cdot, \cdot]$  - векторное произведение. К уравнениям /1.2/ при  $x \in S$  следует добавить граничные условия, в которые входят величины  $[n, E]$  и  $[n, H]$ , после чего из полученной системы уравнений найти неизвестный параметр  $k$  и величины  $[n, E]$  и  $[n, H]$ . Здесь спектральный параметр  $k$  входит нелинейно в ядра интегральных операторов на границе  $S$ , а неизвестные собственные функции определены лишь на поверхности  $S$ , ограничивающей контур.

Отметим, что ГИУ, соответствующие уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)u = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + k^2 \right) u = 0, \quad k^2 > 0, \quad /1.3/$$

определяются формулами Гюйгенса<sup>1/5/</sup>

$$\alpha u(x) = -\iint_S [u(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikr(x,y)}}{r(x,y)} - \frac{e^{-ikr}}{r(x,y)} \frac{\partial}{\partial n} u(y)] dS_y, \quad /1.4/$$

$$\alpha = \{4\pi, x \in \Omega'; 2\pi, x \in S; 0, x \notin \Omega'\}.$$

В важных для приложений частных случаях ГИУ /1.2/, /1.4/ можно существенно упростить. Рассмотрим случай аксиально-симметричного резонатора и азимутально-однородного электромагнитного поля  $/\partial/\partial\phi = 0, \phi$  - угловая координата/. Уравнение /1.1/ для функций  $u = E_\phi$  или  $u = H_\phi$  примет вид:

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + (k^2 - \frac{1}{r^2})u = 0, \quad /1.5/$$

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon,$$

где  $k^2$  - неполное собственное число, а  $u(r, z)$  - собственная функция. Граничные условия определяются равенством  $E_r = 0$  на контуре  $\Gamma$ , ограничивающем сечение  $\Omega$  волновода,  $\Omega' = \Omega \times [0, 2\pi]$ . Для  $H$ -колебаний имеем условия Дирихле  $u_\Gamma = 0, u = E_\phi$ ; для  $E$ -колебаний - условия Неймана  $\frac{\partial u}{\partial n} |_\Gamma = 0, u = H_\phi$ .

При помощи функции Грина для несамосопряженного оператора  $L$  из /1.5/ можно получить интегральное представление для функции  $u(r, z)$ <sup>1/7/</sup>:

$$\begin{aligned} \alpha u(x) &= \int_\Gamma [G(y, x) \frac{\partial u}{\partial n} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G(y, x) + \\ &+ \frac{1}{r} \cos(\hat{n}\Gamma) G(y, x) u(y)] dS_y, \end{aligned}$$

$$\alpha = \{4\pi, x \in \Omega; 2\pi, x \in \Gamma; 0, x \notin \bar{\Omega}\}, \quad /1.6/$$

$$y = (r, z), \quad x = (r_0, z_0).$$

Функция  $G(y, x)$  зависит от координат точек  $y$  и  $x$ :

$$G(y, x) = \gamma \int_0^{2\pi} \frac{\exp(ikR_{yx})}{R_{yx}} \cos\beta \, d\beta, \quad /1.7/$$

где

$$R_{yx} = (r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\beta + (z - z_0)^2)^{1/2}.$$

В работе<sup>/8/</sup> изучены свойства функции  $G(y, x)$  и получены быстро-сходящиеся ряды для ее расчета на ЭВМ в некоторой области аргументов. Отметим, что в точке совпадения аргументов /при  $y \rightarrow x$ / функция  $G$  имеет логарифмическую особенность<sup>/7/</sup>:

$$2 \ln r_{yx}^{-1}, \quad r_{yx} = [(r - r_0)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}$$

и удовлетворяет соотношениям

$$G(y, x) = O(r^2), \quad r \rightarrow 0; \quad G(y, x) = O(r_0), \quad r_0 \rightarrow 0.$$

При  $x \in \Gamma$  из /1.6/ получаем интегральное уравнение относительно  $u(y)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n}(y)$ ,  $u \in 1$ , и параметра  $k$ . Причем для вещественных  $k$  используем лишь ядро  $G_1 = \text{Re}G$ :

$$G_1(y, x) = \gamma \int_0^{2\pi} \frac{\cos(kR_{yx})}{R_{yx}} \cos\beta \, d\beta. \quad /1.8/$$

Для случая условий Дирихле  $u|_{\Gamma} = 0$  приходим к нелинейной задаче на собственные значения:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} G_1(y, x, k) v(y) \, dy = 0, \quad /1.9/$$

$$\int_{\Gamma} v^2(y) \, dy = 1,$$

где неизвестными являются функция  $v(y) = \frac{\partial u}{\partial n}(y)$  и собственное число  $k \geq 0$ .

Рассмотрим еще две часто встречающиеся постановки спектральной задачи. Так, для функции  $u = rH_\phi$  или  $u = rE_\phi$  справедливо уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) u + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \right) u + \frac{k^2}{r} u = 0 \quad /1.10/$$

с самосопряженным оператором /в пространстве с весом  $r^{-1}$ /, для которого ядро  $G_2 = \text{Re}G$  имеет вид

$$G_2(y, x) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(kR_{yx})}{R_{yx}} \cos\beta \, d\beta, \quad /1.11/$$

в чем легко убедиться непосредственной подстановкой. Ядро  $G_2$ , в отличие от  $G_1$  из /1.8/, является симметрическим.

Вычислим далее ядро  $G_3(y, x)$  для уравнения

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + k^2 w = 0, \quad /1.12/$$

решение  $w(r, z)$  которого связано с функцией  $u(r, z)$  из /1.5/ равенством  $u = \partial w / \partial r$ . Оператор /1.12/ получается из оператора Гельмгольца /1.3/ при условии  $\frac{\partial}{\partial \phi} u = 0$ . Из формулы /1.4/ для функции

$w(r, z, \phi)$  при условии  $\partial w / \partial \phi = 0$  в аксиально-симметричной области  $\Omega'$  с образующей  $\Gamma$ , когда  $S = [0, 2\pi] \times \Gamma$ , получим

$$w(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} \left[ w \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikR(x, y)}}{R(x, y)} - \frac{e^{-ikR(x, y)}}{R(x, y)} \frac{\partial w}{\partial n} \right] r \, dl \, d\phi, \quad /1.13/$$

т.к.  $dS_y = dl \, d\phi r$ ,  $x = (r_0, z_0, 0) \in \Gamma$ ,  $y = (r, z, \phi)$ . Пусть  $w|_{\Gamma} = 0$ , тогда ГИУ /1.13/ примет вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} d\phi v(r, z) \, dl = 0,$$

откуда для ядра  $G_3(y, x)$  получаем выражение

$$G_3(y, x) = \gamma \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikR(x, y)}}{R(x, y)} d\phi, \quad /1.14/$$

где для  $r(x, y)$  из геометрических соображений имеем выражение

$$\begin{aligned} R^2(x, y) &= (z_0 - z)^2 + (r_0 - r \cos\phi)^2 + (r \sin\phi)^2 = \\ &= (z - z_0)^2 + r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos\phi. \end{aligned}$$

Таким образом, в терминах гармоник функции  $\frac{\exp(-ikR)}{R}$ , которые изучаются в<sup>/8/</sup>, имеем

$$\begin{aligned} G_1 &= \text{Re}(s_1), \quad G_2 = r^{-1} \text{Re}(s_1), \quad G_3 = \text{Re}(s_0), \\ s_m &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-ikR)}{R} \exp(-im\phi) \, d\phi, \quad m = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad /1.15/$$

Легко видеть, что при помощи ядра  $G_3$  из /1.14/ можно получить ядра  $G_1$  и  $G_2$  по формуле  $G_1 = \frac{\partial}{\partial r} G_3$ . В итоге функции  $G_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , из /1.15/ позволяют свести любую из перечисленных спектральных задач к ГИУ на контуре  $\Gamma$ .

## §2. МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ /1.9/

Рассмотрим уравнение /1.9/ с ядром  $G_2(x, y)$  из /1.11/. Обозначим интегральный оператор в /1.9/ через  $A(k)$ , так что

$$A(k)v = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} G_2(y, x, k) v(y) dy, \quad /2.1/$$

$$A = A^*; A: L_2(\Gamma) \rightarrow L_2(\Gamma); A: L_2 \rightarrow C(\Gamma).$$

Кроме того, оператор  $A(k)$  вполне непрерывен. Рассмотрим вектор  $Z = (v, k) \in L_2(\Gamma) \times R = X$  со скалярным произведением

$$(Z_1, Z_2) = (v_1, v_2) + k_1 k_2; \quad Z_1, Z_2 \in X.$$

Тогда искомым элементом  $Z^* = (v^*, k^*)$ , являющийся решением системы /1.9/, можно рассматривать как решение нелинейного операторного уравнения

$$\Phi(Z) = 0, \quad \Phi: X \rightarrow X,$$

$$\Phi(Z) = \left\{ \begin{array}{l} A(k)v \\ (v, v) - 1 \end{array} \right\} = 0 \quad /2.2/$$

в гильбертовом пространстве  $X$ . Для решения уравнения /2.2/ используем непрерывный аналог метода Ньютона, который хорошо зарекомендовал себя при решении спектральных задач для оператора Штурма-Лиувилля. Дискретизация непрерывного процесса по методу Эйлера приводит к следующей итерационной схеме:

$$\frac{\partial A}{\partial k}(k_n) v_n \frac{k_{n+1} - k_n}{r} + A(k_n) \frac{v_{n+1} - v_n}{r} = -A(k_n) v_n,$$

$$2 \left( \frac{v_{n+1} - v_n}{r}, v_n \right) = 1 - (v_n, v_n), \quad /2.3/$$

$$k_0, v_0 - \text{заданы, } 0 < r < 2.$$

При  $r = 1$  получаем метод Ньютона-Канторовича с квадратичной скоростью сходимости /в случае невырожденной производной Фреше/ в малой окрестности решения. Использование параметра  $r < 1$  позволяет расширить область сходимости процесса /2.3/. Особенностью

метода является то, что он сходится к любому из решений  $Z = (v, k)$  уравнения /2.2/ при наличии хорошего начального приближения, т.е. расчет высших гармоник ничем не отличается от случая основной гармоники.

Сходимость метода Ньютона для уравнения /2.2/ не является следствием общей теоремы задачи на собственные значения для ограниченного симметрического оператора /10/ /в /10/ рассмотрен случай изолированных собственных значений/, т.к.  $A(k^*)v^* = 0$  и в окрестности точки  $k^*$  существует бесконечно много собственных значений  $\lambda_n$  оператора  $A(k^*)$ . Не останавливаясь здесь на вопросах сходимости итераций /2.3/, отметим лишь, что при численных расчетах наблюдается скорость сходимости, близкая к квадратичной, что будет видно из приводимых таблиц.

Проблема выбора начальных приближений решается посредством организации вычислений на последовательности сеток согласно /11/.

## §3. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ /2.2/ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Разобьем контур  $\Gamma \in C^2$  на  $N$  частей одинаковой длины  $h = \ell N^{-1}$  / $\ell$  - длина контура/ точками  $t_0, t_1, \dots, t_{N+1}$ , которые образуют сеточную область  $w_h$ .

Пусть решение  $v(t) \in C^2(\Gamma)$ . Будем искать  $v(t)$  в виде сеточной функции  $v_h(t)$ ,  $t \in w_h$ :

$$v_h(t) = \sum_{i=1}^N v(t_i) \psi_i(t),$$

где  $\psi_i$  - кусочно-линейные базисные функции на контуре  $\Gamma$ :

$$\psi_i(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, & t \in [t_{i-1}, t_i], \\ \frac{t - t_{i+1}}{t_i - t_{i+1}}, & t \in [t_i, t_{i+1}], \\ 0, & t \notin [t_{i-1}, t_{i+1}]. \end{array} \right. \quad /3.1/$$

Равенство  $A(k) = 0$  заменим нелинейным алгебраическим уравнением по методу коллокации:

$$P_h A(k) v_h(t) = 0, \quad P_h: X \rightarrow R^n,$$

или

$$A_h(k) v_h = 0, \quad A_h(k) = \{a_{ij}(k)\}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad /3.2/$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} G_2(t, t_i, k) \psi_j(t) dt, \quad t \in w_h.$$

Скалярное произведение  $\int_{\Gamma} uv dt$  аппроксимируем по формуле трапеций

$$(u_h, v_h) = h \sum_{i=1}^N u_{h,i} v_{h,i}. \quad /3.3/$$

Конечномерная задача

$$A_h(k) v_h = 0, \quad (v_h, v_h) = 1, \quad /3.4/$$

аппроксимирует исходную с точностью  $O(h^2)$ . Однако интегралы в /3.2/ нельзя вычислить точно, т.к. спецфункция /1.11/ вычисляется при помощи рядов и может быть задана только таблично. В работе рассмотрены две аппроксимации интегралов /3.2/ порядка  $O(h)$  и  $O(h^2)$ . В первом случае полагаем

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{h}{2\pi} G_2(t_j, t_i, k), & |i-j| > 1; \\ \frac{1}{2\pi} \int_{t_j-h}^{t_j+h} (2 \ln|r| + a_i + b_i r) \psi_i(r) dr, & i=j; \\ \frac{h}{4\pi} G(t_j, t_i, k) + \frac{1}{2\pi} \int_{t_i}^{t_i+h} 2 \ln|r| + a_i + b_i r \psi_{i\pm 1}(r) dr, & |i-j|=1, |r| \in [0, h], \end{cases} \quad /3.5/$$

где коэффициенты  $a_i, b_i$  получаются из условия аппроксимации функции  $G_2(t_j+r, t_i, k)$ ,  $r \in [-h, h]$  функциями  $2 \ln|r| + a_i + b_i r$ .

Для аппроксимации второго порядка выбиралось число  $\rho_0$ , не зависящее от  $h$ , причем если  $|t_i - t_j| \leq \rho_0$ , то элемент  $a_{ij}$  определяется по формуле

$$a_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{t_j-h}^{t_j+h} [\ln \rho(r) (2 + c_j r) + (a_j + b_j r)] v_j(r) dr, \quad /3.6/$$

$$-h \leq r \leq h, \quad \rho(r) = |t(r) - t_i|.$$

В остальных случаях  $a_{ij} = \frac{h}{2\pi} G(t_j, t_i, k)$ . Коэффициенты  $a_j, b_j, c_j$  определяются из условия аппроксимации ядра  $G(t, t_i)$  функцией вида  $(cr + 2) \ln \rho(t) + a + br$  на отрезке  $t_j \leq t \leq t_j + h$ . Отметим, что для аппроксимации /3.5/ имеем  $A_h = A_h^*$ , а для аппроксимации /3.6/ -  $A_h = A_h^* + O(h^2)$ .

Для решения нелинейного операторного уравнения /2.2/ методом /2.3/ требуется также ядро оператора  $\frac{\partial A}{\partial k}$ , которое обозначим  $DA(y, x)$ ,

$$DA(y, x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sinc } R_{y,x} \cos \beta d\beta. \quad /3.7/$$

Это ядро уже не имеет особенности и является достаточно гладкой функцией своих аргументов. Спецфункцию /3.7/ вычисляем по формуле Симпсона с достаточно крупным шагом, т.к. она влияет лишь на скорость сходимости ньютоновских итераций /2.3/. Как правило, достаточно взять 5-10 расчетных точек /при вычислении первой гармоники/ на отрезке  $[0, 2\pi]$ , а дальнейшее увеличение точности расчета  $\frac{\partial A}{\partial k}$  не приводит к заметному ускорению сходимости.

Численный алгоритм построен на последовательности сгущающихся сеток  $w_{h_p}, h_p \rightarrow 0, p = 1, 2, \dots$ , что помогает решить сразу две проблемы. Во-первых, ускорение сходимости ньютоновских итераций на более мелких сетках. Это делается при помощи экстраполяции к точному решению разностной задачи на более мелкой сетке с использованием разложения приближенного решения  $Z_h = (v_h, k_h)$  /предполагается его существование/ по степеням шага дискретизации

$$Z_h = P_h Z^* + P_h \sum_{i=1}^{\ell} h^{\alpha_i} c_i(t), \quad t \in \Gamma, \quad /3.8/$$

где  $c_i(t)$  не зависят от  $h, \alpha_i \geq 0$ . Во-вторых, имея решения  $v_{h_i}$  на нескольких сетках, можно существенно повысить точность  $k_h$  и  $v_h$  при помощи экстраполяции Ричардсона.

Для ускорения сходимости итераций на сетке с шагом  $h_3$  используются решения  $Z_{h_1}$  и  $Z_{h_2}$  на сетках  $w_{h_1}$  и  $w_{h_2}$ , при помощи которых строится приближение к точному решению  $Z_{h_3}$  по формуле

$$Z_{h_3}^o = \alpha P_{h_3} Z_{h_1} + \beta P_{h_3} Z_{h_2}, \quad /3.9/$$

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha h_1^{\alpha_1} + \beta h_2^{\alpha_2} = h_3^{\alpha_3},$$

для которого в силу /3.8/ выполнено

$$\|Z_{h_3}^o - Z_{h_3}\| = O(h_3^{\alpha_2}).$$

Таблица 1

$i$	$h_i$	$N$	$\Delta(k_i)$	$IT$	$\Delta(h_{i-1}, h_i)$	$\Delta(h_{i-2}, h_{i-1}, h_i)$
1	1/8	13	0,15692	3		
2	1/10	17	0,12496	2	- 0,0029	
3	1/12	21	0,10383	2	- 0,0017	0,00030

Таблица 2

$i$	$h_i$	$\ A_h(k_i^0) v_i^0\ $	$IT$	$\ A_h(k_i) v_i\ $	$\Delta(k_i)$	$\Delta(h_i, h_{i+1})$	$\Delta\Phi_{i, h_{i+1}, h_{i+2}}$	$\Delta\Phi_{i, h_{i+1}, h_{i+2}, h_{i+3}}$
1	$\frac{1}{8}$	$2,47 \cdot 10^{-2}$	3	$3,30 \cdot 10^{-5}$	$7,10 \cdot 10^{-2}$	$1,30 \cdot 10^{-2}$	$1,24 \cdot 10^{-2}$	$5,33 \cdot 10^{-3}$
2	$\frac{1}{10}$	$1,14 \cdot 10^{-2}$	3	$1,12 \cdot 10^{-6}$	$5,01 \cdot 10^{-2}$	$1,46 \cdot 10^{-3}$	$3,13 \cdot 10^{-3}$	
3	$\frac{1}{12}$	$4,09 \cdot 10^{-3}$	2	$9,26 \cdot 10^{-6}$	$3,52 \cdot 10^{-2}$	$3,56 \cdot 10^{-4}$		
4	$\frac{1}{14}$	$4,67 \cdot 10^{-3}$	2	$7,78 \cdot 10^{-6}$	$2,58 \cdot 10^{-2}$			

В итоге число ньютоновских итераций при переходе к очередной сетке, как правило, убывает и на самой мелкой сетке составляет 1-2 итерации.

Замечание 1. За начальные приближения для собственных чисел можно взять корни нелинейного алгебраического уравнения

$$\det A_h(k^*) = 0,$$

а соответствующие решения  $x_h$  однородного уравнения

$$A_h(k^*) x_h = 0$$

являются начальными приближениями для искомого собственного вектора.

Отметим, что если контур  $\Gamma$  имеет ось симметрии, то размерность вектора  $v_h$  уменьшается в два раза и соответственно массив  $\{a_{ij}\}$  уменьшается в четыре раза, так же как и общее время счета.

Численный алгоритм для ЭВМ, реализующий предложенный метод, составлен для произвольной односвязной области с кусочно-линейной границей. На каждом прямолинейном отрезке границы  $\Gamma(m) \in \Gamma$  задается свой равномерный шаг дискретизации  $h(m)$ .

Приведем результаты расчета первой гармоники по методу порядка  $O(h)$  для прямоугольного контура на последовательности из трех сеток. В таблице 1 представим точности  $\Delta k_h = k^* - k_h$  собственных чисел и результаты экстраполяции на нескольких сетках, где  $\Delta(h_1, h_2, \dots, h_p)$  - точность, достигнутая в результате экстраполяции по значениям  $k_{h_1}, k_{h_2}, \dots, k_{h_p}$ . Точное значение  $k^* = 8,28235$ . Через  $N$  обозначаем число неизвестных для соответствующей сетки, без учета симметрий, а через  $IT$  - число ньютоновских итераций до невязки  $3 \cdot 10^{-4}$ .

В табл. 2 приводятся результаты расчета по методу с аппроксимацией  $O(h^2)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев А.Д., Янкевич В.Б. Зарубежная радиоэлектроника, 1977, № 5, с. 43.
2. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. "Мир", М., 1977.
3. Касчиева В.А., Касчиев М.С., Федосеев А.И. ОИЯИ, 11-81-695, Дубна, 1981.
4. Гаврилин А.В., Горбенко Н.И. В кн.: "Численные методы решения задач электронной оптики". ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1980, с. 99-107.

5. Spielman B.E., Harrington R.F. IEEE Trans., 1972, Sept., vol. MTT-20, No. 9, p. 578.
6. Алексидзе М.А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. "Наука", М., 1978.
7. Захаров Е.В., Несмеянова Н.И. ЖВМ и МФ, 1978, т. 18, № 2, с. 512.
8. Васильев Е.Н. ЖВМ и МФ, 1965, т. 5, № 5, с. 841.
9. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, P5-80-617, Дубна, 1980.
10. Гареев Ф.А. и др. ЖВМ и МФ, т. 17, № 2, 1977, с. 407.
11. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, 5-81-783, Дубна, 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел  
29 июля 1983 года

Акопян В.П. и др.

P11-83-557

Решение спектральной задачи для уравнения Максвелла в случае цилиндрической симметрии методом граничных интегральных уравнений

Предлагается метод расчета спектральной задачи для аксиально-симметричных резонаторов методом граничных интегральных уравнений. Исходная проблема сводится к нелинейной задаче на собственные значения для интегрального оператора на контуре, ограничивающем сечение волновода. Нелинейная задача решается методом Ньютона. Численный алгоритм построен на последовательности сеток и реализован для областей с кусочно-линейной границей. Приведены результаты численных расчетов для аппроксимации порядка  $O(h)$  и  $O(h^2)$ .

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Akopyan V.P. et al.

P11-83-557

Solving of Spectral Problem for Maxwell Equation in Cylindric Symmetry Case by the Boundary Integral Equation Method

For axial symmetric resonators the spectral problem calculation method based on the boundary integral equation method is suggested. Initial problem is replaced by the nonlinear eigenvalue problem for integral operator in wave guide contour. Nonlinear problem is solved by Newton method. Numerical algorithm on a grid sequence is constructed and is realized for a region with sectionally linear bound. Numerical results with  $O(h)$  and  $O(h^2)$  approximation are presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С. Виноградовой