

27/Х-83



СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

5536/83

P11-83-505

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков, А.Н.Ильина*,
В.Д.Ильин*

О РЕЖИМАХ КОЛЕБАНИЙ
НЕЛИНЕЙНОГО ТРЕХМЕРНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

* НИИЯФ МГУ

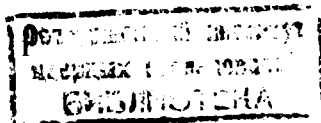
1983

Нелинейный осциллятор можно рассматривать как физический образ заряженной частицы в неоднородном магнитном (электромагнитном) поле, совершающей финитное движение. Осциллирующее движение возникает в лабораторных магнитных ловушках, ловушках космических объектов, ускорителях, накопителях и т.д. При исследовании характера движения такой динамической системы обычно выделяют малый параметр, и решение уравнения движения представляют в виде асимптотического ряда по степеням этого параметра. Стабильные колебания, связанные с устойчивым движением частиц, достаточно хорошо описываются асимптотическими методами. Что касается неустойчивого поведения частиц, то асимптотическая теория никаких предсказаний не дает. В настоящее время выходом из положения является сочетание теории стохастической динамики и численных методов.

В данной работе на примере частицы в магнитном поле дипольной конфигурации обсуждаются некоторые особенности нелинейных колебаний. В частности, рассматривается стохастический режим колебаний, вызываемый модуляционными эффектами, для которого оценивается скорость отклонения (ухода) параметров системы от начальных условий

Дипольное приближение

В этом случае в трехмерной системе "частица-дипольное поле" можно исключить одну степень свободы, поскольку в аксиально-симметричном поле угол ψ (долгота) является циклическим. Такая система характеризуется двумя частотами: поперечной, связанной с циклотронным вращением, и продольной, обусловленной колебаниями вдоль силовых линий между точками отражений. В фазовом пространстве траектории являются обмотками двумерных инвариантных концентрических торов, вложенных друг в друга и соответствующих различным энергиям¹⁷. Движение фазовой точки по инвариантному тору является условно-периодическим, соответствующие переменные действия вечно остаются близкими к своим начальным значениям.



Если же начальные условия "попадают" на резонансы (щели между инвариантными торами), то соответствующие фазовые кривые, имеющие довольно сложный и запутанный вид, все равно остаются вечно запертыми между торами. Иначе можно сказать, что если малый параметр задачи χ ($\chi = \rho/R_c$, где ρ - циклотронный радиус частицы или амплитуда поперечных колебаний, R_c - радиус кривизны силовой линии в медианной плоскости) меньше некоторого критического значения χ_c , то неустойчивость движения локализована в узких стохастических слоях вокруг сепаратрис нелинейных резонансов между поперечными колебаниями и высшими гармониками продольных осцилляций^{/2,3/}. Здесь и ниже предполагается, что циклотронная орбита не охватывает ось симметрии (ось ловушки). Ширина этих слоев определяется выражением^{/3,4/}

$$\Delta\alpha_s(\alpha, \chi) \approx \Delta\alpha(\alpha, \chi) K^{1/2}, \quad (I)$$

где

$$K \approx 0,6 \chi^{-1} \frac{14 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \frac{1 + 1,44 \sin \alpha}{\sin^3 \alpha} \exp\left(-\frac{3\psi}{\chi}\right),$$

$$\psi(\alpha) = \frac{1}{3\sqrt{2} \sin^2 \alpha} \left(\frac{1 + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \ln \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} - 1 \right),$$

α - угол между вектором скорости и полем;

$\Delta\alpha$ - угловое расстояние между резонансами, n - целое положительное число, соответствующее резонансу. Все величины относятся к медианной плоскости.

В пределах ширины резонанса возможна нерегулярная перекачка энергии колебаний из одной степени свободы в другую. Такой очень ограниченный хаотический обмен энергией при непересекающихся резонансных кривых не приводит к потерям частиц (к их уходу из ловушки). По мере увеличения χ ширина резонанса $\Delta\alpha_s$ в соответствии с (I) стремится к $\Delta\alpha$ ($\chi \rightarrow \chi_c$). При $\chi \geq \chi_c$ понятие отдельного резонанса теряет смысл, и спектр движения становится сплошным. В этой области значений χ движение является нерегулярным для большинства начальных условий и приводит к потерям частиц в основном за счет хаотической раскачки амплитуды продольных колебаний.

На рис.1 показаны характерные особенности различных видов движения, полученные с помощью траекторных расчетов. Исходным уравнением являлось уравнение Лоренца в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= A [\dot{y} B_z - \dot{z} B_y], \\ \ddot{y} &= A [\dot{z} B_x - \dot{x} B_z], \\ \ddot{z} &= A [\dot{x} B_y - \dot{y} B_x], \end{aligned} \quad (2)$$

где $A = e/mc$, $\frac{z^s}{\alpha} \vec{B} \{3xz, 3yz, 3z^2 - r^2\}$, \vec{B} - вектор магнитного поля, α - дипольный момент, \vec{z} - радиус-вектор. Для исследования поведения частицы в поле B решалась задача Коши для уравнений (2) методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Начальные условия задавались в медианной плоскости, инжекция осуществлялась из точки $(x_0, 0, 0)$ со скоростью $\vec{v}_0 \{v_0 \sin \alpha, 0, v_0 \cos \alpha\}$. При расчетах задавались: поле в точке инжекции ($B_0 = B(x_0)$), значение α_0 и параметр χ ($\chi = 3v_0/AB_0a$). В качестве стандартной подпрограммы использовалась программа INTSTP, предварительно измененная с учетом явного вида системы (2). Кроме того, в программе предусмотрен автоматический выбор шага интегрирования. В процессе интегрирования системы уравнений (2) программа по мере надобности вычисляла все необходимые физические величины: $v; \alpha; \tau; \delta$ - угол между векторами v и z ; τ_c - радиус кривизны траектории частицы; $B(\tau); B(\tau_c)$ и т.д. Точность вычислений контролировалась по сохранению точных интегралов движения (энергии и обобщенному моменту частицы) и составляла $\approx 10^{-6}\%$. Однако при этом некоторые измеряемые величины, например компоненты вектора v , могут при уменьшении шага интегрирования вдвое измениться на $\approx 1\%$. Все подпрограммы составлены на Фортране, расчеты проводились на ЭВМ CDC-6500.

Из рис.1 видно, что в зависимости от начальных условий изменения углов α и δ при многократных пересечениях медианной плоскости могут иметь регулярный и произвольный характер. Поскольку с величиной α связана амплитуда продольных и поперечных колебаний, то это означает, что подобным образом должна изменяться поперечная и продольная энергии частицы. По характеру изменений α и δ в зависимости от χ и α_0 можно судить о границе неустойчивости. Однако в двумерной задаче граница устойчивости движения наиболее надежно и просто определяется по критерию перекрытия резонансов методом сечений Пуанкаре^{/2/}. Граница стохастичности и расположение резонансов в пространстве (χ, α) показаны на рис.2. В области под кривой I поведение частицы подобно броуновскому движению по α и описывается коэффициентом диффузии^{/2,3/}

$$D_s(\alpha) \approx \frac{4,3 \cos^2 \alpha}{\chi^{1/4} \tau} \exp\left(-\frac{6\psi}{\chi}\right), \quad (3)$$

где τ - время прохождения между точками поворота (отражений). Над кривой I находится область вечногo удержания.

Асимметричное магнитное поле

Введение асимметрии поля вызывает качественно новое явление.

Согласно теории Колмогорова-Арнольда-Мозера^{/1,5/} трехмерная динамическая система в общем случае неустойчива. Наряду с начальными условиями системы, отвечающими условно-периодическим движениям, существуют некоторые начальные условия, приводящие к экспоненциально медленному уходу переменных действия от своих начальных значений^{/6/}. В пространстве (χ, α) это соответствует случайному блужданию вдоль резонансов n (см. рис.2). В силу экспоненциальной малости скорости ухода этот эффект не обнаруживается ни методами теории возмущений, ни численным счетом траекторий.

Исходя из^{/3/}, представим себе общефизическую картину неустойчивого движения частицы, а затем, сочетая численные и экспериментальные данные, оценим скорость диффузии вдоль резонансов.

В асимметричном поле ведущие резонансы расщепляются в мультиплеты, и система основных резонансов определяется уравнением^{/2/}

$$\bar{\omega} - 2n\bar{\Omega} + m\Omega_g = 0, \quad (4)$$

где $2|m|$ - число линий в мультиплете, $\bar{\omega}$ - циклотронная частота, усредненная по дрейфовому и продольному движениям, $\bar{\Omega}$ - частота продольных колебаний, усредненная по дрейфовому движению. Ширина ведущего резонанса $n = \omega/2\Omega$ определяется теперь величиной азимутальной неоднородности поля и характеризуется параметром

$$\nu = \frac{|\Delta\bar{\omega}|}{\bar{\omega}} + \frac{|\Delta\Omega|}{\Omega}, \quad (5)$$

где $\Delta\bar{\omega}$ и $\Delta\Omega$ - отклонения соответствующих частот на дрейфовой оболочке^{/10/}. Если учесть, что величина m в (4) связана с параметром ν соотношением

$$|m| \approx \nu \bar{\omega} / \Omega_g,$$

а резонансные кривые рис.2 приближенно описываются функцией

$$n = 0,72 \chi^{-1} \sin^{-1,55} \alpha,$$

то угловые размеры резонансов (эффективные ширины мультиплетов) при условии $\nu \ll 1$ будут определяться выражением

$$\Delta\alpha \approx 80 \nu \text{ tg} \alpha \text{ [град]}. \quad (6)$$

Для конкретных расчетов возьмем реальное геомагнитное поле, которое отличается от дипольного на 10% ^{/7/}. Выбор геомагнитного поля определяется, во-первых, тем, что для него известно аналитическое выражение, учитывающее азимутальную асимметрию поля, во-вторых, для геомагнитной ловушки известны времена жизни частиц (в частности протонов) с интересующими нас значениями параметра χ .

Численные расчеты параметра ν с помощью уравнений (2) для геомагнитного поля^{/7/} дают $\nu \approx 0,02$ ($30^\circ \leq \alpha \leq 70^\circ$). Отсюда значение

$(\Delta\alpha)_{\max} \approx 5^\circ$, что значительно превосходит величину $\Delta\alpha_s$ из (1). В том случае, когда соседние по m резонансы в мультиплете перекрываются и, соответственно, сливаются стохастические слои при этих резонансах, уравнение (6) определяет общую ширину стохастического слоя основного ведущего резонанса. Граница этого эффекта внутри мультиплетов показана на рис.2 в виде кривой 2. Кроме того, возможно увеличение стохастической области (область ниже кривой 1 рис.2) за счет слияния мультиплетов соседних основных резонансов. Этот эффект возникает при $n \geq 1/2\nu$, что в нашем случае приводит к $n \geq 25$.

Таким образом, в асимметричном поле существует три вида стохастической неустойчивости движения. Для резонансных значений χ и α , лежащих выше кривой 2 рис.2, стохастичность локализована в узких слоях $\Delta\alpha_s$ (см.(1)). Движение вдоль резонансов при этих χ и α называется диффузией Арнольда, оценочный коэффициент которой имеет вид^{/2/}

$$D \sim \omega \mu^2 \nu^2 \exp(-\nu e^{\frac{\psi(\alpha)}{2\chi}}), \quad (7)$$

где $\mu = \frac{\gamma m v_{\perp}^2}{2B}$ - орбитальный магнитный момент заряженной частицы, ν (≈ 1) зависит от параметров системы "частица-поле". Из (7) видно, что диффузия Арнольда является весьма медленным процессом и очень резко зависит от параметра адиабатичности χ и угла α .

В области между кривыми 1 и 2 рис.2 также имеет место лишь локальная стохастичность. Однако доли резонансных и нерезонансных значений χ и α теперь оказываются соизмеримыми. Диффузию вдоль резонансов в этом случае называют модуляционной, подчеркивая этим ее связь с модуляционными эффектами (вызываемыми частотной модуляцией). Скорость этой диффузии можно также описывать уравнением (7), в котором единственным неизвестным параметром является ν .

Величину ν найдем, используя время жизни протонов τ в геомагнитной ловушке. Действительно, подставляя $\tau \sim \mu^2 D^{-1}$ в (7), получим

$$\nu \approx \ln(\tau \omega \nu^2) \exp(-\frac{\psi(\alpha)}{2\chi}), \quad (8)$$

где неизвестной величиной теперь является τ . Следуя работе^{/3/}, для τ возьмем то значение, которое соответствует протонам со средней энергией ~ 500 МэВ в максимуме интенсивности в medianной плоскости. Максимум представляет собой точку перегиба ($Re \approx 1,5$; $\chi \approx 0,124$), в окрестности которой происходит выравнивание скоростей потерь частиц за счет взаимодействия со средой ($Re \approx 1,5$) в вследствие стохастических эффектов ($Re \geq 1,5$). Согласно^{/3/} время жизни, обусловленное средой, составляет $\tau \approx 2,5 \cdot 10^8$ с. Это во время

которое при заданном χ необходимо частице для прохождения углового расстояния от $\alpha \sim 90^\circ$ до точки α_n , лежащей на ближайшем ведущем резонансе. Как видно из рис.2, таким резонансом является $n=7$ ($\bar{\chi} = 0,124$; $\alpha \approx 63^\circ$). Подставляя соответствующие величины в (8), получим $\bar{b} \approx 1,9$. Найденное значение \bar{b} для космических условий несколько отличается от \bar{b} для лабораторной ловушки ($\bar{b} \approx 1,63$)^{1/2}. Это обстоятельство, видимо, связано с различием энергетических спектров частиц в геомагнитной и лабораторной ловушках.

Наконец, ниже кривой I рис.2 локальная стохастичность переходит в глобальную, которая собственно и называется обычно стохастической неустойчивостью. Для грубых оценок в области $\chi > \chi_S(\alpha)$ можно пользоваться формулой (3), которая в μ -пространстве имеет вид

$$D_S(\mu) = 4\mu^2 ctg^2 \alpha D_S(\alpha). \quad (9)$$

Сравнение (9) с (7) (см.рис.3) показывает, что при $\chi < \chi_S(\alpha)$ (значения χ_S лежат на кривой I рис.2) коэффициент модуляционной диффузии $D_m < D_S(\mu)$, а при $\chi \approx \chi_S(\alpha)$ величина $D_m \approx D_S(\mu)$. Это является дополнительным подтверждением справедливости оценки параметра \bar{b} , полученной выше.

Заключение

В качестве резюме необходимо отметить следующее. В реальных условиях участки резонансных кривых $n(\chi, \alpha)$, расположенные выше кривой 2 рис.2 ($\alpha(\alpha_0) = 90^\circ$), видимо, не играют существенной роли в общем балансе потерь частиц из-за экспоненциальной малости ширины стохастических слоев. Можно сказать, что эти резонансы образуют множество меры нуль, и поэтому они могут не учитываться при рассмотрении глобальных потерь.

В области значений $\chi \approx \chi_m$ (величины $\chi_m(\alpha)$ соответствуют кривой 2 рис.2) размеры стохастических слоев составляют (см. уравнение (I))

$$\Delta \alpha_S \approx 3 \cdot 10^{-2} \Delta \alpha \approx (0,5 \div 0,15^\circ) \quad (n = 4 \div 10).$$

Модуляционные эффекты при $\chi \approx \chi_m(\alpha)$ резко увеличивает меру резонансов ($\Delta \alpha_S \sim 5 \div 2^\circ$), которая при $\chi > \chi_S(\alpha)$ стремится к единице. Таким образом, практический интерес представляет область значений $\chi \approx \chi_m(\alpha)$. В дальнейшем представляло бы большой интерес исследование стохастических явлений с учетом эффектов рассеяния в среде.

Авторы благодарны Айряну Э.Н., Акишину П.Г., Касчиеву М.С., Корнейчуку А.А., Шириковой Н.Ю. за полезные советы и обсуждения численных результатов.

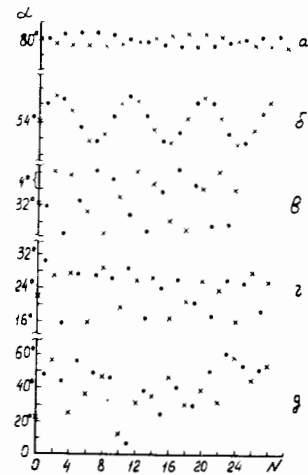


Рис.1. Зависимость α' и δ от α_0 и числа пересечений N медианной плоскости при устойчивых колебаниях (рис.1а, а', б, в) и неустойчивых (рис.1б', г, д): а - $\alpha_0 = 80^\circ$; $\chi = 0,159$; б - $\alpha_0 = 54,5^\circ$, $\chi = 0,159$ (резонанс); в - $\alpha_0 = 32^\circ$, $\chi = 0,159$; г - $\alpha_0 = 22^\circ$, $\chi = 0,159$; д - $\alpha_0 = 22^\circ$, $\chi = 0,34$; а' - $\alpha_0 = 44^\circ$, $\chi = 0,199$; б' - $\alpha_0 = 22^\circ$, $\chi = 0,34$.

Рис.2. Система нелинейных резонансов в дипольном приближении: 1 - граница стохастической неустойчивости; 2 - граница модуляционной неустойчивости ($\bar{b} = 0,02$).

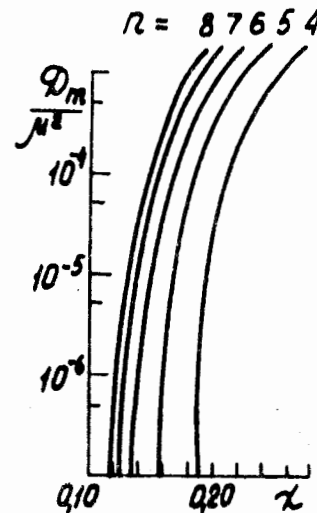
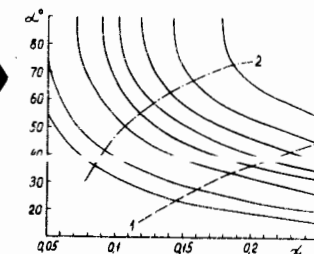


Рис.3. Изменение коэффициента модуляционной диффузии вдоль резонансов, расположенных между кривыми 1 и 2 на рис.2.

Литература

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. "Наука", М., 1979.
2. Чириков Б.В. Физика плазмы, 1978, 4, с.521.
3. Ильин В.Д., Ильина А.Н. Физика плазмы, 1982, 8, с.148; ЖЭТФ, 1978, 75, с.518.
4. Заславский Г.М., Чириков Б.В. УФН, 1971, 105, с.3.
5. Контопулос Г. Неустойчивость в системах с тремя степенями свободы. В кн.: Неустойчивости в динамических системах. "Мир", М., 1982. с.25.
6. Нехорошев Н.Н. УМН, 1977, 32, вып.6, с.5.
7. Бенькова Н.П. Геомагнетизм и астрономия, 1977, 17, с.167.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 июля 1983 года.

Амирханов И.В. и др.

P11-83-505

0 режимах колебаний нелинейного трехмерного осциллятора

Рассматриваются виды стохастической неустойчивости колебаний нелинейного осциллятора и границы областей существования этих неустойчивостей. Проведено численное исследование уравнения движения заряженной частицы в магнитном поле дипольной конфигурации. Основная цель исследования - изучение стохастического движения частиц вдоль нелинейных резонансов. На основе численных и экспериментальных данных найдена скорость диффузии вдоль резонансов для стохастического режима колебаний, вызываемого модуляционными эффектами.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Amirkhanov I.V. et al.

P11-83-505

About Oscillation regimes of three-dimensional Nonlinear Oscillator

Varieties of oscillation stochastic instabilities of nonlinear oscillator and boundaries of the existence regions of these instabilities are considered. Numerical investigation of motion equation of a charged particle in a magnetic field with dipole configuration has been performed. Its main purpose was to study the stochastic motion along the nonlinear resonances. Based on numerical and experimental data diffusion rate along the resonances for stochastic oscillation regime, induced by modulation effects, has been determined.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой

Литература

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. "Наука", М., 1979.
2. Чириков Б.В. Физика плазмы, 1978, 4, с.521.
3. Ильин В.Д., Ильина А.Н. Физика плазмы, 1982, 8, с.148; ЖЭТФ, 1978, 75, с.518.
4. Заславский Г.М., Чириков Б.В. УФН, 1971, 105, с.3.
5. Контопулос Г. Неустойчивость в системах с тремя степенями свободы. В кн.: Неустойчивости в динамических системах. "Мир", М., 1982. с.25.
6. Нехорошев Н.Н. УМН, 1977, 32, вып.6, с.5.
7. Бенькова Н.П. Геомагнетизм и астрономия, 1977, 17, с.167.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 июля 1983 года.

Амирханов И.В. и др.

P11-83-505

О режимах колебаний нелинейного трехмерного осциллятора

Рассматриваются виды стохастической неустойчивости колебаний нелинейного осциллятора и границы областей существования этих неустойчивостей. Проведено численное исследование уравнения движения заряженной частицы в магнитном поле дипольной конфигурации. Основная цель исследования - изучение стохастического движения частиц вдоль нелинейных резонансов. На основе численных и экспериментальных данных найдена скорость диффузии вдоль резонансов для стохастического режима колебаний, вызываемого модуляционными эффектами.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Amirkhanov I.V. et al.

P11-83-505

About Oscillation Regimes of Three-Dimensional Nonlinear Oscillator

Varieties of oscillation stochastic instabilities of nonlinear oscillator and boundaries of the existence regions of these instabilities are considered. Numerical investigation of motion equation of a charged particle in a magnetic field with dipole configuration has been performed. Its main purpose was to study the stochastic motion along the nonlinear resonances. Based on numerical and experimental data diffusion rate along the resonances for stochastic oscillation regime, induced by modulation effects, has been determined.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой