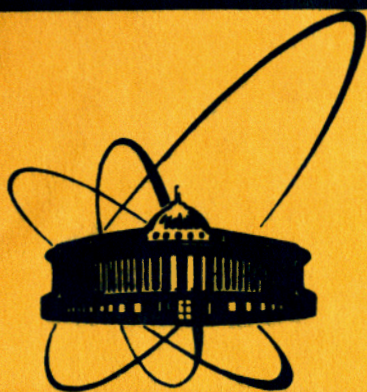


83-329



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
Дубна

4101/83

15/8-83
P11-83-329

Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский

О СТРУКТУРЕ МАТРИЦ
В МЕТОДЕ
ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

1983

Для широкого круга интегральных и интегродифференциальных уравнений математической физики ядра интегральных операторов зависят лишь от расстояния между точками либо во всей области аргументов, либо в некоторой ее части. Поэтому матрицы, возникающие после дискретизации уравнений, могут содержать блоки, являющиеся теплицевыми матрицами / T -матрицы/ либо циркулянтными матрицами / C -матрицы/ ^{1/1}. Последнее обстоятельство существенно уменьшает необходимую для хранения матрицы память ЭВМ и позволяет ускорить как прямые, так и итерационные методы решения соответствующих систем алгебраических уравнений.

В настоящей работе рассмотрим структуру матриц, возникающих при дискретизации граничных интегральных уравнений /ГИУ/ для оператора Лапласа в случае двух и трех пространственных переменных.

Пусть в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n=2,3$, с границей Γ , являющейся кривой Ляпунова, требуется найти гармоническую функцию $u(x)$, $\Delta u = 0$, $x \in \Omega$, по ее значениям на границе либо по значениям ее нормальной производной. Если Ω содержит бесконечно удаленную точку, то задачу называем внешней.

Обозначим через $\frac{\partial}{\partial n}$ производную на Γ по внутренней нормали, положим $v(s) = \frac{\partial}{\partial n} u(s)$, $s \in \Gamma$, тогда справедлива формула Грина ^{1/2/}

$$(E + \alpha K) u(s) - \alpha L v(s) = 0; \quad s \in \Gamma, \quad n = 2, 3, \quad /0.1/$$

где E - тождественный оператор, а интегральные операторы K и L определены формулами

$$Ku = \int_{\Gamma} K(x, s) u(s) ds, \quad Lv = \int_{\Gamma} \mathcal{L}(x, s) v(s) ds, \quad x, s \in \Gamma,$$

$$K(x, s) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n_s} \ln r^{-1}(x, s), \quad /0.2/$$

$$\mathcal{L}(x, s) = \frac{1}{\pi} \ln r^{-1}(x, s), \quad n = 2,$$

$$K(x, s) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_s} r^{-1}(x, s), \quad \mathcal{L}(x, s) = \frac{1}{2\pi} r^{-1}(x, s), \quad n = 3.$$

Значение $\alpha = -1$ соответствует внутренней задаче, а $\alpha = 1$ - внешней. При этом отыскание функций $u(s)$ или $v(s)$, $s \in \Gamma$, сводится к обращению операторов $E + \alpha K$ либо L . Рассмотрим оператор $E + \alpha K$.

Приближенное решение u_h уравнения $(E + \alpha K)u = f$ в случае $n = 2$ ищем согласно /2/ по методу коллокации

$$u_h(x_i) + \alpha \int_{\Gamma} K(x_i, s) u_h(s) ds = f(x_i), \quad x_i \in \omega_h, \quad (0.3/)$$

$$i = 0, 1, \dots, m, \quad x_0 = x_m,$$

где ω_h - сетка, образуемая при разбиении границы Γ точками x_i с шагом $h = \ell m^{-1}$, $\ell = \text{mes} \Gamma$.

Рассмотрим для простоты дискретизацию порядка $O(h)$, соответствующую кусочно-постоянной функции $u_h(x)$. Равенство вида /0.3/ для $n = 3$ запишем для сетки ω_h , образуемой при некотором разбиении поверхности Γ на элементы Γ_i , $\Gamma = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$, $\text{mes} \Gamma_i \leq h^2$, $d(\Gamma_i) \leq h$. В обоих случаях систему /0.3/ запишем в матричном виде:

$$(E + \alpha V) u_h = \Phi_h, \quad V: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad u_h \in \mathbb{R}^N. \quad (0.4/)$$

Если не учитывать специфику матрицы V , то массив для хранения этой матрицы может существенно превосходить соответствующий массив неизвестных для сеточных методов. Например, для сеточного прямоугольника с числом неизвестных $2p$ и $2q$ на каждой стороне требуемая память для метода ГИУ составляет $16(p+q)^2 + O(p+q)$, а при учете двух сетей симметрии $(p+q)^2 + O(p+q)$, в то время как аналогичные значения для метода конечных разностей составляют $4pq + O(p)$ и $pq + O(p)$ машинных слов соответственно. Для куба с p точками на каждом ребре и квадратной сеткой на каждой грани в методе ГИУ имеем величины $36p^4$ и $(\frac{3}{4}p^2)^2 = \frac{9}{16}p^4$, в то время как аналогичные цифры для метода конечных разностей составляют p^3 и $\frac{p^3}{8}$.

Далее покажем, что для границ, получающихся параллельным переносом либо поворотом некоторой своей части, матрица V имеет специальную блочную структуру, позволяющую существенно сократить требуемую память ЭВМ.

§1. СЛУЧАЙ $n = 2$

Рассмотрим матрицу V для прямоугольника, большая сторона которого разбита на p отрезков длины h , а меньшая на q , $q \leq p$. Вектор неизвестных $u_h \equiv u = \{u_i\}$, $i = 1, \dots, 2(p+q)$, разобьем на четыре компоненты, соответствующие каждой стороне:

$$v_1 = (u_1, \dots, u_p, 0, \dots, 0)^T, \quad v_2 = (0, \dots, u_{p+1}, \dots, u_{p+q}, 0, \dots, 0)^T,$$

$$v_3 = (0, \dots, 0, u_{p+q+1}, \dots, u_{2p+q}, 0, \dots, 0)^T, \quad (1.1/)$$

$$v_4 = (0, \dots, 0, u_{2p+q+1}, \dots, u_{2p+2q})^T.$$

Матрицу V представим в блочном виде: $V = \{A_{ij}\}$, $i, j = 1, 4$, где матрицы A_{ij} соответствуют четырем компонентам вектора u . Если точки x, y лежат на одной стороне, то $K(x, y) = 0$, поэтому $A_{ii} = 0$, $i = 1, \dots, 4$. Матрица A_{12} размером $p \times q$ общего вида с элементами

$$a_{k\ell}^{12} = \frac{(p-k+\frac{1}{2})h}{\pi} \int_0^h \frac{ds}{(p-k+\frac{1}{2})^2 h^2 + ((\ell-1)h+s)^2} \equiv \frac{(p-k+\frac{1}{2})h}{\pi} I_{k\ell}, \quad (1.2/)$$

$$k = 1, \dots, p, \quad \ell = 1, \dots, q,$$

где для ядра используем формулу $K(x, s) = \frac{1}{\pi} \frac{\cos \phi_{xs}}{r(x, s)}$. Матрица A_{14}

получается из A_{12} перенумерацией строк и столбцов:

$$A_{14} = T_p A_{12} T_q^T, \quad (1.3/)$$

где T_p и T_q - матрицы перестановок размером $p \times p$ и $q \times q$.

$$T_k = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & 1 & \dots & \\ & & \dots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad T_k^2 = E, \quad T_k: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k. \quad (1.4/)$$

Матрица A_{13} есть симметрическая Γ -матрица размером $p \times p$,

$$A_{13} = \{ a_{|j-i+1|} \}_{i, j=1}^p, \quad (1.5/)$$

и определяется p числами a_1, \dots, a_p , стоящими в первой строке. Рассмотрим блоки A_{2j} , $j = 1, \dots, 4$. Имеем

$$a_{\ell k}^{21} = \frac{(\ell - \frac{1}{2})h}{\pi} \int_0^h \frac{ds}{[(p-k+1)h-s]^2 + (\ell - \frac{1}{2})^2 h^2} \equiv \frac{(\ell - \frac{1}{2})h}{\pi} J_{k\ell}, \quad (1.6/)$$

$$\ell = 1, \dots, q; \quad k = 1, \dots, p.$$

Нетрудно видеть, что

$$I_{k\ell} = J_{k\ell} + O(h),$$

поэтому для элементов A_{21} можно использовать интегралы $I_{k\ell}$ с со-

хранением порядка аппроксимации. Но тогда

$$a_{ji}^{21} = \left(\frac{j - \frac{1}{2}}{p - i + \frac{1}{2}} \right) a_{ij}^{12}, \quad j \leq q, \quad i \leq p. \quad /1.7/$$

Обозначая $C = \{c_{ij}\}$, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$, где $c_{ij} = (j - \frac{1}{2})(p - i + \frac{1}{2})^{-1}$, и определяя операцию * между двумя $p \times q$ матрицами A и B как

$$A * B = D, \quad D = \{d_{ij}\}, \quad d_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij},$$

можно записать /1.7/ в матричном виде:

$$A_{21} = C * A_{12}^T.$$

Отметим, что матрица C легко вычисляема и ее не требуется хранить при расчетах. Как уже отмечалось, $A_{22} = 0$. Аналогично /1.3/ имеем

$$A_{23} = T_q A_{21} T_p = T_q (C * A_{12}^T) T_p. \quad /1.8/$$

Матрица A_{24} - симметрическая теплицева размером $q \times q$,

$$A_{24} = \{b_{|j-i+1|}\}_{i,j=1}^q,$$

и задается q числами b_1, \dots, b_q . Далее нетрудно получить при $i = 3, 4$

$$A_{31} = T_p A_{13} T_p, \quad A_{32} = A_{14}.$$

$$A_{34} = A_{12}, \quad A_{41} = A_{23}, \quad A_{42} = T_q A_{24} T_q.$$

$$A_{43} = A_{21}, \quad A_{44} = 0, \quad A_{33} = 0.$$

Обозначим для краткости $p \times q$ матрицу A_{12} через D, а теплицевы матрицы A_{13} и A_{24} - через A_1 и B_1 . Тогда матрица B имеет следующую структуру:

$$B = \begin{vmatrix} 0 & D & A_1 & T_p D T_q & p \\ C * D^T & 0 & T_q (C * D^T) T_p & B_1 & q \\ A_1 & T_p D T_q & 0 & D & \\ T_q (C * D^T) T_p & B_1 & C * D^T & 0 & \end{vmatrix} \quad /1.9/$$

и требует для хранения $p \times q + p + q$ машинных слов. Таким образом, представление /1.9/ позволяет реализовать итерационные методы решения /0.4/ с использованием $p \times q + O(p + q)$ машинных слов.

Основные вычислительные затраты связаны с умножением матриц A_{13} и A_{21} на вектор, т.к. умножение T-матрицы на p-вектор производится согласно /3/ за $O(p \ln p)$ действий, $p = 2^k + 1$.

Замечание 1. Для квадрата матрица B имеет вид

$$B = \begin{vmatrix} 0 & D & A & T_p D T_p \\ T_p D T_p & 0 & D & A \\ A & T_p D T_p & 0 & D \\ D & A & T_p D T_p & 0 \end{vmatrix}, \quad /1.10/$$

является одноуровневой блочно-циркулянтной матрицей и требует для хранения $p^2 + p$ ячеек памяти ЭВМ.

Замечание 2. Дальнейшая экономия памяти возможна, если учесть одну или две оси симметрии прямоугольника при переходе к уравнениям типа /3.1/ из /2/.

Замечание 3. Если область получается поворотом на угол $\frac{2\pi}{m}$ некоторой своей части, то матрица B является одноуровневой блочно-циркулянтной порядка m, обращается за $O(m^2 p^3)$ арифметических действий /4/, где mp - число неизвестных на контуре, и требует для хранения $(\frac{m}{2} - 1)p^2 + O(p)$ ячеек памяти ЭВМ при четном m и $\frac{m-1}{2} \cdot p^2 + O(p)$ - при нечетном.

Рассмотрим далее трапециoidalную область Ω , предполагая /не умаляя общности/, что проекция меньшего основания лежит на нижнем, а проекция разностной сетки меньшего основания является подобластью сетки большего основания. Обозначим соответствующие неизвестные на сторонах v^1, v^2, v^3, v^4 , где v^1 и v^3 - соответствуют параллельным отрезкам, так что $v^1 = (v_1^1, \dots, v_\ell^1)^T$, $v^3 = (v_1^3, \dots, v_k^3, v_{k+1}^3, \dots, v_{k+\ell}^3, \dots, v_p^3)^T$, причем точка v_1^1 проектируется на v_{k+1}^3 . Тогда матрицы A_{13} и A_{31} есть подматрицы T-матрицы A_1 из /1.5/ для прямоугольника:

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_1 a_2 \dots a_p & \\ a_2 a_1 \dots a_{p-1} & \\ \dots & \\ a_{k+1} a_k \dots a_{p-k} & \\ a_{k+\ell} a_{k+\ell-1} \dots a_{p-(k+\ell-1)} & \\ a_p a_{p-1} \dots a_1 & \end{vmatrix} = A_{13}.$$

Поэтому умножение матрицы A_{13} на p -вектор $x = (x_1, \dots, x_p)^T$ эквивалентно умножению T -матрицы A_1 на x и выделению из результата компонент с номерами от $k+1$ до $k+l$. Вследствие этого обращение матрицы A_{13} производится за $O(p \ln p)$ операций при $p = 2^k + 1$.

Отметим, что оператор $E + \alpha V$ легко обратим для дуги окружности, т.к. ядро K для окружности радиуса R есть $K(x, s) = \frac{1}{2\pi R}$.

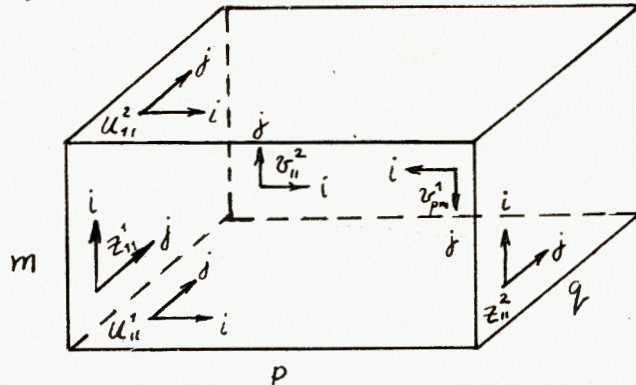
§2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАТРИЦЫ В ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Пусть поверхность параллелепипеда Π покрыта квадратной сеткой с шагом h , так что ребра содержат p, q, m отрезков длины h соответственно, причем $p \geq q \geq m$. Пронумеруем неизвестные, как показано на рисунке, $u^1, u^2, v^1, v^2, z^1, z^2$, где неизвестные u^i, v^i и z^i соответствуют противоположным граням:

$$u^1 = \{u_{ij}^1\}, \quad u^2 = \{u_{ij}^2\}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q,$$

$$v^k = \{v_{ij}^k\}, \quad k = 1, 2, \quad i \leq p, \quad j \leq m,$$

$$z^k = \{z_{ij}^k\}, \quad k = 1, 2, \quad i \leq m, \quad j \leq q,$$



Матрицу B разобьем на 36 блоков в соответствии с неизвестными на 6 гранях: $B = \{A_{ij}\}$, $i, j = 1, \dots, 6$. Очевидно, $A_{ii} = 0$, $i = 1, \dots, 6$. Рассмотрим матрицы $A_{1,j}$, $j = 2, \dots, 6$. Имеем

$$A_{12} = \{a_{|i-j+1|}\}_{i,j=1}^q \quad /2.1/$$

где a_m , $m = 1, \dots, q$, - симметрические теплицевы матрицы размером $p \times p$. Далее,

$$A_{13} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{q1} & b_{q2} & \dots & b_{qm} \end{vmatrix},$$

где b_{ij} , $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, m$ - симметрические теплицевы ($p \times p$)-матрицы. Матрица A_{15} имеет вид одноуровневой блочно-теплицевой /с симметрическим первым уровнем/ порядка $\sim q$.

$$A_{15} = \{C_{|i-j+1|}\}_{i,j=1}^q,$$

где C_1, \dots, C_q - $m \times p$ - матрицы общего вида. Легко видеть, что

$$A_{14} = T_{mp} A_{13}, \quad A_{16} = T_{pm} A_{15}, \quad /2.2/$$

где матрица перестановок T_{mp} размера $mp \times mp$ имеет вид

$$T_{mp} = \begin{vmatrix} 0 & & & E_p \\ & \ddots & & \\ & & E_p & \\ & & & 0 \\ E_p & & & \end{vmatrix}, \quad E_p = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} \quad E_p: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p. \quad /2.3/$$

Из приведенных формул видно, что первая блочная строка матрицы B размером $2(pq + qm + mp) \times pq$ требует для хранения всего $2pqm + pq$ машинных слов. Аналогичные выводы можно сделать относительно остальных пяти строк, причем для хранения каждой следующей строки требуется памяти ЭВМ меньше, чем для предыдущих, т.к. имеются блоки, легко выражающиеся через предыдущие /аналогично случаю прямоугольника/. В итоге общая память, необходимая для хранения матрицы B , есть $O(pqm)$, т.е. совпадает по порядку с соответствующей для сеточных методов.

Естественно, что наибольшая экономия памяти в классе параллелепипедов достигается для кубической области ($p = q = m$). Рассмотрим этот случай более подробно. Согласно /2.1/, /2.2/ имеем /обозначим $A_2 = A_{12}$, $B_1 = A_{13}$, $C_1 = A_{15}$ / $A_{14} = T_{pp} B_1$; $A_{16} = T_{pp} C_1$, где между матрицами B_1 и C_1 , определенными выше, есть простая связь. Обозначим элементы $B_1 = \{b_{kl}^{ij}\}$, $i, j = 1, \dots, p$; $k, l = 1, \dots, p$, где нижний индекс означает номер блока, а верхний - номер элемента внутри блока. Аналогично для $C_1 = \{c_{kl}^{ij}\}$. Учитывая нумерацию неизвестных на гранях, легко получить

$$C_{kl}^{ij} = b_{ij}^{kl}, \quad k, l = 1, \dots, p; \quad i, j = 1, \dots, p. \quad /2.4/$$

Перестановочные соотношения /2.4/ обозначим $C_1 = GB_p$, матрицу перестановок T_{pp} обозначим T , тогда матрица B примет вид

$$B = \begin{vmatrix} 0 & A_2 & B_1 & TB_1 & GB_1 & TGB_1 \\ A_2 & 0 & B_1T & TB_1T & GB_1T & TGB_1T \\ B_1 & TB_1 & 0 & A_2 & G_1B_1 & TG_1B_1 \\ B_1T & TB_1T & A_2 & 0 & G_1B_1T & TG_1B_1T \\ GB_1 & TGB_1 & G_2B_1 & TG_2B_1 & 0 & A_2 \\ GB_1T & TGB_1T & G_2B_1T & TG_2BT & A_2 & 0 \end{vmatrix} /2.5/$$

где

$$G_1B = C, \{c_{kl}^{ij}\} = \{b_{il}^{kj}\}, G_2B = D, \{d_{kl}^{ij}\} = \{b_{jl}^{ik}\}.$$

Так как преобразования перестановок T, G, G_1, G_2 выполняются лишь в процессе умножения матрицы на вектор, то для хранения B требуется массив размером $p^3 + p^2$ ячеек для элементов матриц A_2 и B_1 . Кроме того, справедливы формулы $T^2 = E, G^2 = E, G_1^2 = E, G_2^2 = E$.

Аналогично предыдущему имеет место экономичное представление матрицы B , соответствующей, например, шаровому сегменту или правильному многограннику. Рассмотренные выше представления позволяют существенно ускорить прямые и итерационные методы обращения оператора $E + \alpha B, \alpha = \pm 1$.

Отметим в заключение, что в случае интегрального оператора L из /0.2/, соответствующего задаче Дирихле, имеются аналогичные возможности для экономии памяти ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воеводина С.Н. Клеточно-теплицевы матрицы и интегральные уравнения Фредгольма. В кн.: Вычислительные методы и программирование. Изд-во МГУ, 1975, вып.24, с.91-94.
2. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Юлдашев О.И. ОИЯИ, P11-82-659, Дубна, 1982.
3. Бадева В., Морозов В.А. Алгоритмы быстрого и ускоренного решения некоторых специальных систем линейных алгебраических уравнений. В кн.: Численный анализ на фортране. Изд-во МГУ, 1977, вып.20, с.80-90.
4. Воеводин В.В., Тартышников Е.Е. Численные методы решения задач с матрицами типа теплицевых. ЖВМ и МФ, 1981, т.21, № 3, с.531-544.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 июня 1983 года.

Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. P11-83-329
О структуре матриц в методе граничных интегральных уравнений для оператора Лапласа

Рассмотрена структура матриц, возникающих при дискретизации граничных интегральных уравнений для оператора Лапласа в случае двух и трех пространственных переменных. Показано, что для ряда областей, граница которых содержит параллельные элементы, соответствующие матрицы имеют специальную блочную структуру, позволяющую существенно сократить необходимую для их хранения память ЭВМ. Результаты могут быть использованы для ускорения как прямых, так и итерационных методов решения возникающих линейных систем алгебраических уравнений.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Zhidkov E.P., Khoromskij B.N. P11-83-329
The Structures of Matrices in the Method of Boundary Integral Equations for the Laplace Operator

The structure of matrices occurring at discretization of boundary integral equations for Laplace operator for the cases of one and two space variables is considered. It is shown that for some regions with boundaries having parallel elements the corresponding matrices have the special block structure, which allows one to decrease considerably the memory volume necessary to store these matrices. The results may be used for accelerating the direct as well as iterational methods of solution of corresponding linear systems of algebraic equations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой.