

M-36

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



203/2-75

P11 - 8245

203/2-75

В.Г.Маханьков, Ю.Г.Поляк

ОБ АДЕКВАТНОСТИ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
СЛОЖНЫХ СИСТЕМ УПРОЩЕННЫМИ СИСТЕМАМИ  
(МЕТОД МАКРОЧАСТИЦ)

**1974**

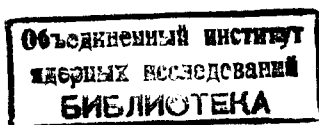
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ  
ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

P11 - 8245

В.Г.Маханьков, Ю.Г.Полляк

ОБ АДЕКВАТНОСТИ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
СЛОЖНЫХ СИСТЕМ УПРОЩЕННЫМИ СИСТЕМАМИ  
(МЕТОД МАКРОЧАСТИЦ)

*Направлено в ЖТФ*



## §1. Введение

Часто приходится изучать поведение систем, состоящих из большого количества подсистем. При этом обычно интересуются лишь незначительным по сравнению с числом подсистем количеством усредненных параметров, описывающих систему. В результате появляется возможность моделировать исходную систему меньшим количеством укрупненных подсистем.

В настоящее время в физике плазмы, электронных пучков и динамике звезд широко применяется метод моделирования, реализующий эти идеи и получивший название метода укрупненных частиц. Существо метода состоит в замене системы, состоящей из  $10^{10} - 10^{15}$  взаимодействующих друг с другом частиц, системой меньшего, скажем,  $10^2 - 10^4$ , числа укрупненных частиц <sup>1, 2/</sup>. При этом укрупнение частиц и начальные параметры подбираются таким образом, чтобы оставались неизменными основные величины, характеризующие взаимодействия в системе /подробнее см. <sup>3/</sup> и §3/. Естественно, возникает вопрос об адекватности такого моделирования, о получении некоторых численных критериев его точности.

Ниже в §2 приводятся общие результаты, касающиеся получения упомянутых критериев, а §3 посвящен применению их к конкретному случаю моделирования изотропной плазмы методом укрупненных частиц.

## §2. Методы контроля точности моделирования

Наиболее естественный, непосредственный контроль точности упрощенной математической модели сводится к сравнению показателей, полученных с помощью этой модели, с показателями, полученными экспериментально или найденными с помощью "полной" модели, отражающей все известные исследователю свойства системы. Однако физический эксперимент зачастую оказывается "грязным" или затруднительным по техническим причинам /а в случае моделирования гипотетических, например - проектируемых систем - вообще невозможны, поскольку моделируемой системы физически еще не существует/. Полное моделирование также может оказаться затруднительным из-за ограниченной мощности вычислительных средств. Именно так обстоит дело с упомянутыми выше проблемами моделирования плазмы, где полное моделирование потребовало бы оперирования с числом частиц порядка  $10^{10} - 10^{14}$ .

В связи с этим были разработаны методы косвенного контроля точности моделирования, не связанные с экспериментальным исследованием или полным моделированием изучаемой системы и основанные на анализе систематически усложняемых /и уточняемых/ моделей  $\{\mu_i\}$ , менее сложных, чем контролируемая модель  $\mu$  на анализе последовательности  $\{Q_{\mu_i}\}$  оцениваемых на моделях  $\{\mu_i\}$  показателей  $Q_{\mu_i}$  /4,5/. О погрешности моделирования

$$\epsilon = Q - Q_{\mu}, \quad /1/$$

где  $Q$  - "истинное" значение показателя, которое можно было бы получить с помощью полной модели, судят в этом случае по сходимости последовательности  $\{Q_{\mu_i}\}$ , соответствующей регулярному изменению сложности модели. Такая методика опирается на гипотезу о существовании зависимости между сложностью и погрешностью моделей, входящих в  $\{\mu_i\}$ . Восстановив эту зависимость при испытании менее сложных моделей, можно в дальнейшем экстраполировать погрешность по заданному значе-

нию сложности интересующей исследователя модели из ряда  $\{\mu_i\}$ .

Возможность практического использования предлагаемого подхода к контролю точности во многом определяется выбором количественной характеристики сложности  $C_i = C(\mu_i)$  моделей  $\mu_i$ : зависимость погрешности моделирования  $\epsilon = \epsilon(C)$  от сложности модели  $C$  должна быть достаточно проста и допускать параметризацию. Можно использовать, в частности, структурно-информационные характеристики сложности, зависящие от числа и разнообразия типов используемых в модели элементов и связей, а также связанные с ними программно-алгоритмические характеристики сложности /время выполнения программы  $T$ , требуемый объем памяти  $\Pi$ , вычислительная мощность  $T \times \Pi$  и т.д./.

В частности, сложность модели, построенной на основе упоминаемого в §1 метода макрочастиц, определяется числом макрочастиц.

Поскольку суждение о точности модели по ее сложности основано на существовании гладкой зависимости  $\epsilon = \epsilon(C)$ , то модели, входящие в последовательность  $\{\mu_i\}$ , должны относиться к одному, должным образом ограниченному классу. Это означает прежде всего одинаковость языка, используемого для описания моделей  $\mu_i$ , и единство их специализации /в частности, тот же состав показателей  $Q$ , для оценки которых предназначены модели/. На практике могут быть использованы различные методы упрощения модели, обеспечивающие регулярное изменение ее сложности и точности, а именно:

1. Представление системы, состоящей из большого числа одинаковых, связанных между собой подсистем /блоков, элементов/, меньшим числом подсистем без изменения свойств подсистем и связей между ними. Таким образом, упрощенные модели составляют некоторую часть полной модели; при этом оцениваемые на них показатели приводятся к первоначальному числу элементов или к единичному элементу.

2. Разбиение подсистем рассматриваемой выше однородной системы на одинаковые группы, представление групп обобщенными подсистемами. При этом появляются

характеристики связей между исходными подсистемами.

3. Дискретизация моделируемых процессов или полей по времени, пространству и по уровню.

4. Некоторые виды аппроксимации процессов и операторов, входящих в модель.

Перечисленные здесь /и многие другие - см. /5/ / методы регулярного упрощения используются при решении поставленных в §1 задач: частным случаем метода 2 является упомянутый выше метод макрочастиц; формирование макрочастиц основано на различных способах аппроксимации поля.

Если последовательность моделей  $\{\mu_i\}$  образована одним из регулярных /например, описанных выше/ способов, то оценка систематической погрешности моделирования  $\epsilon$  может быть основана на представлении зависимости  $\epsilon = \epsilon(C)$  в виде

$$\epsilon = \epsilon(C, \vec{\gamma}), \quad /2/$$

где вид функции  $\epsilon(C, \vec{\gamma})$  и значение параметра  $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$  зависят от принятого способа формирования  $\{\mu_i\}$ . Записывая на основании /1/, /2/ уравнения

$$\epsilon_i = Q - Q_{\mu_i} = \epsilon(C_i, \vec{\gamma}), \quad /3/$$

$$i = 0, 1, \dots, r; r \geq s$$

для последовательности моделей  $\{\mu_i\}$ , имеющих сложность  $C_i$ , можно восстановить параметры  $\vec{\gamma}$  и найти значение  $Q$  по полученным в результате машинного эксперимента /расчета/ значениям показателей  $Q_{\mu_i}$ . В некоторых задачах химической физики такая экстраполяция результатов моделирования оказывается практически реализуемой /6, 7/. Тем не менее, в большинстве случаев прогноз значения  $Q$  оказывается затруднительным, поскольку трудно рассчитывать на полную адекватность гипотетической зависимости /2/, реальной зависимости между точностью и сложностью моделей ряда  $\{\mu_i\}$  и на безошибочность вычисления значений  $Q_{\mu_i}$ . В этих случаях можно ограничиться более грубыми оценками погрешности  $\epsilon_i$ .

Пусть, например, зависимость /2/ имеет вид

$$\epsilon = \gamma_1 C^{-\gamma_2}. \quad /4/$$

Тогда решение  $i$ -го и  $/i-1/$ -го уравнений системы /3/ дает

$$\epsilon_i = (Q_i - Q_{i-1}) / (\kappa_i^{\gamma_2} - 1), \quad /5/$$

где  $\kappa_i = C_i / C_{i-1}$ . Из /5/ следует, что для любого  $\gamma_2 > 0$  можно подобрать такое значение  $\kappa_i = 2^{1/\gamma_2}$  и, следовательно, так выбрать модель  $\mu_i$ , чтобы

$$|\epsilon_i| \leq |Q_i - Q_{i-1}|. \quad /6/$$

В частности, при  $\gamma_2 \geq 1$  для этого необходимо удваивать, при  $\gamma_2 \geq 1/2$  - учетверять сложность модели  $\mu_i$  по сравнению со сложностью модели  $\mu_{i-1}$ . Если фактически существующая зависимость  $\epsilon = \epsilon(C)$  затухает быстрее принятой для расчета гипотетической зависимости, то полученная оценка погрешности может рассматриваться как "мажорирующая".

Следует заметить, что /4/ имеет место при различных способах регулярного упрощения модели, в частности, при дискретной аппроксимации интегральных операторов /способ 4, выше/, кусочно-аналитической аппроксимации плотностей вероятностей и т.д. В §3 будет показано, что эта зависимость может быть использована для представления основной составляющей погрешности метода макрочастиц. Поэтому данные выше соотношения могут быть непосредственно применимы при решении обсуждаемых здесь конкретных задач. Тип и параметры зависимости /2/ могут быть уточнены при этом эмпирически - по результатам машинного эксперимента с несколькими моделями  $\mu_i$ .

\* Например, правило Рунге, используемое для апостериорной оценки точности численного интегрирования /8/, представляет собой частный случай оценки /6/, получаемой при  $\gamma_2 = 1$ ,  $\kappa_i = 2$ .

Не обсуждая здесь вопроса о влиянии случайных ошибок, допускаемых при вычислении значений  $Q_{\mu_i}$  \* на оценку систематической погрешности  $\epsilon$ , укажем лишь, что это влияние может быть снижено, если сравнение моделей  $\mu_i$  и  $\mu_{i-1}$  выполняется по схеме зависимых статистических испытаний /4/, глава V /.

Рассмотренные выше методы контроля точности моделирования целесообразно применять в рамках единого процесса моделирования, предусматривающего последовательное усложнение испытываемых моделей  $\mu_i$ . Усложнение прекращается, если оценка систематической погрешности  $\epsilon_i$  оказывается сравнимой с допуском, определяемым неточностью данных, входящих в описание моделируемой системы /5/ глава VI /. Модель  $\mu_i$ , для которой установлено это соответствие, называется в дальнейшем корректной и может быть использована для проведения задуманной исследователем серии машинных экспериментов.

Процесс последовательного усложнения может выполняться параллельно по нескольким, характеризующим изучаемую систему, показателям  $Q$  с выбором корректной модели по наименее благоприятному показателю.

В случае, если упрощение модели производится несколькими регулярными способами, процесс последовательного усложнения можно разбить на ряд этапов, на каждом из которых используется один способ. При этом допустимо многократное /периодическое/ обращение к каждому способу в рамках процедуры, аналогичной методу Гаусса-Зайделя. В некоторых случаях возможно одновременное усложнение несколькими способами - процесс, аналогичный более сложным /в частности, градиентным/ поисковым процедурам.

\* Эти ошибки особенно существенны, если значения  $Q_{\mu_i}$  определяются методом Монте-Карло.

### §3. О моделировании плазмы с помощью метода укрупненных частиц

В этом параграфе полученные выше общие соотношения применяются к конкретной задаче физики плазмы.

В работах /1, 2/ подробно обсуждаются погрешности моделирования процессов в плазме, порождаемые дискретизацией модели и уменьшением числа рассматриваемых частиц с соответствующим увеличением их массы и заряда. Можно условно выделить две составляющие погрешности. Первая составляющая обусловлена флуктуациями плотности числа частиц  $n$  около ее среднего значения и связанными с ними флуктуациями электрического поля, приводящими эффективно к дополнительным соударениям /дробовой шум/. Естественно считать, что эта составляющая имеет "физическое" /статистическое/ происхождение. Уменьшение флуктуаций может быть достигнуто в этом случае лишь за счет увеличения числа макрочастиц и происходит пропорционально  $1/\sqrt{n}$ .

Вторая, нефизическая, составляющая, условно называемая нами "математической", порождается частными особенностями конкретной модели; способом формирования сеток и макрочастиц /иногда этот эффект называют сеточным шумом/. Известно несколько способов формирования: метод плоских листов, метод частиц в ячейке (PIC), метод размазанных частиц /облаков/ PC; совместное использование PIC и PC приводит к методу облаков в ячейке (CIC) и т.д. Как первая, так и вторая составляющие погрешности приводят, вообще говоря, к увеличению эффективной частоты соударений  $\nu_{eff}$ , однако вторая может быть уменьшена не только за счет увеличения числа макрочастиц  $n$ , но и за счет усовершенствования способа их представления\*.

\* Отметим здесь, что влияние разного рода усовершенствований математической модели на конечный физический результат до сих пор не исследовано и, как правильно замечено в /1/, последствия этих усовершенствований не вполне понятны.

Итак, основным из известных побочных эффектов при моделировании плазмы с помощью метода макрочастиц является усиление роли близких взаимодействий между частицами по отношению к главным эффектам, обусловленным дальними коллективными взаимодействиями.

Именно с этой точки зрения мы и рассмотрели ниже в качестве критерия адекватности исследуемой упрощенной модели /исходной модели/ малость эффективной частоты соударений частиц  $\nu_{eff}$  /соударений, возникающих в результате моделирования и приводящих к максвеллизации функции распределения частиц/ по сравнению со скоростью изучаемого коллективного процесса /например, частотой ленгмюровских колебаний, декрементом затухания Ландау или инкрементом нелинейных взаимодействий в плазме/. При этом естественно предполагается, что исходную модель, т.е. реальную плазму можно с хорошей точностью считать бессоударительной.

Рассмотрим вначале метод макрочастиц. Следуя<sup>/3/</sup>, обозначим  $\alpha = n/n'$ , где  $n'$  - число укрупненных частиц. Тогда заряд и масса макрочастицы будут равны  $e' = \alpha e$  и  $m'_e = \alpha m_e$ , а ее средняя скорость должна совпадать со средней скоростью реальной частицы, т.е.

$$\frac{T'_e}{m'_e} = \frac{T_e}{m_e} = v_e^2$$

или

$$T'_e = \alpha T_e.$$

Легко проверить, что ленгмюровская частота и дебаевская длина не изменяются:

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n e^2}{m_e} = \omega'_{pe}{}^2, \quad d_e = \frac{v_e}{\omega_{pe}} = d'_e.$$

Между остальными характерными величинами имеют место следующие соотношения<sup>/3/</sup>:

для среднего расстояния между частицами, соответственно, при трех-, двух- и одномерном моделировании

$$\lambda_I^{(3)} = n^{-1/3} = \alpha^{-1/3} \lambda_I^{(3)'}, \quad \lambda_I^{(2)} = n^{-1/2} = \alpha^{-1/2} \lambda_I^{(2)'}, \quad /8/$$

$$\lambda_I^{(1)} = n^{-1} = \alpha^{-1} \lambda_I^{(1)'}$$

для длины между парными кулоновскими соударениями

$$\lambda_C = \frac{T_e^2}{n e^4} = \alpha \lambda'_C, \quad /9/$$

для числа частиц в дебаевской сфере

$$N_D = \Lambda = n d_e^3 = \alpha \Lambda'. \quad /10/$$

Поэтому отношение частоты парных кулоновских соударений к плазменной ленгмюровской частоте определяется формулами /см., например, /2/ /:

$$\frac{\nu_e}{\omega_{pe}} \equiv \frac{\ell_n \Lambda'}{\Lambda} = \frac{\ell_n \alpha \Lambda'}{\alpha \Lambda'} = \frac{1}{\alpha \Lambda'} \ell_n \alpha + \frac{1}{\alpha} \frac{\nu'_e}{\omega'_{pe}} \quad /11/$$

$$\frac{\nu'_e}{\omega'_{pe}} \equiv \frac{\nu'_e}{\omega_{pe}} \equiv \alpha \frac{\nu_e}{\omega_{pe}} - \frac{\ell_n \alpha}{\Lambda'}$$

соответственно, для исходной и укрупненной моделей. Это означает, что при не слишком больших  $\alpha \leq \Lambda$  эффект соударений растет фактически пропорционально  $\alpha$ . В случае же  $\alpha > \Lambda$  получающаяся модель уже не имеет никакого отношения к исходной системе. Иногда добиваются уменьшения эффекта соударений при помощи сглаживания межчастичных полей путем перехода от точечных макрочастиц к размазанным облакам с размерами  $\lambda'_{sm}$ , значительно большими расстояния между частицами  $\lambda'_I$ <sup>/2/</sup>. При таком подходе естественно возникают свои трудности, связанные, например, с выполнением условия  $\lambda'_I \ll \lambda'_{sm} \ll L'$ , где  $L'$  - характерная макроскопическая длина /размер изучаемой системы/. Как уже отмечалось

выше, последствия такой "размазки" до сих пор не вполне ясны. Ниже мы исследуем модель точечных макрочастиц.

Пусть нас интересуют нелинейные взаимодействия ленгмюровских волн. Основным характерным параметром, не зависящим от плотности энергии ленгмюровских колебаний, будет здесь величина

$$\omega_- = \omega_1^{\ell} - \omega_2^{\ell} = \frac{3}{2} v_e^2 \frac{k_1^2 - k_2^2}{\omega_{pe}} \quad /12/$$

/здесь  $k_1$  и  $k_2$  - волновые числа взаимодействующих  $\ell$ -волн/, которая в силу /7/ не преобразуется при моделировании.

Как показано в /9/, отношение  $\omega_- / \nu_e$  определяет характер нелинейных взаимодействий - при малом  $(\nu_e / \omega_-) \ll 1$  взаимодействия протекают как в бесстолкновительной плазме. Это означает, что в области волновых чисел  $k < k_D \sqrt{m_e / m_i} = d_e^{-1} \sqrt{m_e / m_i}$  основным нелинейным взаимодействием  $\ell$ -волн является их индуцированное рассеяние на ионах плазмы, если выполнено

$$\text{условие } \frac{W}{n T_e} < \frac{\omega_-}{\omega_{pe}}, \quad \frac{W}{n T_e} = \frac{E^2}{4\pi n T_e} - \text{отношение плотности энергии в волне к плотности тепловой энергии частиц. Обе эти величины } W \text{ и } n T_e \text{ не изменяются при моделировании.}$$

Если нас интересует, скажем, динамика ленгмюровской турбулентности, связанная с упомянутым взаимодействием /сюда могут быть включены и взаимодействия квазираспадного типа/, то основным тестом на правильность моделирования /либо с помощью метода макрочастиц, либо с помощью численного решения уравнения Власова/ может быть исследование элементарного акта нелинейных взаимодействий. Выберем начальное состояние в виде системы, в которой возбуждены две ленгмюровские волны с разными волновыми числами  $k_1$  и  $k_2$  меньшими  $k_D \sqrt{m_e / m_i}$ . Проследим за эволюцией этого состояния в течение времени  $t \approx (5 \div 10) n T_e / \omega_{pe} W$ . В соответствии с бесстолкновительной теорией /10, 11/,

энергия из волны с  $k_1$  перекачивается в волну с  $k_2$ , если  $k_1 > k_2$ , и наоборот\*. С увеличением столкновительного шума, связанного с погрешностями моделирования, этот процесс будет замазываться, а при  $\omega_- \approx \nu_{eff}$  должно произойти его качественное изменение, вплоть до изменения направления перекачки энергии /9/.

Основным тестом, описанным в литературе /1/, является исследование максвеллизации "шумящих" моделей. Так, в методе макрочастиц /1/ рассматривали эволюцию немаксвелловских /например, прямоугольных/ начальных распределений во времени. Для одномерного моделирования было обнаружено, что максвеллизация вызвана не парными соударениями частиц, как это имеет место в обычной плазме, а тройными соударениями\*\*, поэтому  $\nu_{eff}^M \sim (n d_e)^{-2}$ , а не  $\nu_{eff}^P \sim (n d_e)^{-1}$  /парные соударения/. Каково влияние парных соударений на более тонкие эффекты нелинейных взаимодействий? Будет ли оно существенным или, как и максвеллизация, определится  $\nu_{eff}$ ? Насколько нам известно, детальное исследование этого процесса отсутствует, хотя в уже процитированной работе Доусона отмечается, что парные соударения с учетом экранировки частиц приводят к столкновительной диссипации ленгмюровских волн /см. рис. 8 работы /1/./. Это лишний раз указывает на то, что скорость максвеллизации  $\nu_{eff}^M$  является довольно грубым показателем погрешности моделирования и не может служить надежным критерием в общем случае.

При моделировании нелинейностей естественно поэтому в качестве параметра  $Q$  выбрать величину

\* Следует отметить, что при одномерном моделировании волны должны распространяться в противоположных направлениях или быть стоячими /см. /12/ /.

\*\* Сохранение функции распределения  $f(v)$  при парном столкновении связано с тривиальным выполнением законов сохранения энергии и импульса в одномерном случае; частицы либо остаются в прежних состояниях, либо совершают взаимный переход.



$$Q = 1 + \frac{\nu_e}{\omega_-} \quad /13/$$

Для

$$k \leq \frac{1}{3} k_D \sqrt{m_e/m_i} \quad /14/$$

$$\omega_- \approx 3k^2 \nu_e^2 / \omega_{pe} \lesssim \frac{1}{3} \frac{m_e}{m_i} \omega_{pe} \quad /15/$$

Поэтому для исходной системы

$$1 \gg \frac{\nu_e}{\omega_-} \geq \frac{\nu_e}{\omega_{pe}} \frac{m_i}{m_e} \approx \frac{1}{N_D} \frac{m_i}{m_e},$$

где  $N_D$  - число частиц в дебаевской сфере, преобразуется одинаково, при одно-, двух и трехмерном моделировании в соответствии с формулой /10/.

Если принять для модели погрешность 10%, то

$$\frac{\nu'_e}{\omega'_-} \approx \frac{m'_i}{m_e} \frac{1}{N'_D} = \frac{a}{q} \frac{m_i}{m_e} \frac{1}{N_D} < 10^{-1} \quad /16/$$

Это означает, что рассматриваемый нелинейный процесс может моделироваться только для реальных плазм, у которых  $N_D$  достаточно велико

$$N_D > 10 \frac{a}{q} \frac{m_i}{m_e} \quad /17/$$

В формулах /16/ и /17/ величина  $q = m_i/m'_i$  - отношение ионных масс в реальной и модельной плазмах, обычно  $q > 10$ :

Пусть условие /17/ выполнено, а последовательность моделей  $\{\mu_i\}$  формируется уменьшением числа  $a$ , вплоть до единицы. В этом случае погрешности  $\epsilon_i$  моделей  $\mu_i$  суть

$$\epsilon_i = Q - Q_i = \frac{\nu_e}{\omega_-} - \left(\frac{\nu'_e}{\omega'_-}\right)_i = \frac{\nu_e}{\omega_-} (1 - a_i), \quad /18/$$

где  $(\nu'_e/\omega'_-)$  и  $a_i$  - значения величин  $\nu'_e/\omega'_-$  и  $a$ , соответствующие модели  $\mu_i$ . Определяя сложность  $C_i$  модели  $\mu_i$ , связанную непосредственно с числом макрочастиц  $n'_i$ , рассматриваемых в этой модели, как

$$C_i = n'_i/n_i = a_i^{-1}, \quad /19/$$

можно /для практических возможных значений  $n' \approx 10^2 \div 10^5$ / записать выражение /18/ в форме

$$\epsilon_i = -\frac{\nu_e}{\omega_-} C^{-1}, \quad /20/$$

совпадающей с /4/ при

$$\gamma_1 = -\nu_e/\omega_-, \quad \gamma_2 = -1.$$

Таким образом, в рассмотренном случае может быть использована данная в §2 методика оценки погрешности. В частности, оказывается справедливой формула /6/ - если при переходе от модели  $\mu_{i-1}$  к модели  $\mu_i$  число макрочастиц удваивается и, следовательно,  $\kappa_i = C_i/C_{i-1} = 2$ .

#### §4. Заключение

Рассмотренный выше пример иллюстрирует возможности применения предлагаемых подходов к контролю точности моделирования плазмы методом макрочастиц. При переносе этих подходов на другие задачи может оказаться необходимым использование зависимостей  $\epsilon = \epsilon(C)$ , отличных от /20/, в частности, зависимостей вида /4/ с другими значениями параметра  $\gamma_2$  или зависимостей /2/, записанных в иной форме. Во всех случаях уточнение этих зависимостей и, следовательно, оценок вида /6/, производится как путем теоретического исследования доступных для анализа близких задач, так и путем эмпирического исследования последовательности моделей  $\{\mu_i\}$  для решаемой на практике задачи. Первый путь позволяет обычно наметить общую форму записи параметризации зависимости /2/ с тем, чтобы перенести ее по аналогии на решаемую задачу. Второй

путь используется при оценке параметров  $\vec{\gamma}$  в /2/, а также для уточнения ограничений, вызванных особенностями используемых при моделировании вычислительных машин и методов вычислений /в том числе - схем численного решения дифференциальных уравнений движения макрочастиц/.

Заметим, что при исследовании соотношений /19/, /20/ не для оценки погрешности, а для экстраполяции значений  $Q$  по значениям  $Q_i$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , полученным на моделях со сравнительно малым числом макрочастиц /см. §2/, характеристику сложности полезно модифицировать с тем, чтобы при значении  $a_i \rightarrow 1$ /полная модель/ погрешности  $\epsilon_i \rightarrow 0$  при сложности  $C_i \rightarrow \infty$ . Зависимость /20/ можно сохранить при этом, заменив "естественное" определение /19/ на более "искусственное".

$$C_i = (a_i - 1)^{-1} \quad /21/$$

В рассмотренном примере мы имели дело с моделированием при помощи укрупненных, но точечных частиц. Часто для уменьшения эффектов столкновений, как уже отмечалось выше, прибегают к методу размазанных частиц или облаков /1, 2/. В этом случае частота соударений  $\nu_e$  уменьшается /при  $a = \lambda_{s,m} \approx \frac{1}{2} d_e$  - приблизительно на порядок/ и формула /20/ может рассматриваться как верхний предел. Однако такая размазка весьма плохо сказывается на поведении длинноволновых гармоник  $\Lambda > d_e \sqrt{m_i/m_e}$ , наиболее интересных с точки зрения теории ленгмюровской турбулентности. Поэтому без проведения предложенного выше теста достоверность такого моделирования остается сомнительной.

Кроме рассмотренного выше влияния на точность моделирования, связанного с дискретизацией и укрупнением частиц, некоторое /иногда весьма существенное/ влияние на эту точность может оказывать выбор тех или иных граничных условий. Особенно это относится к периодизации модели или к закреплению ее концов /3/. В первом случае может возникнуть отрицательная /паразитная/ обратная связь /12/, которая в принципе может быть ослаблена увеличением длины периода /здесь сложность определяется длиной периода/.

Авторы выражают признательность Е.П.Жидкову, Г.А.Ососкову и С.И.Сердюковой за полезное обсуждение первоначального варианта работы.

#### Литература

1. Дж. Доусон. В книге "Вычислительные методы в физике плазмы". стр. 11, Мир, М., 1974.
2. Ч. Бордсон, А. Ленгдон, Х. Окуда. Там же. стр. 242.
3. A. Sestero. *Nuovo Cim.*, 9B, 222, 1972.
4. Ю.Г. Полляк. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. М., Советское радио, 1971.
5. В.И. Важенин, Ю.В. Воронцов, В.А. Герман, Ю.Г. Полляк, Н.Л. Сосенский, В.С. Сушков, Е.Д. Харламова, В.П. Яковенко. Труды РАИ АН СССР, вып. 12, М., 1973, стр. 5.
6. W.W. Wood. In "Physics of Simple Liquids". p. 115 North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968.
7. А.А. Валуев, Г.Э. Норман. В сборнике "Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике", стр. 268, Изд-во Вычислительного центра СОАН СССР, Новосибирск, 1974.
8. И.С. Березин, Н.П. Жидков. Методы вычислений, том. 1, М., Физматгиз, 1959.
9. В.Г. Маханьков, В.Н. Цытович. ЖЭТФ, 53, 1789, 1967.
10. В.Н. Цытович. Нелинейные эффекты в плазме. М., Наука, 1967.
11. V.G. Makhankov, V.G. Shchinov. *Comp. Phys. Comm.*, 4, 327, 1972.
12. Л.М. Дегтярев, В.Г. Маханьков, Л.И. Рудаков. ЖЭТФ, 67, № 8, 1974.
13. Х.О. Абдуллоев, И.Л. Боголюбский, В.Г. Маханьков. Препринт ОИЯИ Р9-7992, Дубна, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел  
3 сентября 1974 года.