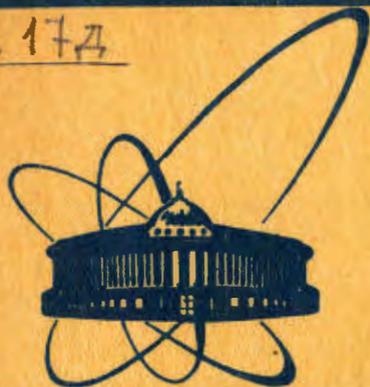


82-871

С 17д



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

1153 / 83

P11-82-871

Э.А. Айрян, Е.П. Жидков, Б.Н. Хоромский,
О.И. Юлдашев

МЕТОД АЛЬТЕРНИРОВАНИЯ
ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ
В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

1982

При численном решении эллиптических уравнений с сильно меняющимися коэффициентами наряду с итерационными процессами для однородных разностных схем^{/1,2/} в ряде задач удобно также использовать алгоритмы, основанные на методе альтернирования по подобластям без налегания. Для уравнения Пуассона в ограниченной области, составленной из нескольких цилиндров, такой алгоритм построен и исследован в^{/3/}. Случай сильно эллиптического оператора для ограниченных областей альтернирования, разделенных достаточно произвольной кривой, рассмотрен в работах^{/4,5/}, причем в^{/5/} для уравнения Гельмгольца скорость сходимости итераций оценивается геометрической прогрессией со знаменателем, не зависящим от шага дискретизации.

В настоящей работе предложен итерационный процесс для эллиптического уравнения на всей плоскости, встречающегося, например, в магнитостатике. Скорость сходимости альтернирующего процесса оценивается геометрической прогрессией со знаменателем, пропорциональным отношению предельных значений коэффициента уравнения на линии разрыва. Таким образом, эффективность итераций возрастает с увеличением этого отношения.

Алгоритм использовался как для конечно-разностной аппроксимации исходных уравнений, так и в случае, когда внешняя задача решается при помощи граничного интегрального уравнения /ГИУ/. Результаты по скорости сходимости итераций в расчетах дипольного магнита типа "Оконная рама" и модельных задач приведены в §3.

§1. СВЕДЕНИЕ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ К СИСТЕМЕ ГИУ

Пусть замкнутая кривая Γ класса C^2 без самопересечений разделяет плоскость R^2 на внутреннюю и внешнюю области Ω_i и Ω_e , так что $R^2 = \Omega_i \cup \Gamma \cup \Omega_e$. Требуется найти функции $u_i(x)$, $i = 1, 2$, $x \in R^2$, удовлетворяющие уравнениям

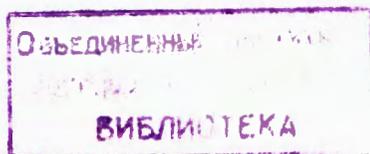
$$\Delta u_1(x) = f(x), \quad x \in \Omega_e, \quad u_1(\infty) = 0,$$

$$\operatorname{div}(\mu(|\operatorname{grad} u_2|) \operatorname{grad} u_2) = 0, \quad x \in \Omega_i,$$

/1.1/

$$u_1(x) = u_2(x), \quad x \in \Gamma,$$

$$\mu(|\operatorname{grad} u_2|) \frac{\partial u_2}{\partial n} = \frac{\partial u_1}{\partial n}, \quad x \in \Gamma,$$



где $\frac{\partial}{\partial n}$ означает производную по внутренней нормали к области Ω_i . Функции $f(x)$ и $\mu(t)$ заданы и обладают требуемой гладкостью.

Рассмотрим частный случай, когда $\mu(t) = \mu > 0$ есть постоянная величина. При этом функция $u_2(x)$ - гармоническая в области Ω_i . Преобразуем систему дифференциальных уравнений /1.1/ к системе граничных интегральных уравнений на контуре Γ .

Пусть функция $u_0(x)$ является решением задачи

$$\Delta u_0 = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad u_0(\infty) = 0; \quad /1.2/$$

$$f(x) = 0, \quad x \in \Omega_i.$$

При условии

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx = 0, \quad /1.3/$$

вытекающем из формулы Грина

$$0 = \int_{\Gamma} \frac{\partial u_1}{\partial n} ds = \int_{\Omega_e} f(x) dx,$$

функция $u_0(x)$ имеет вид

$$u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(y) \ln r(x,y) dy, \quad r(x,y) = |x-y|.$$

Функцию $u_1(x)$ представим в виде суммы

$$u_1 = u_0 + v_1; \quad \Delta v_1 = 0, \quad x \in \Omega_e, \quad v_1(\infty) = 0, \quad /1.4/$$

и запишем ГИУ для функций $u_2(x)$ и $v_1(x)$. Согласно формуле /1.5/ из работы /6/ имеем

$$(E - K)u_2 + L \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0, \quad /1.5/$$

$$(E + K)v_1 - L \frac{\partial v_1}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma.$$

где K и L - следующие интегральные операторы

$$Ku = \int_{\Gamma} K(x,s)u(s)ds; \quad Lv = \int_{\Gamma} \mathcal{L}(x,s)v(s)ds,$$

$$K(x,s) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n_s} \ln r^{-1}(x,s); \quad \mathcal{L}(x,s) = \frac{1}{\pi} \ln r^{-1}(x,s); \quad x,s \in \Gamma.$$

Согласно /1.1/, для решения задачи достаточно определить

$$u(x) = u_2(x) \quad \text{и} \quad v(x) = \frac{\partial u_2(x)}{\partial n}, \quad x \in \Gamma. \quad \text{Используя /1.4/, систему уравнений /1.5/ приводим к виду}$$

$$(E + K)u - \mu Lv = (E + K)u_0 - L \frac{\partial u_0}{\partial n} \equiv \Phi(x), \quad x \in \Gamma, \quad /1.6/$$

$$(E - K)u + Lv = 0,$$

откуда можно найти неизвестные $u(x)$ и $v(x)$, $x \in \Gamma$. Умножая второе из уравнений /1.6/ на μ и складывая с первым, получим

$$(1 + \mu)Eu + (1 - \mu)Ku = \Phi(x). \quad /1.7/$$

Таким образом, система /1.6/, а следовательно, и /1.1/, имеет единственное решение при тех же условиях, что и уравнение /1.7/, т.е. если величина $\lambda = (\mu + 1)(\mu - 1)^{-1}$ не является собственным числом оператора K , а уравнение $Lv = 0$ имеет лишь нулевое решение $(v, 1) = 0$. Например, в задачах магнитостатики $0 < \mu \leq 1$, откуда $\lambda \leq -1$, $\lambda(\mu) \rightarrow -\infty$, $\mu \rightarrow 1$.

Согласно /6/, для выпуклого контура Γ модули всех собственных чисел оператора K строго меньше 1, за исключением одного $\lambda = 1$. Таким образом, в этом случае задача /1.6/ однозначно разрешима для всех $0 < \mu \leq 1$ при условии /1.3/.

Наряду с системой /1.6/ рассмотрим второй возможный случай, когда функция $u_1(x)$ определена в области Ω_i , причем $f(x) = 0$, $x \in \Omega_i$, а $u_2(x)$ определена в Ω_e , $u_2(\infty) = 0$. В этом случае функции $u(x) = u_2(x)$, $v(x) = \frac{\partial u_2}{\partial n}$, $x \in \Gamma$ удовлетворяют системе

$$(E + K)u - Lv = 0, \quad /1.8/$$

$$(E - K)u + \mu Lv = (E - K)u_0 + L \frac{\partial u_0}{\partial n} \equiv \Phi_1(x),$$

которая однозначно разрешима, если величина $\lambda_1 = (\mu + 1)(1 - \mu)^{-1}$ не является собственным числом оператора K . При $\mu > 0$ имеем $\lambda_1(\mu) > 1$, откуда также следует однозначная разрешимость задачи /1.8/ для выпуклого контура.

В задачах магнитостатики имеет место либо случай /1.6/, либо /1.6/, /1.8/ одновременно, когда область Ω_i неодносвязна.

§2. ФОРМУЛИРОВКА ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ /1.6/, /1.8/ И ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ

Из систем /1.6/, /1.8/ можно исключить неизвестную функцию $v(x)$, после чего решить уравнение /1.7/ или ему подобное и найти $u(x)$, а затем, обратив оператор L , найти $v(x)$. Однако такой алгоритм осуществим лишь при постоянном значении μ . В общем случае второе из уравнений /1.1/ является нелинейным и его нельзя заменить граничным уравнением. Предлагаемый здесь метод альтернирования по подобластям без налегания Ω_i и Ω_e непосредственно применим для случая достаточно произвольной функции $\mu(t)$.

Напомним, что если кривая Γ принадлежит классу C^k , то оператор K действует из $C^k(\Gamma)$ в $C^k(\Gamma)$, а L из $C^{k,\alpha}(\Gamma)$ в $C^{k+1,\alpha}(\Gamma)$, $\alpha > 0$. Рассмотрим систему /1.6/. Пусть задано приближение u_k , тогда очередное значение v_{k+1} и u_{k+1} определим последовательно из уравнений:

$$\begin{aligned} (E - K)u_k + Lv_{k+1} &= 0, \\ (E + K)u_{k+\frac{1}{2}} - \mu Lv_{k+1} &= \Phi, \\ u_{k+1} &= \omega u_k + (1 - \omega)u_{k+\frac{1}{2}}, \quad 0 < \omega < 1. \end{aligned} \quad /2.1/$$

Этот процесс соответствует решению задачи Дирихле в области Ω_i , и затем - решению внешней задачи Неймана в области Ω_e , с последующей релаксацией.

Для задачи /1.8/, наоборот, сначала решается внешняя задача Дирихле в области Ω_e , затем - задача Неймана в Ω_i , что приводит к процессу:

$$\begin{aligned} (E + K)u_k - Lv_{k+1} &= 0, \\ (E - K)u_{k+\frac{1}{2}} + \mu Lv_{k+1} &= \Phi, \\ u_{k+1} &= \omega u_k + (1 - \omega)u_{k+\frac{1}{2}}, \quad 0 < \omega < 1. \end{aligned} \quad /2.2/$$

В итерациях /2.2/ требуется решить уравнение с вырожденным оператором $E - K$. Однозначная разрешимость соответствующего уравнения имеет место, если положить, согласно лемме 2 из /6/, $(u_k, g_0) = 0$, где $(E - K^*)g_0 = 0$. Тогда $(v_{k+1}, 1) = 0$ и, кроме того, $(\frac{\partial u_0}{\partial n}, 1) = 0$ в силу /1.3/. Поэтому из той же леммы 2 следует $(Lv_{k+1}, g_0) = 0$, $(L\frac{\partial u_0}{\partial n}, g_0) = 0$, а слагаемое $(E - K)u_0$ в правой части также ортогонально g_0 .

Таким образом, второе уравнение в системе /2.2/ однозначно разрешимо на множестве $(u_{k+\frac{1}{2}}, g_0) = 0$, если $(g_0, 1) \neq 0$, что имеет место согласно /8/.

Лемма 1. Пусть $Lg_0 \neq 0$, число $\lambda = (\mu+1)(\mu-1)^{-1}$ не является собственным значением оператора K и выполнено условие

$$\frac{2\mu}{1+\mu} \|K_1\| = q < 1, \quad K_1 = (E + K)^{-1}K,$$

тогда итерационный процесс /2.1/ сходится к единственному решению $u(x)$ системы /1.6/ со скоростью

$$|u_k - u| \leq q^k |u_0 - u|, \quad \text{где } u_0 - \text{ начальное приближение.}$$

Лемма 2. Пусть $Lg_0 \neq 0$, а число $\lambda = (1+\mu)(1-\mu)^{-1}$ не является собственным значением оператора K . Если выполнено условие

$$\frac{2\mu}{1+\mu} \|K_2\| = q_1 < 1, \quad K_2 = (E - K)^{-1}K,$$

где оператор $(E - K)^{-1}$ действует в подпространстве $(u, g_0) = 0$, то итерационный процесс /2.2/ сходится к единственному решению $u(x)$ системы /1.8/ со скоростью $|u_k - u| \leq q_1^k |u_0 - u|$.

Доказательство условий однозначной разрешимости уравнений /1.6/, /1.8/ приведено выше. Положим далее $\Phi(x) = 0$ и рассмотрим уравнение для погрешности итераций /2.1/

$$u_{k+\frac{1}{2}} = -\mu(E + K)^{-1}(E - K)u_k = -\mu(E - 2(E + K)^{-1}K)u_k,$$

что с учетом релаксации дает

$$u_{k+1} = \omega u_k + (1 - \omega)u_{k+\frac{1}{2}} = T_1 u_k,$$

где

$$T_1 = (\omega - \mu(1 - \omega))E + 2\mu(1 - \omega)(E + K)^{-1}K.$$

Для системы /2.2/ аналогично получаем

$$T_2 = (\omega - \mu(1 - \omega))E - 2\mu(1 - \omega)(E - K)^{-1}K.$$

В результате имеем

$$\|T_i(\omega)\| \leq |\omega - \mu(1 - \omega)| + 2\mu(1 - \omega)\|K_i\| = F_i(\omega), \quad i = 1, 2. \quad /2.3/$$

Правая часть в /2.3/ есть кусочно-линейная функция, поэтому

$$\min_{\omega \in [0, 1]} \|T_i(\omega)\| \leq \min \{F_i(0), F_i(\omega^*), F_i(1)\},$$

где ω^* находится из уравнения

$$\omega - \mu(1 - \omega) = 0, \quad \omega^* = \mu(1 + \mu)^{-1}. \quad /2.4/$$

В силу равенств

$$F_i(0) = \mu + 2\mu\|K_i\|, \quad F_i(1) = 1,$$

$$F_i(\omega^*) = \frac{2\mu}{1+\mu}\|K_i\|, \quad i = 1, 2$$

при $\mu > 0$ имеем $F_i(\omega^*) < F_i(0)$. При $\omega = 1$ процесс закликивается. Таким образом, при $\omega = \omega^*$ получаем условия сходимости лемм 1, 2.

Замечание 1. Аналогично /2/ гл.6, можно дать более точную оценку нормы оператора T_i , учитывая его самосопряженную и не-самосопряженную части, которая будет точна для случая самосопряженного K . Последнее имеет место лишь для окружности. В этом случае оценка /2.3/ и равенство /2.4/ переходят в точные, т.к. тогда

Анализ условия /2.9/ приводит к ограничениям:

$$\rho(\omega^*) < 1 \quad \mu(2\Lambda_{\max} - 1) < 1,$$

$$\omega^* = \frac{\mu(\Lambda_{\max} + \Lambda_{\min} - 1)}{1 - \mu(\Lambda_{\max} + \Lambda_{\min} - 1)} \quad /2.10/$$

$$\rho(\omega^*) = \frac{\mu(\Lambda_{\max} - \Lambda_{\min})}{1 - \mu(\Lambda_{\max} + \Lambda_{\min} - 1)}$$

Отметим, что для уравнения /1.6/ $\sigma(K)$ содержит отрезок $[0,1]$, поэтому $\Lambda_{\max} \geq 0,5$, $\Lambda_{\min} \leq 0$.

Обратимся к случаю $\mu=1$, который является самым неблагоприятным с точки зрения сходимости итераций /2.1/, /2.2/. Если контур Γ выпуклый, а спектр оператора K вещественный и неотрицательный, то $\Lambda_{\min} = 0$, $\Lambda_{\max} = 0,5$, и из /2.10/ получаем следующую оценку скорости сходимости итераций /2.1/:

$$\omega^* = 1/3, \quad \rho(\omega^*) = \frac{1}{3},$$

$$|u_k - u| \leq (\rho(\omega^*) + \epsilon)^k |u_0 - u|,$$

где $\epsilon > 0$ - сколь угодно малое положительное число /7/. Кроме того, при $\mu=1$ и $\text{Im}(\sigma(K)) = 0$ условие $\rho(\omega^*) < 1$, согласно /2.10/, эквивалентно

$$\Lambda_{\max} < 1,$$

что всегда выполняется при условии $\sigma(K) \subset (-1, \infty)$ в силу

$$\lambda(1+\lambda)^{-1} < 1, \quad \lambda \geq -1.$$

Таким образом, итерации /2.1/ при $\mu=1$ сходятся со скоростью геометрической прогрессии для всякого контура, подчиненного условию

$$\text{Im}(\sigma(K)) = 0, \quad \sigma(K) \subset (-1, \infty). \quad /2.11/$$

Численные расчеты показывают, что /2.11/ выполняется для широкого класса контуров.

Замечание 4. Аналогичный анализ условий сходимости можно провести для итераций /2.2/, где $K_2 = (E - K)^{-1}K$. В этом случае при $\mu=1$ итерации /2.2/ могут не сходиться. Одной из возможностей выбора оптимального параметра в такой ситуации является метод минимальных невязок.

Замечание 5. Итерационный процесс /2.1/ непосредственно обобщается на случай нелинейной зависимости $\mu(t)$ в области Ω_i . В этом случае равенство $(E - K)u_k + Lv_{k+1} = 0$ заменяется задачей Дирихле в области Ω_i для квазилинейного эллиптического уравнения. При этом параметр релаксации $\omega^*(\mu)$ из /2.4/ изменяется в зависимости от точки контура. Процессы /2.1/, /2.2/ также применимы в случае ограниченной области Ω_e , где при параметре

релаксации ω^* /2.4/ скорость сходимости практически та же /см. табл.1/, что и для неограниченной области.

§3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО СХОДИМОСТИ АЛЬТЕРНИРУЮЩЕГО МЕТОДА

При дискретизации уравнений /1.5/, /1.8/ ГИУ, соответствующее области Ω_i , всегда заменяется исходным дифференциальным уравнением

$$\text{div}(\mu \text{grad} u) = 0, \quad x \in \Omega_i$$

с последующей конечно-разностной аппроксимацией. ГИУ для внешней задачи в области Ω_e можно либо непосредственно дискретизировать, либо также перейти к дифференциальной постановке. Выбор итерационных параметров и скорость сходимости для обоих подходов, как правило, одинаковы. Главным является то, что скорость сходимости практически не зависит от шага дискретизации. Приведем пример решения задачи /1.1/ по алгоритму /1.5/, /2.1/ для односвязной области Ω_i

$$\Omega_e = \{x, y, |x| \leq a, |y| \leq b\} \cup \{x, y; |x| \geq a+c, -\infty < y < \infty\}$$

$$\cup \{x, y; |y| \geq b+d, -\infty < x < \infty\}, \quad /3.1/$$

$$\Omega_i = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_e; \quad a, b, c, d > 0.$$

Задача с такой конфигурацией возникает, например, при расчете дипольного магнита типа "Оконная рама". Если область Ω_e ограничить прямоугольником Π достаточно больших размеров и положить $u_n = 0$, а задачу в области Ω_e решать методом конечных разностей, то получаются значения q , приведенные в табл.1. Третий столбец таблицы соответствует нелинейной функции $\mu(t)$ и $f(x) = 0,4\pi$.

Таблица 1

Шаг сетки	$\mu=1$		$\mu=10^{-4}$		$\mu(t) = \frac{10^{-4} + t}{1 + t}$	
	q	ω^*	q	ω^*	q	ω^*
h	0,62	0,3	$0,4 \cdot 10^{-4}$	$\frac{\mu}{\mu+1}$	$0,68 \cdot 10^{-3}$	$\frac{\mu}{\mu+1}$
$\frac{h}{2}$	0,53	0,3	$0,4 \cdot 10^{-4}$	$\frac{\mu}{\mu+1}$	$0,70 \cdot 10^{-3}$	$\frac{\mu}{\mu+1}$

Таблица 2

$\omega = \frac{\mu}{\mu+1}$	q			
	$\mu=1$	$\mu=10^{-1}$	$\mu=10^{-2}$	$\mu=10^{-3}$
$h_1 = \frac{1}{8}$	0,37	$0,62 \cdot 10^{-1}$	$0,72 \cdot 10^{-2}$	$0,68 \cdot 10^{-3}$
$h_2 = \frac{1}{16}$	0,58	$0,63 \cdot 10^{-1}$	$0,70 \cdot 10^{-2}$	$0,65 \cdot 10^{-3}$
$h_3 = \frac{1}{32}$	0,55	$0,62 \cdot 10^{-1}$	$0,68 \cdot 10^{-2}$	$0,63 \cdot 10^{-3}$

При решении задачи в области Ω_ϵ методом ГИУ имеются аналогичные результаты.

Приведем пример сходимости итераций для внешней задачи в прямоугольной области и метода ГИУ с оптимальным выбором итерационных параметров по формуле /2.10/. Для прямоугольника $\Pi = \{x, y : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ имеем $\sigma(K) \subset [-0,42, 1]$,

откуда, согласно /2.8/, $\Lambda_{\max} = 0,5$, $\Lambda_{\min} = -0,72$, $\omega^* \approx \frac{\mu}{0,81 + \mu}$.

В табл.2 приведены значения q для сеток с шагом $h, h/2$ и $h/4$.

Следует отметить, что во всех проведенных нами численных расчетах скорость сходимости итераций /2.1/, /2.2/ оценивалась величиной q^k , где q пропорционально μ , т.е. чем сильнее меняется коэффициент μ при переходе в область Ω_i , тем быстрее сходится предлагаемый итерационный процесс.

Приведем в заключение пример сходимости итераций /2.2/ при $\mu=1$, когда область Ω_i есть прямоугольник, а внешняя задача решается методом ГИУ. При $\mu=1$ не удастся подобрать постоянный параметр релаксации ω , обеспечивающий сходимость итераций /2.2/, поэтому расчеты проводились с переменным параметром ω_k , который для задачи с $\Phi(x)=0$ выбирался по формуле

$$\omega_k = (u_k, u_k - u_{k+\frac{1}{2}}) / (u_k - u_{k+\frac{1}{2}}, u_k - u_{k+\frac{1}{2}}).$$

При этом за 25 итераций невязка уменьшается от $\epsilon_0 = 0,9$ до $\epsilon_1 = 0,7 \cdot 10^{-3}$. Однако уже при $\mu=0,1$ процесс быстро сходится при постоянном значении $\omega^* = \mu(1+\mu)^{-1}$, так что за 9 итераций невязка уменьшается от $\epsilon_0 = 0,9$ до $0,5 \cdot 10^{-6}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. "Наука", М., 1977.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений, "Наука", М., 1978.
3. Матвеева Э.И., Пальцев Б.В. О разделении областей при решении краевых задач для уравнения Пуассона в областях сложной формы. ЖВМ и МФ, 1973, 13, №6, с. 1441-1452.
4. Осмоловский В.Г., Ривкинд В.Я. О методе разделения областей для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. ЖВМ и МФ, 1981, т.21, №1, с. 35-39.
5. Мацокин А.М., Непомнящих С.В. О сходимости метода альтернирования Шварца по подобластям без налегания. В сб.: "Вариационно-разностные методы в математической физике". Изд. ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1981, с. 85-97.
6. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Юлдашев О.И. ОИЯИ, Р11-82-659, Дубна, 1982.
7. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. "Наука", М., 1969.
8. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. "Наука", М., 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 декабря 1982 года.