объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р11-83-261

Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики".

1983

Рассмотрим краевую задачу для функций $u_i(x)$, $i = 1,2$, в двумерной или трехмерной области R^n, $n = 2,3$.

$$
\begin{aligned}
&\Delta u_1(x) = f(x), \quad x \in \Omega_e, \quad u_1(\infty) = 0, \\
&\operatorname{div}(\mu(|\operatorname{grad} u_2|)\operatorname{grad} u_2) = 0, \quad x \in \Omega_i, \\
&u_1 = u_2, \; \mu(|\operatorname{grad} u_2|)\frac{\partial u_2}{\partial n} = \frac{\partial u_1}{\partial n}, \quad x \in \Gamma,
\end{aligned}
\qquad /0.1/
$$

где кривая /или поверхность/ Ляпунова Γ является общей границей областей Ω_e /внешняя область/ и Ω_i /внутренняя область/, $R^n = \Omega_e \cup \Gamma \cup \Omega_i$, а $\frac{\partial}{\partial n}$ означает производную по внутренней нормали к границе Γ.

В работе /1/ для случая $n = 2$ предложен итерационный процесс решения системы /0.1/ методом альтернирования по подобластям без налегания Ω_e и Ω_i. При некоторых предположениях относительно спектра оператора K

$$
Ku = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_s}\ln r^{-1}(x, s)u(s)\,ds, \quad x, s \in \Gamma, \qquad /0.2/
$$

установлена сходимость итераций при $\mu = \mathrm{const}$ со скоростью геометрической прогрессии. Приведены численные примеры, иллюстрирующие эту сходимость. Существенно, что скорость сходимости не зависит от шага дискретизации.

В настоящей работе установлена сходимость процесса альтернирования для $\mu = \mathrm{const}$ и $n = 2,3$ со скоростью геометрической прогрессии, без предположений относительно спектра оператора K, т.е. для произвольного контура Γ без самопересечений, являющегося кривой /или поверхностью/ Ляпунова.

Используя экономичные алгоритмы решения граничных интегральных уравнений /ГИУ/ для таких областей, как окружность, прямоугольник, шар, параллелепипед и т.п., и метод альтернирования, можно построить оптимальные по порядку числа арифметических действий методы решения системы /0.1/ для широкого класса областей.

§1. РАЗРЕШИМОСТЬ СИСТЕМЫ /0.1/ И ФОРМУЛИРОВКА ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим функцию $u_0(x)$, $x \in R^n$; $n = 2,3$, являющуюся решением задачи

$$
\begin{aligned}
&\Delta u_0 = f(x), \quad x \in R^n, \quad u_0(\infty) = 0, \\
&f(x) = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad f \in C(R^n).
\end{aligned}
\qquad /1.1/
$$

При условии

$$
\int_{R^n} f(x)\,dx = 0
$$

функция $u_0(x)$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
&u_0(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{R^2} f(y)\ln r(x, y)\,dy, \quad n = 2, \\
&u_0(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{R^3} f(y) r^{-1}(x, y)\,dy, \quad n = 3, \quad r(x, y) = (x - y).
\end{aligned}
\qquad /1.2/
$$

Пусть $\mu = \mathrm{const}$. Функцию $u_1(x)$, как в работе /1/, представим в виде

$$
u_1 = u_0 + v_1; \quad \Delta v_1 = 0, \quad x \in \Omega_e, \quad v_1(\infty) = 0. \qquad /1.3/
$$

Тогда для функций $u_2(x)$ и $v_1(x)$ имеют место следующие ГИУ на границе Γ:

$$
\begin{cases}
(E - K)u_2 + L\dfrac{\partial u_2}{\partial n} = 0, \\
(E + K)v_1 - L\dfrac{\partial v_1}{\partial n} = 0,
\end{cases}
\qquad /1.4/
$$

где интегральные операторы K и L определены формулами

$$
Ku = \int_\Gamma K(x, s)u(s)\,ds, \quad Lv = \int_\Gamma \mathcal{L}(x, s)v(s)\,ds,
$$

$$
\mathcal{L}(x, s) = \frac{1}{\pi}\ln r^{-1}(x, s), \quad n = 2; \quad x, s \in \Gamma,
$$

$$
K(x, s) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_s} r^{-1}(x, s), \quad \mathcal{L}(x, s) = \frac{1}{2\pi} r^{-1}(x, s), \quad n = 3,
$$

и выражением /0.2/ при $n = 2$.

Систему /1.4/ с учетом /1.3/ перепишем в виде

$$(E+K)u - L\mu v = (E+K)u_0 - L\frac{\partial u_0}{\partial n} \equiv \Psi, \qquad /1.5/$$

$$(E-K)u + Lv = 0,$$

$$u = u_1 = u_2, \quad v = \frac{\partial u_2}{\partial n} \equiv \frac{\partial u}{\partial n}, \quad x \in \Gamma.$$

Второе из уравнений /1.5/ имеет место лишь в случае $\mu = \mathrm{const}$. В общем случае оно имеет вид /0.1/ при $x \in \Omega_i$, что мы и будем предполагать в дальнейшем. Аналогично [1] рассмотрим следующий итерационный процесс. Пусть задано приближение $u_k \in C(\Gamma)$, тогда очередные значения v_{k+1} и u_{k+1} определим последовательно из уравнений

$$(E-K)u_k + Lv_{k+1} = 0,$$

$$(E+K)u_{k+½} - L\mu v_{k+1} = \Psi(x), \qquad /1.6/$$

$$u_{k+1} = \omega u_k + (1-\omega)u_{k+½}, \quad 0 \le \omega \le 1.$$

Итерационный процесс сводится к решению задачи Дирихле в области Ω_i и затем внешней задачи Неймана в области Ω_e с последующей релаксацией. Если μ отлично от константы, то первое из равенств имеет вид

$$\mathrm{div}\,(\mu(|\mathrm{grad}\,u|)\,\mathrm{grad}\,u) = 0, \quad u_\Gamma = u_k,$$

$$v_{k+1} = \frac{\partial u}{\partial n}, \quad x \in \Gamma. \qquad /1.7/$$

Исследуем сходимость процесса /1.6/ и условия разрешимости систем /0.1/, /1.5/ для $\mu = \mathrm{const}$. Эффективность итераций /1.6/, /1.7/ при $\mu(t) = (\epsilon + t)(1+t)^{-1}$, $\epsilon > 0$, проиллюстрирована в [1].

Исключая v из системы /1.5/, находим

$$(1+\mu)Eu + (1-\mu)Ku = \Psi(x). \qquad /1.8/$$

Обозначим плотность потенциала Робена через $g_0(s)$, где $K^* g_0 = g_0$. Имеет место

Лемма 1. Пусть Γ- кривая /поверхность/ Ляпунова, ограничивающая односвязную область $\Omega \in R^n$, $n = 2,3$. Тогда при $0 \le \mu \le 1$ система /1.5/ имеет единственное решение $u \in C(\Gamma)$, $v \in L_2(\Gamma)$. При $n=2$ единственность $v(x)$ имеет место в классе $(v,1) = 0$ при условии $Lg_0 \ne 0$.

Доказательство приводится в §3.

§2. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ K И L

Ряд свойств операторов K и L при $n=2$ установлен в [2]. Здесь рассмотрим спектральные свойства K и L для $n = 2,3$, необходимые в дальнейшем. Во-первых, отметим, что $L: L_2(\Gamma) \to C(\Gamma)$; $K: L_2(\Gamma) \to C(\Gamma)$, $L = L^*$. Имеет место

Лемма 2. Оператор L положительно определен в $L_2(\Gamma)$ при $n=3$, а при $n=2$ $L > 0$ на множестве функций $(u,1) = 0$.

Доказательство. Пусть $\Delta u = 0$, $x \in \Omega$; $v = \frac{\partial u}{\partial n} \in L_2(\Gamma)$, тогда справедливо неравенство

$$(u,v) = -\int_\Omega (\nabla u)^2 dx < 0, \quad u \ne 0, \qquad /2.1/$$

которое есть следствие формулы Грина

$$0 = -\int_\Omega u\Delta u\,dx = \int_\Omega (\nabla u)^2 dx + \int_\Gamma u\frac{\partial u}{\partial n}\,ds.$$

Рассмотрим произвольную функцию $z(s) \in L_2(\Gamma)$, такую, что $(z,1) = 0$. Пусть функция $u(s) \in C(\Gamma)$ определена равенством

$$2u = Lz, \qquad /2.2/$$

тогда

$$(u, g_0) = (Lz, g_0) = (z, Lg_0) = (z, \mathrm{const}) = 0.$$

Рассмотрим далее решения внешней и внутренней задач Дирихле для области, ограниченной кривой /поверхностью/ Γ, с граничным значением $u_\Gamma = u$. Так как $(u, g_0) = 0$, то $u(\infty) = 0$. Для соответствующих нормальных производных $v_1(s)$ и $v_2(s)$, $s \in \Gamma$, справедливы равенства

$$(E-K)u + Lv_1 = 0, \quad v_i \in L_2(\Gamma),$$

$$(E+K)u - Lv_2 = 0, \quad (v_i, 1) = 0, \quad i = 1,2.$$

При этом $2u = -L(v_1 - v_2) = Lz$, откуда $z = -(v_1 - v_2)$, $-2(u,z) = (Lz,z)$. В силу /2.1/ имеем

$$(u, v_1) = -\int_{\Omega_i} (\nabla u)^2 dx,$$

$$-(u, v_2) = -\int_{\Omega_e} (\nabla u)^2 dx,$$

$$(u, v_1 - v_2) = - \int_{R^n} (\nabla u)^2 dx < 0.$$

Интеграл по области Ω_e существует при условии $u(\infty) = 0$ [3]. В итоге получаем

$$(Lz, z) = \int_{R^n} (\nabla u)^2 dx > 0; \quad n = 2,3 \quad (z, 1) = 0. \qquad /2.3/$$

Далее заметим, что $(g_0, 1) \neq 0$ [3], поэтому для всякой $v \in L_2(\Gamma)$ справедливо представление

$$v = v_0 + \alpha g_0, \quad (v_0, 1) = 0,$$

откуда

$$(Lv, v) = (Lv_0, v_0) + 2\alpha (Lv, g_0) + \alpha^2 (Lg_0, g_0).$$

Второе слагаемое равно нулю в силу равенства $Lg_0 = \text{const}$, а при $n = 3$ имеем $(Lg_0, g_0) > 0$, откуда и следует утверждение Леммы.

Лемма 3. Для односвязного контура /поверхности/ Γ число $\lambda = -1$ не является собственным значением оператора K. Однократному собственному значению $\lambda = 1$ не соответствует ни один присоединенный вектор /то же для K^*/.

Доказательство. Первое утверждение доказано в [3]. Предположим, что существует присоединенный вектор v, так что $(E - K)v \neq 0$, $(E - K)^m v = 0$, $m \geq 2$. Тогда $(E - K)^{m-1} v = 1$, или, полагая $z = (E - K)^{m-2} v$, имеем $(E - K)z = 1$. Умножая обе части последнего равенства скалярно на g_0, получим

$$(1, g_0) = ((E - K)z, g_0) = (z, (E - K^*)g_0) = 0,$$

что противоречит соотношению $(g_0, 1) \neq 0$.
Лемма доказана.

Лемма 4. $Jm\sigma(K) = 0$, где $\sigma(K)$ - спектр оператора K. Кроме того, $\sigma(K) \in (-1, 1]$.

Доказательство. Пусть $u(x)$ - гармоническая в области Ω_e функция $u(\infty) = 0$ и $v(s) = \dfrac{\partial u}{\partial n} \in L_2(\Gamma)$, $s \in \Gamma$. При этом $(v, 1) = 0$. Рассмотрим оператор $G = (E + K)^{-1} L$, ставящий в соответствие $G: v(s) \to u(s)$ $s \in \Gamma$ в силу равенства $(E + K)u - Lv = 0$. Этот оператор положительно определен в силу /2.1/ для $\Omega = \Omega_e$, а именно:

$$(Gv, \bar{v}) = (u, \bar{v}) = \int_{\Omega_e} \nabla u \nabla \bar{u} \, dx \geq 0.$$

С другой стороны,

$$(Gv, \bar{v}) = (v, L(E + K^*)^{-1} \bar{v}) \geq 0,$$

откуда следует, что $Jm\sigma(K^*) = 0$, а значит, спектр $\sigma(K)$ также вещественный на инвариантном подпространстве $(v, 1) = 0$. Так как всякая $u(s) \in L_2(\Gamma)$ единственным образом представима в виде $u = v + \alpha g_0$, $(v, 1) = 0$, а собственное значение, соответствующее вектору g_0, равно 1, то $Jm\sigma(K^*) = 0$, $Jm\sigma(K) = 0$.

Чтобы доказать соотношение $\sigma(K) \in (-1, 1]$, предположим противное, т.е. $\lambda \in \sigma(K)$, $\lambda \notin (-1, 1]$. В силу предыдущего $Jm\lambda = 0$. Рассмотрим два случая: 1/ $\lambda > 1$, 2/ $\lambda < -1$. В первом случае рассмотрим решение внутренней задачи Дирихле с краевым значением, являющимся собственной функцией оператора K, $Ku = \lambda u$, $\lambda > 1$. Из равенства $(E - K)u + Lv = 0$ находим $\mu u + Lv = 0$, где $\mu = 1 - \lambda < 0$. Умножая это равенство скалярно на v и учитывая неравенство /2.1/, получим $-\mu(u, v) = (Lv, v)$. Но $(Lv, v) > 0$, а $(u, v) < 0$, что противоречит предположению $\lambda > 1$. Аналогично во втором случае, $\lambda < -1$, рассмотрим решение внешней задачи Дирихле для $u(s)$, такой, что $Ku = \lambda u$. При этом в силу биортогональности собственных функций операторов K и K^* имеем $(u, g_0) = 0$, т.е. $u(\infty) = 0$. Поэтому справедлива формула Грина $(E + K)u - Lv = 0$. Умножая последнее равенство скалярно на v, получим $\mu(u, v) = (Lv, v)$, что опять противоречит /2.1/, т.к. $\mu = 1 + \lambda < 0$, а $(u, v) > 0$.
Лемма доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИЙ /1.6/

Докажем Лемму 1. В силу фредгольмовости оператора K достаточно установить, что число $\lambda = \dfrac{\mu + 1}{\mu - 1} \notin \sigma(K)$. Но это следует из результата Леммы 4, т.к. $\sigma(K) \in (-1, 1]$, а $\lambda \leq -1$ при $0 \leq \mu \leq 1$. Единственность v при $n = 3$ следует из Леммы 2, а при $n = 2$ из Леммы 1 работы [2]. Лемма 1 доказана.

Сформулируем далее основное утверждение о сходимости итераций /1.6/. Обозначим $\lambda_m = \min\limits_{\lambda \in \sigma(K)} \lambda$. Согласно [1] оператор перехода T для итераций /1.6/ имеет вид

$$u_{k+1} = [(\omega - \mu(1 - \omega))E + 2\mu(1 - \omega)(E + K)^{-1} K] u_k \equiv Tu_k. \qquad /3.1/$$

Имеет место

Теорема 1. Пусть $0 \le \mu \le 1$. Тогда итерационный процесс /1.6/ для односвязной области $\Omega \subset R^n$; $n = 2,3$, ограниченной кривой /поверхностью/ Ляпунова Γ, сходится при параметре релаксации

$$\omega = \omega^* = \frac{\mu(0{,}5 - \Lambda_m)}{1 + \mu(0{,}5 - \Lambda_m)}, \quad \Lambda_m = \lambda_m(1 + \lambda_m)^{-1}, \qquad /3.2/$$

со скоростью геометрической прогрессии

$$\|u_n - u^*\|_* < (\rho + \epsilon)^n \|u_0 - u^*\|_*, \quad \rho = \omega^* < 1, \qquad /3.3/$$

где $\epsilon > 0$ - сколь угодно малое число, а норма $\|\cdot\|_*$ эквивалентна норме пространства $C(\Gamma)$. Если

$$(v_m, v_m^*) \neq 0, \qquad K v_m = \lambda_m v_m, \quad K^* v_m^* = \lambda_m v_m, \qquad /3.4/$$

то можно положить $\epsilon = 0$.

Доказательство. Рассмотрим спектральный радиус оператора перехода $\rho(T)$. Поскольку оператор $K(E+K)^{-1}$ вполне непрерывен, то $\rho(T)$ совпадает с максимальным по модулю собственным числом оператора T[4]. Согласно Лемме 4 спектр $\sigma(K)$ - вещественный, поэтому

$$\min_{\omega} \rho(T) = \min_{\omega} \max\{|F(\Lambda_m, \omega)|, \ |F(\Lambda_M, \omega)|\}, \qquad /3.5/$$

где

$$F(\Lambda, \omega) = 2\mu(1 - \omega)\Lambda + \omega(1 + \mu) - \mu,$$

$$\Lambda_M = \max_{\lambda \in \sigma(K)} \lambda(1 + \lambda)^{-1}.$$

Условие /3.5/ достигается при

$$\omega = \omega^* = -\frac{\mu(\Lambda_M + \Lambda_m - 1)}{1 - \mu(\Lambda_M + \Lambda_m - 1)}, \qquad /3.6/$$

при этом

$$\rho(T) = \frac{\mu(\Lambda_M - \Lambda_m)}{1 - \mu(\Lambda_M + \Lambda_m - 1)}. \qquad /3.7/$$

Так как $\sigma(K) \subset (-1,1]$, то $\Lambda_M = 0{,}5$, а ввиду $\Lambda_m \le 0$ имеем $\omega^* = \rho(T) < 1$ при всех $\mu \ge 0$, чем и устанавливается /3.2/. Далее, для всякого

$\epsilon > 0$ согласно [5] для эквивалентной нормы

$$\|x\|_* = (\rho + \epsilon)^{n-1}\|x\| + (\rho + \epsilon)^{n-2}\|Tx\| + \ldots + \|T^{n-1}x\| \qquad /3.8/$$

справедливо $\rho < \|T\|_* < \rho + \epsilon$, откуда и следует /3.3/.

Как отмечено в [5], существует эквивалентная норма, удовлетворяющая соотношению $\|T\|_* = \rho(T)$, если собственным числам, равным по модулю $\rho(T)$, не соответствуют присоединенные вектора. В нашем случае имеется лишь два собственных числа, для которых $|\lambda| = \rho(T)$. Они соответствуют собственным числам $\lambda = 1$ и $\lambda = \lambda_m$ оператора K. В Лемме 3 установлено, что $\lambda = 1$ не имеет присоединенных векторов для оператора K, а условие /3.4/ гарантирует то же для $\lambda = \lambda_m$. Отсюда следует, что собственным числам $F(\Lambda_M, \omega^*)$ и $F(\Lambda_m, \omega^*)$ оператора перехода T также не соответствуют присоединенные вектора, а значит, /3.3/ выполнено при $\epsilon = 0$ в соответствующей норме. Теорема доказана.

Отметим, что знаменатель геометрической прогрессии /3.3/ пропорционален μ, т.е. итерационный процесс сходится тем быстрее, чем больше отношение предельных значений коэффициента μ на линии /поверхности/ разрыва Γ.

Проиллюстрируем Теорему 1 на примере круга и шара. Для круга имеем $\sigma(K) = \{0\} \cup \{1\}$, т.к. $Ku = \frac{1}{2\pi R}\int_{\Gamma} u(s)\,ds$. Если $u(\infty) = 0$, то $(u, 1) = 0$ и на инвариантном подпространстве $(u, 1) = 0$ получим $K = 0$, т.е. процесс сходится за одну итерацию при $\omega^* = \frac{\mu}{1+\mu}$, $\rho = 0$, если положить в /3.6/, /3.7/ $\Lambda_M = \Lambda_m = 0$.

Для шара радиуса R легко установить соотношение $K = \frac{1}{2R}L$, т.е. $K = K^* > 0$; $\sigma(K) \subset [0,1]$. Поэтому $\Lambda_M = 0{,}5$, $\Lambda_m = 0$ и из /3.2/, /3.3/ находим $\rho = \omega^* = \frac{\mu}{2+\mu}$. В частности, при $\mu = 1$ получаем $\rho = 1/3$. Другие примеры сходимости итераций /1.6/ даны в работе [1], где рассмотрен случай многосвязной области и приведены соответствующие результаты численных расчетов.

Замечание 1. Если область $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i$ имеет N компонент связности, причем $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{N} \Gamma_i$, то имеет место утверждение, аналогичное Теореме 1. В этом случае также $L = L^* > 0$, $\sigma(K) \subset (-1,1]$. Отличие состоит в том, что $\lambda = 1$ является N-кратным собственным значением оператора K с собственными функциями

$$v_i(s) = \begin{cases} 1, & s \in \Gamma_i, \\ 0, & s \in \Gamma \setminus \Gamma_i, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Замечание 2. В случае, когда второе из уравнений /0.1/ является квазилинейным, т.е. $\mu \neq \mathrm{const}$, численные эксперименты также указывают на экспоненциальное убывание погрешности в итерационном методе

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{div}(\mu(|\operatorname{grad} u|)\operatorname{grad} u) = 0, \quad u_{\Gamma} = u_k, \quad x \in \Omega_i, \\
&v_{k+1} = \frac{\partial u}{\partial n}, \quad s \in \Gamma, \\
&(E+K)u_{k+1/2} - L\mu v_{k+1} = \Psi(x), \quad x \in \Gamma, \\
&u_{k+1} = \omega u_k + (1-\omega)u_{k+1/2}, \quad \omega = \frac{\mu(u_k)}{1+\mu(u_k)},
\end{aligned}
\qquad /3.9/
$$

что можно видеть из табл.1 /1/.

Отметим, что другие способы построения граничных условий в методе разделения областей рассматриваются, например, в /6-8/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айрян Э.А. и др. ОИЯИ, Р11-82-871, Дубна, 1982.
2. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Юлдашев О.И. ОИЯИ, Р11-82-659, Дубна, 1982.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. "Наука", М., 1976.
4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. "Наука", М., 1977.
5. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. "Наука", М., 1969.
6. Матвеева Э.И., Пальцев Б.В. ЖФМ и МФ, 1973, т.13, № 6, с.1441-1452.
7. Осмоловский В.Г., Ривкинд В.Я. ЖВМ и МФ, 1981, т.21, № 1, с.35-39.
8. Мацокин А.М., Непомнящих С.В. В сб.: Вариационно-разностные методы в математической физике. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1981, с.85-97.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 апреля 1983 года.

Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Р11-83-261

Итерационный метод решения краевых задач для одного класса эллиптических уравнений

Сформулирован метод итераций по подобластям без налегания для одного класса квазилинейных эллиптических уравнений в случае двух и трех пространственных переменных. Для случая кусочно-постоянного коэффициента уравнения установлено экспоненциальное убывание погрешности итераций для произвольной области, ограниченной кривой /или поверхностью/ Ляпунова. Исследованы спектральные свойства граничных интегральных операторов, участвующих в итерационном процессе.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Zhidkov E.P., Khoromskij B.N. P11-83-261